



VANESSA SIQUEIRA PERES DA SILVA

**TESTES PARA A IGUALDADE DE
MATRIZES DE COVARIÂNCIAS DE DUAS
POPULAÇÕES NORMAIS
MULTIVARIADAS DEPENDENTES**

**LAVRAS - MG
2015**

VANESSA SIQUEIRA PERES DA SILVA

**TESTES PARA A IGUALDADE DE MATRIZES DE COVARIÂNCIAS DE
DUAS POPULAÇÕES NORMAIS MULTIVARIADAS DEPENDENTES**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de Doutora.

Orientador
Dr. Daniel Furtado Ferreira

**LAVRAS - MG
2015**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha
Catalográfica da Biblioteca Universitária da UFLA, com dados
informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Silva, Vanessa Siqueira Peres da.

Testes para a igualdade de matrizes de covariâncias de duas populações normais multivariadas dependentes / Vanessa Siqueira Peres da Silva. – Lavras : UFLA, 2015.

150 p. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2015.

Orientador: Daniel Furtado Ferreira.

Bibliografia.

1. Matrizes de Covariâncias. 2. Simulação. 3. Monte Carlo. 4. Erro tipo I. 5. Poder. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

VANESSA SIQUEIRA PERES DA SILVA

**TESTES PARA A IGUALDADE DE MATRIZES DE COVARIÂNCIAS DE
DUAS POPULAÇÕES NORMAIS MULTIVARIADAS DEPENDENTES**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutor.

APROVADA em 27 de fevereiro de 2015.

Dr. Eric Batista Ferreira	UNIFAL
Dr. Denismar Alves Nogueira	UNIFAL
Dr. Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho	UFLA
Dr. Devanil Jaques de Souza	UFLA

Orientador
Dr. Daniel Furtado Ferreira

**LAVRAS - MG
2015**

*Ao **Michael**, meu querido e adorável esposo.*

DEDICO E OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida e por ter me dado sabedoria para concluir este trabalho.

Ao meu orientador, professor Daniel Furtado Ferreira, por todos os conselhos, pela dedicação, atenção, amizade, paciência, pela excelente orientação ao longo desses quatro anos. Obrigada por acreditar em mim e depositar a sua confiança no meu trabalho. Admiro o seu trabalho e a sua dedicação. Durante toda a minha vida você será a minha inspiração.

Aos professores Devanil Jaques de Souza, Eric Batista Ferreira, Denismar Alves Nogueira, Marcelo Tavares e Júlio Sílvio de Sousa Bueno Filho por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora, pelas sugestões e críticas durante o Exame de qualificação e a defesa.

À professora Thelma Sáfadi, pelos ensinamentos repassados durante a disciplina de Séries Temporais, e por ser essa pessoa tão gentil.

Ao Michael, meu esposo, por cuidar de mim com tanto amor e carinho, pela paciência, confiança, respeito e incentivo. Serei eternamente grata a você.

Aos meus pais, Paulo José e Maria Terezinha, pela educação, apoio, cuidado e carinho que sempre tiveram comigo.

Ao meu irmão Tiago, por cuidar dos meus pais nos momentos em que estive ausente.

À minha avó Abadia (*in memoriam*), que me ensinou a orar a Deus, pelo seu exemplo de vida.

À minha tia Cida, por ter me ajudado no momento em que mais precisei, e por interceder a Deus por mim em suas orações. Obrigada pelo carinho, amor, dedicação e apoio.

A todos os meus familiares que torceram por mim e a todos aqueles que contribuíram de alguma forma para o meu crescimento e sucesso. DEUS os abençoe e proteja.

Em especial, às minhas amigas e companheiras de república, Marina de Paiva Resende Toledo, Flávia Freire de Siqueira, Anna Carolina Rezende, Ana Carolina Le Senechal, Patrícia Avelar e Luciana Helena Gama Reis, pela amizade, boa convivência, apoio, carinho e pelas alegrias vividas em todos esses anos. Obrigada por tornarem a minha estadia em Lavras mais agradável.

Aos meus amigos Luiz Carlos Frantz Loose e Mariza Bairros, pela receptividade em São Sepé-RS, e pelo cuidado, carinho, atenção e amor que sempre tiveram comigo e com o Michael.

A todos os colegas do mestrado e doutorado, e aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas (DEX) por serem sempre tão gentis e prestativos, em especial: Josiane de Oliveira Pinto, Maria das Dores Corrêa Santos, Josiane Cristina Pinto de Oliveira e Nádia Ferreira.

Aos meus colegas que se tornaram amigos: Felipe Andrade Velozo, Isabel de Sousa Amorim, Danielle Gonçalves de Oliveira Prado, Larissa Ribeiro de Andrade, Caroline Oliveira Santos e Diana Campos de Oliveira.

À Universidade Federal de Lavras e ao departamento de Ciências Exatas (DEX), pela oportunidade concedida para a realização do doutorado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsa de estudos.

À Universidade Federal de Santa Maria e ao departamento de Estatística por terem me concedido afastamento para conclusão deste trabalho.

Aos colegas de trabalho do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE) da Universidade Federal de Santa Maria.

A todos os professores do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Lavras, pelos conselhos e ensinamentos transmitidos.

Serei eternamente grata a todas as pessoas que me ajudaram de alguma forma a realizar este trabalho.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que
ninguém viu, mas pensar o que
ninguém ainda pensou sobre aquilo que
todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

“Conhecimento não é aquilo que você
sabe, mas o que você faz com aquilo
que você sabe.”

Aldous Huxley

RESUMO

Em algumas situações experimentais das ciências biológicas, físicas e humanas é comum o pesquisador ter o interesse em fazer comparações de matrizes de variâncias e covariâncias de duas populações. Se as amostras das duas populações são independentes nenhuma covariância entre elas é esperada. No entanto, os dados amostrais podem ser emparelhados, em situações em que um grupo de variáveis é mensurado antes e após a realização de um determinado tratamento. Para o caso em que apenas uma variável é mensurada em cada situação, pré (X) e pós (Y) tratamento, Morgan (1939) e Pitman (1939) propuseram um teste t exato baseado na correlação entre as variáveis normais X e Y e na correlação de duas novas variáveis que são combinações lineares de X e Y . O teste de Morgan (1939) e Pitman (1939) considera, no entanto, apenas a situação de $q = 2$ populações e $p = 1$ variável. Para o caso de $q \geq 2$ e $p \geq 1$ variável algumas soluções são propostas na literatura. Entretanto, todos são testes assintóticos. Para tanto, este trabalho foi proposto procurando generalizar o teste de Morgan (1939) e Pitman (1939) para o caso multivariado, considerando a situação de $q = 2$ populações. Testes de comparações de covariâncias na presença de correlação foram propostos pelo método *bootstrap* não-paramétrico (t_{b_0}), maximização de ρ_{UV} para otimizar o α paramétrico (t_a) e pela fixação do α num vetor de uns (t_c) e a avaliação do seu desempenho e comparação com os demais testes foram realizadas. As conclusões alcançadas sobre o desempenho dos testes foram divididas em dois casos. No primeiro caso, em que considerou-se $p = 2$, concluiu-se que dentre os testes que controlaram o erro tipo I, os testes LRT_3 e W_2 foram superiores aos seus competidores em todas as situações estudadas. O teste t_{b_0} foi considerado intermediário e os testes t_a e t_c foram inferiores aos demais. No segundo caso, em que considerou-se $p = 4$ e $p = 10$, concluiu-se que os testes t_a , t_c e t_{b_0} se destacaram por apresentarem um ótimo desempenho, com marcas de quase sempre 100% quando $n \geq 20$. Portanto, recomenda-se a aplicação dos testes propostos t_c e t_{b_0} em situações reais.

Palavras-chave: Matrizes de covariâncias. Simulação. Monte Carlo. Poder. Erro tipo I.

ABSTRACT

In some experimental situations of biological, physical and human sciences is common the researcher be interested in making comparisons of variance and covariance matrices of two populations. If two populations samples are independent it is expected no covariance between them. However, in situations where a group of variable is measured before and after the performance of a particular treatment the sample data can be paired. For the case where only one variable is measured in each situation, pre (X) and post (Y) treatment, Morgan (1939) and Pitman (1939) proposed an exact t test based on the correlation between the normal variables X and Y and the correlation of the two new variables that are linear combinations of X and Y . However, the test proposed by Morgan (1939) and Pitman (1939) considers only situations where we have $q = 2$ populations and $p = 1$ variable. In the literature, some solutions are presented for the case of $q \geq 2$ and $p \geq 1$ variable. However, all are asymptotic tests. Therefore, the propose of this work is to generalize the Morgan (1939) and Pitman (1939) test for the multivariate case, considering the situation of $q = 2$ populations. We proposed covariance comparisons tests in the presence of correlation by the nonparametric *bootstrap* method (t_{b_0}). The ρ_{UV} was maximized to optimize the α parametric (t_a) and for setting the α in an unitary vector (t_c). Then we evaluate the performance of these tests and compare them with the others. We separated the conclusions regarding the performance of the tests in two cases. In the first case, which $p = 2$ was considered, it was found that, among the tests that controlled the type I error, the tests LRT_3 and W_2 were better than their competitors in all situations studied. The t_{b_0} test was considered intermediate and the t_a and t_c tests were lower than the others. In the second case, which $p = 4$ and $p = 10$ were considered, it was found that the t_a , t_c and t_{b_0} tests stood out for having a great performance, achieving 100% marks almost always when $n \geq 20$. Therefore, in real situations, we recommend the application of the t_c and t_{b_0} tests proposed in this work.

Keywords: Covariance matrices. Simulation. Monte Carlo. Power. Type I error.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Taxas de erro tipo I de nove testes de igualdade de matrizes de covariâncias: LRT , LRT_1 , LRT_2 , LRT_3 , W_2 , W_5 , t_a , t_c e $t_{b_0}(\%)$, considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e valor nominal de significância de 5%.	106
Tabela 1	, “continua”	107
Tabela 2	Taxas de erro tipo I de três testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_a , t_c e $t_{b_0}(\%)$, considerando diferentes tamanhos amostrais n , diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e valor nominal de significância de 1%.	108
Tabela 2	, “continua”	109
Tabela 2	, “continua”	110
Tabela 3	Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e $t_{b_0}(\%)$, considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(8 \times 8)}$ e valor nominal de significância de 5%.	113
Tabela 3	, “continua”	114
Tabela 3	, “continua”	115
Tabela 3	, “continua”	116
Tabela 4	Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e $t_{b_0}(\%)$, considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(8 \times 8)}$ e valor nominal de significância de 1%.	117

Tabela 4	, “continua”	118
Tabela 4	, “continua”	119
Tabela 4	, “continua”	120
Tabela 5	Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(20 \times 20)}$ e valor nominal de significância de 5%.	121
Tabela 5	, “continua”	122
Tabela 5	, “continua”	123
Tabela 5	, “continua”	124
Tabela 6	Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(20 \times 20)}$ e valor nominal de significância de 1%.	125
Tabela 6	, “continua”	126
Tabela 6	, “continua”	127
Tabela 6	, “continua”	128
Tabela 7	Poder de nove testes de igualdade de matrizes de covariâncias: LRT , LRT_1 , LRT_2 , LRT_3 , W_2 , W_5 , t_a , t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e $\alpha = 5\%$	130
Tabela 7	, “continua”	131
Tabela 7	, “continua”	132

Tabela 8	Poder de três testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_a , t_c e $t_{b_0}(\%)$, considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e valor nominal de significância de 1%.	133
Tabela 8	, “continua”	134
Tabela 8	, “continua”	135

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
2	REFERENCIAL TEÓRICO	23
2.1	Comparações de matrizes de covariâncias de normais dependentes	23
2.2	Teste para homogeneidade de matrizes de covariâncias	26
2.3	Teste de comparação de variâncias para amostras independentes	33
2.4	Teste de comparação de variâncias para amostras dependentes	45
2.5	Teste de comparação de matrizes de covariâncias na presença de correlação	52
2.6	Teste da razão de verossimilhanças	55
2.7	Simulação <i>bootstrap</i>	77
2.7.1	<i>Bootstrap</i> não-paramétrico	78
2.7.2	<i>Bootstrap</i> paramétrico	79
2.8	Simulação Monte Carlo	80
3	MATERIAL E MÉTODOS	82
3.1	Teste de comparação de covariâncias na presença de correlação	82
3.1.1	Maximizar ρ_{UV}	85
3.1.2	Teste <i>bootstrap</i> não-paramétrico	89
3.1.2.1	Estatística original	89
3.1.2.2	Distribuição nula de <i>bootstrap</i>	89
3.2	Simulação Monte Carlo	91
3.2.1	Taxas de erro tipo I e poder dos testes t_a, t_c e t_{b_0}	93
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	104
4.1	Simulação Monte Carlo	104
4.1.1	Erro tipo I	105
4.1.2	Poder	129
4.1.3	Considerações Gerais	137
5	CONCLUSÕES	139
	REFERÊNCIAS	140
	APÊNDICE	147

1 INTRODUÇÃO

É comum em determinadas situações experimentais o pesquisador estar interessado em comparar matrizes de variâncias e covariâncias de duas populações. Se as amostras de ambas as populações são independentes nenhuma covariância entre elas é esperada. Por outro lado, os dados amostrais podem ser emparelhados em situações em que um grupo de variáveis é mensurado antes e após a realização de um determinado tratamento ou, ainda, em situações na genética em que as medidas são realizadas em uma geração e, também, na geração filial derivada de cada indivíduo, sendo a genealogia preservada. Também ocorre esse tipo de situação em casos em que uma amostra é avaliada em dois diferentes estágios temporais, os denominados dados longitudinais. Se em todos os casos o interesse é focar na comparação das matrizes de covariâncias das populações, não é possível, por exemplo, aplicar o teste de Bartlett (1937). A razão para isso é que, de alguma forma, esses dados são correlacionados e o teste possui baixo poder em detectar possíveis diferenças na matriz de covariâncias, uma vez que se viola a pressuposição, para sua aplicação, de que as duas populações são independentes.

Para o caso em que apenas uma variável é mensurada em cada situação, pré (X) e pós (Y) tratamento, Morgan (1939) e Pitman (1939) propuseram um teste t exato baseado na correlação entre as variáveis normais X e Y e na correlação de duas novas variáveis, U e V , que são combinações lineares de X e Y . O teste de Morgan (1939) e Pitman (1939) se torna bem mais poderoso do que as alternativas existentes para dados não correlacionados à medida que a correlação entre X e Y tende a 1 ou a -1. Esse teste considera, no entanto, apenas a situação de $q = 2$ populações e $p = 1$ variável. Para o caso de $q \geq 2$ populações e $p \geq 1$ variável, algumas soluções são propostas na literatura (BHATTACHARJEE; ALAM, 1982;

BOGLE; HSU, 2002; CHU; PILLAI, 1980; HAN, 1968; HAYAKAWA, 1987; JIANG; SARKAR, 2000, 2002; JIANG; SARKAR; HSUAN, 1999; PIEPHO, 1997; SHAPIRO; COHEN, 1990). No entanto, todos são testes assintóticos.

Morgan (1939) e Pitman (1939) propuseram pela primeira vez o teste da razão de verossimilhanças para a igualdade das variâncias, em uma população normal bivariada, ou seja, $p = 1$ variável e $q = 2$ populações, com correlação desconhecida. Desde então, muitos pesquisadores têm explorado ainda mais este problema. Na ausência de quaisquer suposições restritivas sobre a estrutura de dependência entre duas populações normais multivariadas correlatas, Roy e Potthoff (1958) e Smith e Kshirsagar (1985) tentaram obter um teste para a igualdade das matrizes de covariâncias de dois vetores aleatórios (JIANG; SARKAR, 2002).

De acordo com Jiang e Sarkar (1998), Roy e Potthoff (1958) tentaram pela primeira vez resolver o problema para $p \geq 2$ e $q \geq 2$. Mas, segundo Jiang e Sarkar (1998) existe uma falha nos argumentos principais de Roy e Potthoff (1958). Smith e Kshirsagar (1985) abordaram o problema de testar $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ utilizando o método da razão de verossimilhanças, em que Σ_{11} e Σ_{22} são as matrizes de covariâncias das populações 1 e 2, respectivamente. Mas, de acordo com Jiang e Sarkar (1998), a aplicação desse teste é extremamente complicada, devido à dificuldade em obter uma expressão analítica explícita do estimador de máxima verossimilhança da matriz de covariâncias sob a hipótese nula, e o algoritmo de Smith e Kshirsagar (1985) não é eficiente na obtenção de um estimador válido da matriz de covariâncias (JIANG; SARKAR, 1998). Em vista do fato de que os testes exatos serem difíceis de se formular, Jiang e Sarkar (1998) propuseram alguns testes assintóticos, viáveis para duas normais bivariadas dependentes, explorando a normalidade assintótica dos momentos amostrais de segunda ordem. Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) propuseram ainda um esquema iterativo eficiente para encontrar o

estimador de máxima verossimilhança da matriz de covariâncias e desenvolveram o teste da razão de verossimilhanças com versões modificadas. No contexto de um delineamento cruzado, Jiang e Sarkar (2001) construíram um teste assintótico, o teste da razão de verossimilhanças, e suas modificações para a igualdade das matrizes de covariâncias de sujeito único (ou intra-sujeitos), e propuseram um teste F exato quando os vetores de resposta são bivariados.

Para lidar com o problema de comparar matrizes de covariâncias de distribuições normais dependentes este trabalho generaliza o teste de Morgan (1939) e Pitman (1939) para o caso multivariado, considerando a situação de $q = 2$ populações. Para isso, na seção 2, procurou-se revisar alguns dos principais testes utilizados para comparar matrizes de covariâncias de duas ou mais populações correlacionadas. Na seção 3 buscou-se desenvolver teoricamente os testes propostos (*bootstrap* não-paramétrico (t_{b_0}), maximização de ρ_{UV} para otimizar o α paramétrico (t_a) e o teste t_c , obtido fixando o α num vetor de uns). Posteriormente, foram construídas matrizes de covariâncias positivas definidas, provenientes de $p = 4$ e $p = 10$ populações, com o intuito de avaliar as taxas de erro tipo I e poder dos testes t_a , t_c e t_{b_0} . Finalmente, na seção 4, comparações utilizando simulação Monte Carlo foram realizadas, considerando $p = 2$, para avaliar o desempenho dos testes propostos em relação aos testes existentes, propostos por Jiang e Sarkar (1998) (W_2 e W_5) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) (LRT, LRT₁, LRT₂ e LRT₃). Os testes propostos por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) se limitaram a apenas duas variáveis. Portanto, não foi possível fazer comparações desses testes com os testes propostos (t_a , t_c e t_{b_0}), considerando $p = 4$ e $p = 10$.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Comparações de matrizes de covariâncias de normais dependentes

A comparação de matrizes de covariâncias para variáveis correlacionadas surge em diversas situações das ciências biológicas, físicas e humanas. Em estudos de comparações emparelhadas ou de dados longitudinais muitas vezes o interesse recai na comparação de matrizes de covariâncias de duas ou mais populações. Muitos métodos foram delineados para comparar a homogeneidade de variâncias ou de matrizes de covariâncias na presença de correlação (PIEPHO, 1997; JIANG; SARKAR; HSUAN, 1999).

Para descrever o problema suponha que \mathbf{X} é um vetor aleatório de dimensão $(pq \times 1)$, composto de q grupos de p variáveis aleatórias cada, i.e., $\mathbf{X}^\top = [\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top, \dots, \mathbf{X}_q^\top]$, em que $\mathbf{X}_i^\top = [\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{ip}]$, $i = 1, \dots, q$.

Suponha, adicionalmente, que \mathbf{X} tem distribuição normal pq -variada, $N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com média $\boldsymbol{\mu}$ e covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ desconhecidas. Considere a partição de $\boldsymbol{\Sigma}$, de acordo com os q grupos, dada por

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{1q} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{q1} & \boldsymbol{\Sigma}_{q2} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{qq} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$ é uma matriz $(p \times p)$ para $i, j = 1, \dots, q$.

O objetivo é testar a hipótese $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}_{qq}$ contra a hipótese alternativa $\boldsymbol{\Sigma}_{ii} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{jj}$ para algum $i \neq j = 1, 2, \dots, q$.

O primeiro a considerar esse problema foi Finney (1938) para o caso de $p = 1$ e $q = 2$ supondo correlação conhecida e, posteriormente, Morgan (1939) e Pit-

man (1939) propuseram o teste para correlação desconhecida. O caso de $p = 1$ e $q \geq 2$ foi explorado por vários outros autores posteriormente (BHATTACHARJEE; ALAM, 1982; CHOI; WETTE, 1972; COHEN, 1986; HAN, 1968; HARRIS, 1985; LEVY, 1976; SHAPIRO; COHEN, 1990).

Cirillo et al. (2010) propuseram alguns testes multivariados para comparar q -matrizes de covariâncias de populações normais dependentes. Esses testes foram construídos com base na observação multivariada, representada pelo vetor de variável aleatória \mathbf{X} , em que cada componente $\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top, \dots, \mathbf{X}_q^\top$ definiu vetores de variáveis aleatórias, definidos por $\mathbf{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jp})^\top$ com $j = 1, \dots, q$, em que q correspondeu ao número de populações e p ao número de variáveis. O vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} foi obtido por meio de uma distribuição normal multivariada, $N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, cujos parâmetros foram especificados por:

$$\boldsymbol{\mu}_{(pq \times 1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_q \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma}_{(pq \times pq)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \dots & \boldsymbol{\Sigma}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{q1} & \dots & \boldsymbol{\Sigma}_{qq} \end{pmatrix}$$

A hipótese de interesse foi descrita como $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_{qq}$ versus $H_1 : \text{pelo menos uma matriz de covariâncias } \boldsymbol{\Sigma}_{jj} \text{ difere das demais. Os critérios propostos por Cirillo et al. (2010) e usados como regra de decisão foram determinados em função da razão de variâncias generalizadas, definidas pela razão dos determinantes } \lambda_{10} \text{ e pela razão dos traços } \lambda_{20}. \text{ Os estimadores das matrizes de covariâncias populacionais foram apresentados por Cirillo et al. (2010) e gerados via os métodos } bootstrap, \text{ a partir de amostras provenientes da distribuição Wishart}$

Invertida, que denominaram as razões de variâncias generalizadas por:

$$\lambda_{1(w)} = \frac{\max_j(|\Sigma_{jj}|)}{\min_j(|\Sigma_{jj}|)} \quad \text{ou} \quad \lambda_{2(w)} = \frac{\max_j(\text{Traço}[\Sigma_{jj}])}{\min_j(\text{Traço}[\Sigma_{jj}])};$$

$$\lambda_{1(b)} = \frac{\max_j(|S_{jj}|)}{\min_j(|S_{jj}|)} \quad \text{ou} \quad \lambda_{2(b)} = \frac{\max_j(\text{Traço}[S_{jj}])}{\min_j(\text{Traço}[S_{jj}])},$$

em que S_{jj} representou a matriz de somas de quadrados e produtos amostrais da j -ésima população e Σ_{ij} ($j = 1, 2, \dots, q$) (CIRILLO et al., 2010).

Cirillo et al. (2010) utilizaram a razão de variâncias generalizadas, ora razão dos determinantes ora razão dos traços, na construção dos testes. Todos os critérios foram avaliados em diferentes combinações de tamanho amostral (n), número de populações (q), número de variáveis (p) e grau de heterogeneidade das matrizes de covariâncias (δ). Além disso, para todas essas situações, considerou-se a estrutura autorregressiva de primeira ordem com alta e baixa correlação, respectivamente, sintetizadas pelas correlações globais $\rho = 0,80$ e $\rho = 0,20$.

As matrizes de covariâncias geradas por Cirillo et al. (2010), pelo método *bootstrap*, no qual foram obtidas considerando uma alta correlação ($\rho = 0,80$), apresentaram poder inferior, quando as mesmas foram submetidas à baixa correlação global. Para amostras menores ($n = 20$) os testes apresentaram baixo poder em todas as correlações globais. Em todas as situações estudadas, considerando o controle do erro tipo I e o poder, recomenda-se o uso regular do teste baseado na razão de determinantes em que as matrizes foram geradas via *bootstrap*.

2.2 Teste para homogeneidade de matrizes de covariâncias

Ferreira (2011a) utilizou o teste de Bartlett (1947) para testar a homogeneidade de matrizes de covariâncias de $q \geq 2$ populações normais multivariadas. Deve-se testar a hipótese de homogeneidade sobre as covariâncias ($p \times p$) das q populações dada por

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_q. \quad (2.2)$$

Consideraram-se amostras aleatórias de q populações normais p -variadas $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$ de tamanho n_i , cada uma, com $i = 1, \dots, q$. A amostra da i -ésima população é dada por $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}$, em que $Y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ corresponde à j -ésima unidade da i -ésima população. Considere que $n = \sum_{i=1}^q n_i$.

Suponha que deseja-se testar a hipótese H_0 de que um parâmetro θ de interesse pertença a algum subespaço de \mathbb{R}^s . Esse subespaço é conhecido como conjunto nulo e é representado por $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^s$. Normalmente, esse subespaço corresponde às restrições que são impostas no espaço paramétrico e, nesse caso, a hipótese nula equivale ao espaço restrito. A solução desse teste de hipótese, em termos da região de rejeição R , é um conjunto de valores do espaço amostral que leva à decisão de rejeitar a hipótese H_0 , em favor de uma hipótese alternativa H_1 , que é chamada de espaço irrestrito.

A função de verossimilhança do modelo irrestrito é dada por

$$L_{\Omega}(\mathbf{Y}; \mu_i, \Sigma_i) = (2\pi)^{-np/2} \prod_{i=1}^q |\Sigma_i|^{-n_i/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \mu_i)^{\top} \Sigma_i^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \mu_i) \right\},$$

e a função suporte, por

$$g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) = -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^q \frac{n_i}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i).$$

A expressão

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i) &= \\ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i + \bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i + \bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}_i) & \end{aligned}$$

pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^q \text{tr}[(n_i - 1)\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{S}_i + n_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top],$$

em que a matriz \mathbf{S}_i ($p \times p$), dada por

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i)(\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i)^\top,$$

representa o estimador não-viesado da matriz das covariâncias para a i -ésima população. Dessa forma, a função suporte pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) &= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^q \frac{n_i}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \text{tr}[(n_i - 1)\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{S}_i] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \text{tr}[n_i \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top]. \end{aligned}$$

Após derivar a função suporte em relação aos parâmetros e igualar as derivadas

a zero obtém-se o sistema de equações formado para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança. Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_i} = n_i \Sigma^{-1} (\bar{Y}_i - \mu_i),$$

para $i = 1, \dots, q$. Igualando a equação resultante a zero obtém-se

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i. \quad (2.3)$$

O estimador de máxima verossimilhança da média da i -ésima população é a média amostral dessa população. Para determinar o estimador de máxima verossimilhança para a matriz de covariâncias obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \Sigma_i} = -\frac{n}{2} \Sigma_i^{-1} + \frac{n_i - 1}{2} \Sigma_i^{-1} S_i \Sigma_i^{-1} + \frac{n_i}{2} \Sigma_i^{-1} (\bar{Y}_i - \mu_i) (\bar{Y}_i - \mu_i)^\top \Sigma_i^{-1}.$$

Igualando essa equação a zero, substituindo o estimador de μ_i dado pela equação (2.3) obtém-se

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2} \hat{\Sigma}_i^{-1} + \frac{n_i - 1}{2} \hat{\Sigma}_i^{-1} S_i \hat{\Sigma}_i^{-1} &= 0 \\ \frac{n_i}{2} \hat{\Sigma}_i^{-1} &= \frac{n_i - 1}{2} \hat{\Sigma}_i^{-1} S_i \hat{\Sigma}_i^{-1} \\ \hat{\Sigma}_i \hat{\Sigma}_i^{-1} \hat{\Sigma}_i &= \frac{n_i - 1}{n_i} \hat{\Sigma}_i \hat{\Sigma}_i^{-1} S_i \hat{\Sigma}_i^{-1} \hat{\Sigma}_i. \end{aligned}$$

Dessa forma, deduz-se que o estimador de máxima verossimilhança para a matriz de covariâncias da i -ésima população é dado como

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{n_i - 1}{n_i} S_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{Y}_i) (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{Y}_i)^\top.$$

Substituindo os estimadores de máxima verossimilhança na função de verossimilhança obtém-se seu máximo, que é dado como

$$L_{\Omega}(\mathbf{Y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}_i, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i) = (2\pi)^{-np/2} \prod_{i=1}^q |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i|^{-n_i/2} \exp\left\{-\frac{np}{2}\right\}.$$

Para o modelo restrito, sob a hipótese nula, as covariâncias populacionais são consideradas iguais entre si e, portanto, iguais a uma matriz de covariâncias comum $\boldsymbol{\Sigma}$. A função de verossimilhança para o modelo restrito é dada por

$$L_{\Omega_0}(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-np/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)\right\}, \quad (2.4)$$

e a função suporte, como

$$g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i).$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i) &= \\ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} + \bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} + \bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i). \end{aligned}$$

Logo, a expressão

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} + \bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_{ij} + \bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)$$

pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^q \text{tr} \left[(n_i - 1) \Sigma^{-1} \mathbf{S}_i + n_i \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \right].$$

A função suporte do modelo reduzido pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}_i, \Sigma) = & -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \text{tr}[(n_i - 1) \Sigma^{-1} \mathbf{S}_i] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \text{tr} \left[n_i \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \right]. \end{aligned}$$

Derivando a função suporte em relação ao vetor de médias obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = n_i \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i),$$

para $i = 1, \dots, q$. Igualando essa equação a zero tem-se o estimador de máxima verossimilhança da média da i -ésima população, dado por

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = \bar{\mathbf{Y}}_i. \quad (2.5)$$

Para determinar o estimador de máxima verossimilhança da matriz de covariâncias populacionais comum obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \Sigma} = -\frac{n}{2} \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^q \frac{n_i - 1}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{S}_i \Sigma^{-1} + \sum_{i=1}^q \frac{n_i}{2} \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)(\bar{\mathbf{Y}}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^\top \Sigma^{-1}.$$

Igualando essa equação a zero, substituindo o estimador de $\boldsymbol{\mu}_i$ dado pela equa-

ção (2.5), obtém-se

$$\begin{aligned}
 -\frac{n}{2}\hat{\Sigma}^{-1} + \sum_{i=1}^q \frac{n_i - 1}{2}\hat{\Sigma}^{-1}S_i\hat{\Sigma}^{-1} &= 0 \\
 -\frac{n}{2}\hat{\Sigma}^{-1} &= -\sum_{i=1}^q \frac{n_i - 1}{2}\hat{\Sigma}^{-1}S_i\hat{\Sigma}^{-1} \\
 \hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma} &= \sum_{i=1}^q \frac{n_i - 1}{n}\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^{-1}S_i\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, deduz-se que o estimador de máxima verossimilhança para a matriz de covariâncias populacionais comum é dado como

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^q (n_i - 1)S_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^q n_i \hat{\Sigma}_i}{n}. \quad (2.6)$$

Substituindo os estimadores de máxima verossimilhança na função de verossimilhança do modelo restrito obtém-se seu máximo, que é dado como

$$L_{\Omega_0}(Y; \hat{\mu}_i, \hat{\Sigma}) = (2\pi)^{-np/2} |\hat{\Sigma}|^{-n/2} \exp\left\{-\frac{np}{2}\right\}. \quad (2.7)$$

A estatística do teste de razão de verossimilhanças é dada por

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^q |\hat{\Sigma}_i|^{n_i/2}}{|\hat{\Sigma}|^{n/2}}, \quad (2.8)$$

que sob a hipótese nula de homogeneidade e em grandes amostras, $-2\ln(\Lambda)$ possui distribuição assintótica quiquadrado com $f = (q - 1)p(p + 1)/2$ graus de liberdade.

Box (1949) propôs uma modificação de $-2\ln(\Lambda)$ obtido a partir da estatística (2.8) para obter uma melhor convergência para a distribuição quiquadrado. Sua

proposta baseia-se na incorporação de um fator de correção, na substituição dos estimadores viesados das covariâncias pelos estimadores não-viesados e na substituição de n_i e n pelos graus de liberdade $\nu_i = n_i - 1$ e $\nu = n - q$, respectivamente. A estatística resultante, de acordo com Ferreira (2011a), dada por

$$\chi^2 = - \left[1 - \left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{n-q} \right) \left(\frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(q-1)} \right) \right] \times \left[\sum_{i=1}^q \nu_i \ln |\mathbf{S}_i| - (n-q) \ln |\mathbf{S}_c| \right], \quad (2.9)$$

possui distribuição assintótica quiquadrado com $f = (q-1)p(p+1)/2$ graus de liberdade, sendo que os estimadores (\mathbf{S}_i e \mathbf{S}_c) não-viesados das matrizes de covariâncias populacionais são definidos por

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i)(\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i)^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_c = \frac{1}{n-q} \sum_{i=1}^q (n_i - 1) \mathbf{S}_i.$$

Ferreira (2011a) mostrou que os graus de liberdade da aproximação quiquadrado podem ser justificados considerando que no modelo completo foram estimados $qp + qp(p+1)/2$ parâmetros (médias, variâncias e covariâncias) e no modelo reduzido, $qp + p(p+1)/2$. A diferença entre o número de parâmetros do modelo completo e reduzido representa o número de graus de liberdade f da aproximação quiquadrado. Essa aproximação quiquadrado, segundo Box (1949), é adequada se cada $n_i > 20$ e ambos p e q forem menores do que 6. Se esse não for o caso, o autor propôs uma aproximação F . De acordo com Timm (2002) a estatística F^*

do teste depende de duas quantidades C e C_0 e é dada por

$$F^* = \frac{(n-q) \ln|\mathbf{S}_c| - \sum_{i=1}^q v_i \ln|\mathbf{S}_i|}{a} \quad \text{se } C_0 - C^2 > 0 \quad (2.10)$$

ou

$$F^* = \frac{f_2 \left[(n-q) \ln|\mathbf{S}_c| - \sum_{i=1}^q v_i \ln|\mathbf{S}_i| \right]}{f_1 \left\{ b - \left[(n-q) \ln|\mathbf{S}_c| - \sum_{i=1}^q v_i \ln|\mathbf{S}_i| \right] \right\}} \quad \text{se } C_0 - C^2 < 0 \quad (2.11)$$

sendo que, sob H_0 , possui distribuição F com $f_1 = (q-1)p(p+1)/2$ e $f_2 = (f_1 + 2)/|C_0 - C^2|$ graus de liberdade, em que

$$C = \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(q-1)} \left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{v_i} - \frac{1}{n-q} \right), \quad a = \frac{f_1}{1 - C - f_1/f_2},$$

$$C_0 = \frac{(p-1)(p+2)}{6(q-1)} \left(\sum_{i=1}^q \frac{1}{v_i^2} - \frac{1}{(n-q)^2} \right) \quad \text{e} \quad b = \frac{f_2}{1 - C + 2/f_2}.$$

2.3 Teste de comparação de variâncias para amostras independentes

Ferreira (2009) apresentou a generalização do teste da razão de verossimilhança (*likelihood ratio test* - LRT) para comparar mais de duas variâncias populacionais. Para isso foram consideradas q amostras aleatórias de tamanhos n_i cada uma, com $i = 1, 2, \dots, q$. Seja X_{ij} a j -ésima observação da i -ésima população, considerada normal com média μ_i e variância σ_i^2 , com distribuições idênticas e independentes para $i = 1, 2, \dots, q$ e $j = 1, 2, \dots, n_i$. O objetivo é testar a hipótese

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_q^2 = \sigma^2 \\ H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_\ell^2 \text{ para algum } i \neq \ell = 1, 2, \dots, q. \end{cases} \quad (2.12)$$

Se forem considerados o modelo normal e a hipótese H_1 , que não impõe restrições sobre σ_i^2 , a função de verossimilhança para as $n = \sum_{i=1}^q n_i$ observações amostrais é dada por

$$\begin{aligned} L_1(\mu_i, \sigma_i^2) &= \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{n_i} f(X_{ij}) = \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[\frac{-(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right] \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^q [(\sigma_i^2)^{-n_i/2}] \exp \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{-(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para se obter o máximo de (2.13), toma-se o logaritmo dessa função. O logaritmo da função de verossimilhança, denominado de função suporte, é dado por

$$S_1(\mu_i, \sigma_i^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q [n_i \ln(\sigma_i^2)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \right]. \quad (2.14)$$

Derivando $S_1(\mu_\ell, \sigma_\ell^2)$ em relação a μ_ℓ tem-se

$$\frac{\partial S_1(\mu_\ell, \sigma_\ell^2)}{\partial \mu_\ell} = \sum_{j=1}^{n_\ell} \left[\frac{(X_{\ell j} - \mu_\ell)}{\sigma_\ell^2} \right]. \quad (2.15)$$

Igualando (2.15) a zero e resolvendo tem-se

$$\hat{\mu}_\ell = \frac{\sum_{j=1}^{n_\ell} X_{\ell j}}{n_\ell} = \frac{X_{\ell.}}{n_\ell} = \bar{X}_\ell. \quad (2.16)$$

Derivando $S_1(\mu_\ell, \sigma_\ell^2)$ em relação a ℓ -ésima variância tem-se

$$\frac{\partial S_1(\mu_\ell, \sigma_\ell^2)}{\partial \sigma_\ell^2} = -\frac{n_\ell}{2\sigma_\ell^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n_\ell} (X_{\ell j} - \mu_\ell)^2}{2(\sigma_\ell^2)^2}. \quad (2.17)$$

Igualando(2.17) a zero e após algumas modificações, substituindo $\hat{\mu}_\ell$ pelo estimador obtido anteriormente tem-se

$$\hat{\sigma}_\ell^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_\ell} (X_{\ell j} - \bar{X}_\ell.)^2}{n_\ell} \quad (2.18)$$

em que $\hat{\sigma}_\ell^2 = (n_\ell - 1)S_\ell^2/n_\ell$ é o estimador viesado da ℓ -ésima variância populacional.

Dessa forma, o máximo da função de verossimilhança irrestrita, sob H_1 , é dado por

$$\begin{aligned} L_1(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2) &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^q [(\hat{\sigma}_i^2)^{-n_i/2}] \exp \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{-(X_{ij} - \bar{X}_i.)^2}{2\hat{\sigma}_i^2} \right] \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^q [(\hat{\sigma}_i^2)^{-n_i/2}] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^q \left[\frac{1}{2\hat{\sigma}_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i.)^2 \right] \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^q [(\hat{\sigma}_i^2)^{-n_i/2}] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^q \left[\frac{n_i \hat{\sigma}_i^2}{2\hat{\sigma}_i^2} \right] \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^q [(\hat{\sigma}_i^2)^{-n_i/2}] \exp \left\{ \frac{-n}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considerando a hipótese H_0 e procedendo-se da mesma forma anterior, a verossimilhança é

$$\begin{aligned} L_0(\mu_i, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{n_i} f(X_{ij}) = \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[\frac{-(X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A função suporte é dada por

$$S_0(\mu_i, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}. \quad (2.21)$$

Derivando a função suporte em relação a μ_ℓ , igualando a zero e resolvendo as equações para todos os valores de $\ell = 1, 2, \dots, q$ tem-se

$$\hat{\mu}_\ell = \frac{\sum_{j=1}^{n_\ell} X_{\ell j}}{n_\ell} = \frac{X_{\ell.}}{n_\ell} = \bar{X}_\ell. \quad (2.22)$$

A solução obtida é idêntica à do sistema irrestrito H_1 .

Derivando a função suporte em relação à variância comum tem-se

$$\frac{\partial S_0(\mu_\ell, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{\ell=1}^q \sum_{j=1}^{n_\ell} (X_{\ell j} - \mu_\ell)^2}{2(\sigma^2)^2}. \quad (2.23)$$

Igualando a expressão a zero e substituindo o estimador de μ_ℓ , após algumas simplificações, obtém-se

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^q (n_i \hat{\sigma}_i^2)}{n}. \quad (2.24)$$

Assim, o máximo da função de verossimilhança restrita, sob H_0 , é dado por

$$\begin{aligned}
 L_0(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}^2) &= (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{2\hat{\sigma}^2} \right\} \\
 &= (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n\hat{\sigma}^2}{2\hat{\sigma}^2} \right\} \\
 &= (2\pi)^{-n/2} (\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}. \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

A estatística do teste da razão de verossimilhanças (LRT) é dada por

$$\Lambda = \frac{L_0(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}^2)}{L_1(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2)} = \frac{(\hat{\sigma}^2)^{-n/2}}{\prod_{i=1}^q [(\hat{\sigma}_i^2)^{-n_i/2}]} = \frac{\prod_{i=1}^q [(\hat{\sigma}_i^2)^{n_i/2}]}{(\hat{\sigma}^2)^{n/2}}. \tag{2.26}$$

Sob H_0 , $-2\ln(\Lambda)$ tem distribuição assintótica qui-quadrado com ν graus de liberdade (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Sob H_1 têm-se q médias e q variâncias e sob H_0 , q médias e 1 variância comum. Assim, os graus de liberdade são dados pela diferença $\nu = q + q - q - 1 = q - 1$. Dessa forma,

$$\chi_c^2 = n \ln(\hat{\sigma}^2) - \sum_{i=1}^q [n_i \ln(\hat{\sigma}_i^2)] \tag{2.27}$$

tem distribuição assintótica de qui-quadrado com $\nu = q - 1$ graus de liberdade, sob H_0 . Segundo Ferreira (2009), a expressão (2.27) pode ser modificada para se ter uma melhor aproximação assintótica. Essa aproximação é devida a Bartlett (1937), que além de uma correção substituiu os valores de n pelos graus de liberdade $n - q$, n_i pelos graus de liberdade $\nu_i = n_i - 1$, os estimadores viesados da variância de

cada população e o estimador comum de todas as populações pelos estimadores não viesados S_i^2 e $S_p^2 = \sum_{i=1}^n (v_i S_i^2) / (n - q)$, respectivamente, em que $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1)$.

Logo, a estatística de Bartlett (1937) para o teste da hipótese (2.12) é

$$\chi_c^2 = \frac{(n - q) \ln(S_p^2) - \sum_{i=1}^q [(n_i - 1) \ln(S_i^2)]}{1 + \frac{1}{3(q - 1)} \left[\sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) - \frac{1}{n - q} \right]} \quad (2.28)$$

que sob H_0 tem distribuição assintótica de qui-quadrado com $\nu = q - 1$ graus de liberdade.

Quando $q = 2$ a comparação envolve apenas duas populações ($H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$), assim é possível mostrar que a distribuição de Λ está relacionada com a distribuição F sob normalidade e sob H_0 verdadeira, apesar de ser muito difícil de ser determinada de forma exata (MOOD, 1965). O teste F é utilizado, em geral, para realizar o teste dessa hipótese. A estatística do teste F é dada por

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \quad (2.29)$$

A estatística (2.29) sob a hipótese nula de igualdade das variâncias das duas populações amostradas tem distribuição F com $\nu_1 = n_1 - 1$ e $\nu_2 = n_2 - 1$ graus de liberdade. O teste F bilateral, em geral, é utilizado colocando a maior variância estimada no numerador. Com isso, obtêm-se apenas valores de $F_c \geq 1$. Logo, o valor- p é dado por $2P(F \geq F_c)$, em que $P(F \geq F_c)$ é obtida da distribuição F com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, especificados de acordo com o numerador e o denominador adotados para calcular (2.29). De acordo com Ferreira (2009), o teste de Bartlett (1937), mostrado em (2.28), é muito influenciado pela não normalidade

dos dados amostrais. Assim, recomenda-se o teste F , que também é influenciado pela não normalidade dos dados amostrais, porém mais robusto que o primeiro. Devem ser preferidas alternativas melhores, como as dos métodos de computação intensiva (ZAR, 1996 apud FERREIRA, 2009).

Pelo fato de os testes Bartlett (1937) e F ($q = 2$) serem influenciados pela não-normalidade das populações amostradas, sendo afetados no controle das taxas de erro tipo I e no poder, algumas alternativas são apresentadas a seguir. Uma outra alternativa geral de *bootstrap* para todos os testes desta seção foi apresentada, de acordo com a proposta de (LIM; LOH, 1996 apud FERREIRA, 2009). O primeiro desses métodos considera uma modificação do teste de Bartlett, sendo proposto por (BOOS; BROWNIE, 1989). O estimador do coeficiente de curtose (b_2) é considerado nessa modificação, no contexto do modelo adotado para os dados das q populações. O teste de Bartlett se aproxima em distribuição de $(\beta_2 - 1)\chi_{q-1}^2/2$ sob H_0 , sob condições fracas de regularidade, em que $E(X)$ é a esperança matemática de X e $\beta_2 = E(X - \mu)^4/\sigma^4$ é o coeficiente de curtose da população amostrada (FERREIRA, 2009). O estimador de curtose para q populações é dado por

$$b_2 = \frac{n \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^4}{\left[\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right]^2}. \quad (2.30)$$

Portanto, a estatística do teste que é dada por

$$\chi_{c1}^2 = \frac{2\chi_c^2}{b_2 - 1} \quad (2.31)$$

segue assintoticamente a distribuição de qui-quadrado com $\nu = q - 1$ graus de liberdade sob H_0 , sendo χ_c^2 calculado na expressão (2.28). Se b_2 for inferior ou

igual a 1, o valor- p do teste deve ser considerado igual a 1 (FERREIRA, 2009). Uma segunda derivação desse teste é dada por Box e Andersen (1955), os quais consideram que a estatística

$$\chi_{c2}^2 = \frac{2}{b_2 - 1} \left\{ (n - q) \ln(S_p^2) - \sum_{i=1}^q [(n_i - 1) \ln(S_i^2)] \right\}, \quad (2.32)$$

sob H_0 , segue assintoticamente a distribuição de qui-quadrado, com $\nu = q - 1$ graus de liberdade. Se $b_2 \leq 1$, os valores de χ_{c2}^2 , como no caso de χ_{c1}^2 , são considerados nulos e o valor- p é igual a 1 (FERREIRA, 2009).

O teste de Levene (1960) é outro teste considerado robusto, com bom controle das taxas de erro tipo I e do poder. A versão que será apresentada neste trabalho é a considerada por Brown e Forsythe (1974 apud FERREIRA, 2009). Seja $\tilde{X}_i = m_{di}$ a mediana amostral da i -ésima população e sejam $Z_{ij} = |X_{ij} - \tilde{X}_i|$ valores que irão substituir os valores iniciais. O uso da mediana na obtenção dos desvios foi proposta por Brown e Forsythe (1974) e o teste obtido é conhecido por teste de Brown e Forsythe. Na sua proposta, Levene (1960) considerou os desvios em relação à média aritmética $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$, e os valores $Z_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$. O teste de Levene é baseado na análise de variância de um fator e, portanto, na estatística F . Podem-se consultar as bibliografias como Banzatto e Kronka (2013), Gomes (2000) e Steel e Torrie (1996) para mais detalhes da análise. A estatística do teste é dada por

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^q n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z}_{..})^2 / (q - 1)}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2 / (n - q)}, \quad (2.33)$$

em que

$$\bar{Z}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}}{n_i} \quad \text{e} \quad \bar{Z}_{i..} = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}}{n}.$$

A hipótese nula é rejeitada quando F_c da expressão (2.33) excede o quantil superior 100 $\alpha\%$ da distribuição F , com $\nu_1 = q - 1$ e $\nu_2 = n - q$ graus de liberdade.

A seguir serão apresentados dois outros testes que são baseados nos procedimentos de Jackknife. Os procedimentos de Jackknife são aqueles em que uma observação é eliminada da amostra original e, em seguida, o estimador de interesse é aplicado na amostra remanescente. Com a eliminação de uma observação por vez, para todas as observações amostrais são obtidas tantas estimativas quanto for o tamanho da amostra. Essas estimativas são denominadas de pseudovalores (MANLY, 1997 apud FERREIRA, 2009).

Para testar a igualdade de q variâncias, Layard (1973 apud FERREIRA, 2009) generalizou o procedimento de Jackknife de Miller (1968) para duas amostras ($q = 2$). O teste proposto é baseado em uma análise de variância de um fator, semelhante do procedimento de Levene (1960), porém baseado em pseudovalores, que, por sua vez, são funções dos logaritmos neperianos de S_i^2 . Seja U_{ij} o pseudovalor definido por

$$U_{ij} = n_i \ln(S_i^2) - (n_i - 1) \ln(S_{i(j)}^2) \quad (2.34)$$

em que $S_{i(j)}^2$ é o estimador da variância da i -ésima população, obtido após eliminar

a j -ésima observação, para $i = 1, 2, \dots, q$ e $j = 1, 2, \dots, n_i$. Portanto,

$$S_{i(j)}^2 = \frac{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n_i} (X_{i\ell} - \bar{X}_{i(j)})^2}{n_i - 2} \quad (2.35)$$

que pode ser dado equivalentemente por

$$S_{i(j)}^2 = \frac{1}{n_i - 2} \left[\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n_i} X_{i\ell}^2 - \frac{\left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n_i} X_{i\ell} \right)^2}{n_i - 1} \right] \quad (2.36)$$

em que

$$\bar{X}_{i(j)} = \frac{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n_i} X_{i\ell}}{n_i - 1}. \quad (2.37)$$

Portanto, a estatística do teste de Layard (1973 apud FERREIRA, 2009) para a hipótese de homogeneidade de variâncias é dado como

$$F_{c1} = \frac{\sum_{i=1}^q n_i (\bar{U}_i - \bar{U}_{..})^2 / (q - 1)}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij} - \bar{U}_i)^2 / (n - q)} \quad (2.38)$$

em que

$$\bar{U}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}}{n_i} \quad \text{e} \quad \bar{U}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}}{n}.$$

A hipótese nula deve ser rejeitada se F_{c1} exceder o quantil superior $100\alpha\%$ da distribuição F com $\nu_1 = q - 1$ e $\nu_2 = n - q$ graus de liberdade.

A outra alternativa é devida a O'Brien (1978, 1979) apud Ferreira (2009). Os pseudovalores U_{ij} da estatística (2.38) são substituídos por outros pseudovalores (q_{ij}), aos quais não se aplica o logaritmo neperiano. Esses pseudovalores são dados por

$$q_{ij} = \frac{[n_i (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 - S_i^2]}{n_i - 2}. \quad (2.39)$$

A estatística do teste F_{c2} é obtida pela substituição de U_{ij} por q_{ij} na expressão (2.38). Os valores críticos são os mesmos dos obtidos para F_{c1} .

Segundo Ferreira (2009) podem ser obtidas versões de *bootstrap* de todos esses testes. A justificativa para isso é fundamentada no fato de a distribuição de cada estatística ser apenas aproximada. A seguir será feita a descrição do método de *bootstrap* apresentada por Ferreira (2009), baseada nos procedimentos de Boos e Brownie (1989) e de Lim e Loh (1996).

Considerar que as estatísticas χ_c^2 , χ_{c1}^2 , χ_{c2}^2 , F_c , F_{c1} e F_{c2} são representadas genericamente por T. O método de *bootstrap* pode ser descrito da seguinte forma:

- a) Calcular a estatística T dos dados originais observados.
- b) Iniciar $R = 0$ (R irá contar o número de amostras de *bootstrap* em que T da amostra original é superior ao valor dessa estatística de *bootstrap*).
- c) Calcular os resíduos $e_{ij} = X_{ij} - \bar{\mu}_{A,i}$, $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, sendo $\bar{\mu}_{A,i}$

o estimador da média aparada fracionada da população i , cuja definição é apresentada posteriormente.

d) Retirar n observações e_{ij}^* com reposição do conjunto formado pela amostra combinada dos resíduos obtidos no passo (c) para todas as q populações.

e) Se $n_i < 10$ para pelo menos uma amostra, suavizar a amostra de resíduos de *bootstrap* fazendo:

$$X_{ij}^* = \left(\frac{12}{13}\right)^{1/2} (e_{ij}^* + \gamma U),$$

$$\text{em que } \gamma^2 = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n} \quad \text{e} \quad U \sim \text{Uniforme}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Se $n_i \geq 10$ para todo $i = 1, 2, \dots, q$, então $X_{ij}^* = e_{ij}^*$.

f) Calcular a realização de *bootstrap* da estatística considerada T^* a partir da amostra de *bootstrap* X_{ij}^* . Se $T^* > T$, aumentar R para $R+1$.

g) Repetir os passos (d), (e) e (f) num total de B vezes (em geral $B \geq 1000$).

h) O valor- p de *bootstrap* é dado por R/B . A hipótese nula deve ser rejeitada se R/B for menor que o valor nominal de significância adotado (α).

No passo (e) sugere-se a suavização dos resíduos de *bootstrap*, para evitar amostras com variâncias nulas. A média aparada fracionada é computada utilizando 20% de corte em cada extremo da amostra ordenada. Assim, a amostra efetiva é equivalente a 60% do tamanho original. Se a porcentagem de 60% resultar em um número inteiro, a média aparada fracionada é igual à média dos valores intermediários remanescentes. Se, por outro lado, o valor resultar em um número não inteiro do tipo g,d ; em que g é a parte inteira e d , a parte decimal, o valor da parte decimal deve ser considerado na estimativa da média aparada fracionada. Dessa forma, $d/2$ é a fração que deve ser usada para ponderar as observações à es-

querda e à direita dos 60% intermediários, parte g inteira. Para ilustrar, se $n = 25$ e 20% de aparo de cada lado forem considerados, as três observações centrais devem ser utilizadas para calcular a média, ou seja, $[X_{(2)}+X_{(3)}+X_{(4)}]/3$; se $n = 4$, 60% resultam em 2,4 observações, ou seja, em $g = 2$ e $d = 0,4$. A média aparada fracionada deve tomar a média ponderada das $g = 2$ observações intermediárias $X_{(2)}$ e $X_{(3)}$ com peso 1 para cada observação e das observações imediatamente anterior a $X_{(2)}$ e posterior a $X_{(3)}$ com peso $d/2 = 0,2$. Logo a média aparada fracionada é dada por $[0,2X_{(1)}+X_{(2)}+X_{(3)}+0,2X_{(4)}]/2,4$ (FERREIRA, 2009).

O procedimento de Levene (1960) na versão *bootstrap* foi considerado por Lim e Loh (1996) o melhor método, mostrando-se robusto na violação de normalidade, com controle da taxa de erro tipo I e maior poder (FERREIRA, 2009).

2.4 Teste de comparação de variâncias para amostras dependentes

É comum fazer a comparação de variáveis correlacionadas (amostras emparelhadas) em várias situações e em particular em estudos com dados longitudinais. Existem dois métodos que podem ser apresentados para o caso normal. O primeiro deve-se a Morgan (1939) e a Pitman (1939) e o segundo baseia-se em um teste de razão de verossimilhanças, que pode ser estendido para k populações emparelhadas. Sejam X_1 e X_2 variáveis normais que seguem o modelo bivariado dado por

$$f(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1} [\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)]^{-1/2} \times \exp \left\{ \frac{-1}{2(1 - \rho_{12}^2)} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho_{12} \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2} \sqrt{\sigma_2^2}} \right] \right\}. \quad (2.40)$$

Se $\rho_{12} = 0$, então, as populações 1 e 2 são independentes, $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$

e a estatística do teste apropriada para a hipótese

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad (2.41)$$

é dada por

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (2.42)$$

a qual segue uma distribuição F, sob H_0 , com $\nu_1 = n - 1$ e $\nu_2 = n - 1$ graus de liberdade.

Ferreira (2009) apresentou o teste de Morgan (1939) e Pitman (1939) quando $\rho_{12} \neq 0$, definindo U e V por $U = (X_1 + X_2)/2$ e $V = (X_1 - X_2)/2$. A ideia é obter o coeficiente de correlação entre U e V (ρ_{UV}) e aplicar um teste para a hipótese $H_0 : \rho_{UV} = 0$. Testar essa hipótese é equivalente a testar a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. O coeficiente de correlação entre U e V ρ_{UV} é definido em função da covariância σ_{UV} e das variâncias σ_U^2 e σ_V^2 por

$$\rho_{UV} = \frac{\sigma_{UV}}{\sqrt{\sigma_U^2 \sigma_V^2}}.$$

Mas,

$$\sigma_{UV} = E(UV) - E(U)E(V),$$

sendo:

$$E(UV) = E\left[\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)\right] = E\left(\frac{X_1^2 - X_2^2}{4}\right) = \frac{1}{4} [E(X_1^2) - E(X_2^2)]$$

$$E(U) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2} [E(X_1) + E(X_2)]$$

e

$$E(V) = E\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right) = \frac{1}{2} [E(X_1) - E(X_2)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{UV} &= E(UV) - E(U)E(V) \\ &= \frac{1}{4} [E(X_1^2) - E(X_2^2)] - \frac{1}{4} [E(X_1) + E(X_2)][E(X_1) - E(X_2)] \\ \sigma_{UV} &= \frac{1}{4} [E(X_1^2) - E(X_2^2)] - \frac{1}{4} [E^2(X_1) - E^2(X_2)] = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2). \end{aligned}$$

As variâncias de U e V são dadas por

$$\sigma_U^2 = E(U^2) - E^2(U) = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12})$$

e

$$\sigma_V^2 = E(V^2) - E^2(V) = \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}).$$

Logo,

$$\rho_{UV} = \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}}.$$

Como σ_U^2 e σ_V^2 são por definição positivas, então, $\rho_{UV} = 0$ se e somente se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Dessa forma, testar a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ equivale a testar $H_0 :$

$\rho_{UV} = 0$. Posteriormente, Ferreira (2009) mostrou como obter o estimador de ρ_{UV} ($r_2 = \hat{\rho}_{UV}$) e como expressar a equação resultante em função de F da equação (2.42) e do estimador r_1 de ρ_{12} . Sejam os estimadores de ρ_{UV} e de ρ_{12} definidos por

$$\hat{\rho}_{UV} = r_2 = \frac{S_1^2 - S_2^2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_{12}} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_{12}}} \quad (2.43)$$

e

$$\hat{\rho}_{12} = r_1 = \frac{S_{12}}{\sqrt{S_1^2} \sqrt{S_2^2}}. \quad (2.44)$$

Dividindo-se ambos os termos, numerador e denominador de (2.43) por S_2^2 , tem-se

$$r_2 = \frac{S_1^2/S_2^2 - 1}{\sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} + 1 + 2\frac{S_{12}}{S_2^2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{S_2^2} + 1 - 2\frac{S_{12}}{S_2^2}}} = \frac{F - 1}{\sqrt{\left(F + 1 + 2\frac{S_{12}}{S_2^2}\right)\left(F + 1 - 2\frac{S_{12}}{S_2^2}\right)}}$$

$$r_2 = \frac{F - 1}{\sqrt{(F + 1)^2 - 4\left(\frac{S_{12}}{S_2^2}\right)^2}}.$$

Multiplicando, no denominador da expressão resultante, a segunda parcela por S_1^2/S_1^2 , o resultado é dado como

$$r_2 = \frac{F - 1}{\sqrt{(F + 1)^2 - 4\left(\frac{S_{12}}{S_2^2}\right)^2} \times \frac{S_1^2}{S_1^2}} = \frac{F - 1}{\sqrt{(F + 1)^2 - 4\frac{(S_{12})^2}{S_2^2 S_1^2}} \times \frac{S_1^2}{S_2^2}} = \frac{F - 1}{\sqrt{(F + 1)^2 - 4r_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2}}}$$

Assim,

$$r_2 = \frac{F - 1}{\sqrt{(F + 1)^2 - 4r_1^2 F}}. \quad (2.45)$$

Com esse estimador expresso em função de F dado por (2.42) e de r_1 dado por (2.44) pode-se aplicar um teste exato t de *Student*. Seja um estimador r de uma correlação ρ em uma amostra aleatória, de tamanho n , obtida de uma população normal bivariada. A estatística para o teste da hipótese $H_0 : \rho = 0$ é dada por

$$t_c = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{(v)} \quad (2.46)$$

com $v = n - 2$ graus de liberdade.

Substituindo em (2.46) o valor de r por r_2 obtém-se

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{(F-1)\sqrt{n-2}}{\sqrt{(F+1)^2 - 4r_1^2 F}} \times \left[1 - \frac{(F-1)^2}{(F+1)^2 - 4r_1^2 F} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{F-1}{[(F+1)^2 - 4r_1^2 F]^{1/2}} \times \frac{[(F+1)^2 - 4r_1^2 F]^{1/2}}{[(F+1)^2 - 4r_1^2 F - (F-1)^2]^{1/2}} \\ &= \frac{(F-1)\sqrt{n-2}}{[(F+1)^2 - 4r_1^2 F - (F-1)^2]^{1/2}} = \frac{(F-1)\sqrt{n-2}}{[4F - 4r_1^2 F]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Logo, a estatística

$$t_c = \frac{(F-1)\sqrt{n-2}}{2\sqrt{F(1-r_1^2)}} \quad (2.47)$$

é usada para testar a hipótese $H_0 : \rho_{UV} = 0$, que equivale a testar a hipótese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Assim, se $|t_c| \geq t_{\alpha/2, v=n-2}$ deve-se rejeitar H_0 no nível nominal de significância α .

A segunda alternativa é um teste aproximado baseado no teste da razão de verossimilhanças. Esse teste pode ser estendido para verificar a igualdade de q variâncias de populações emparelhadas (FERREIRA, 2009). Utilizando uma amostra aleatória de n pares e o modelo bivariado normal ($q = 2$) apresentado em (2.40), a função de verossimilhança é dada por

$$L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_{12}) = (2\pi)^{-n} [\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)]^{-n/2} \times \quad (2.48)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_{12}^2)} \sum_{j=1}^n \left[\frac{(x_{1,j} - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_{2,j} - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho_{12} \frac{(x_{1,j} - \mu_1)(x_{2,j} - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2} \sqrt{\sigma_2^2}} \right] \right\}.$$

O máximo da função de verossimilhança sem nenhuma restrição é obtido quando os seguintes estimadores são utilizados

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \bar{X}_1, \quad \hat{\mu}_2 = \bar{X}_2, \\ \hat{\sigma}_1^2 &= (n-1)S_1^2/n, \\ \hat{\sigma}_2^2 &= (n-1)S_2^2/n, \\ \hat{\sigma}_{12} &= (n-1)S_{12}/n \\ &\text{e} \\ \hat{\rho}_{12} &= \hat{\sigma}_{12} / \sqrt{\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2}. \end{aligned}$$

O estimador $\hat{\rho}_{12}$ de máxima verossimilhança é equivalente ao estimador (2.44). Portanto, o máximo da função de verossimilhança é dado como

$$L_{\max} = (2\pi)^{-n} [\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 (1 - \hat{\rho}_{12}^2)]^{-n/2} \exp\{-n\}. \quad (2.49)$$

Sob a hipótese nula de variâncias iguais, a função de verossimilhança é dada

por

$$L_0(\mu_1, \mu_2, \sigma^2, \rho) = (2\pi)^{-n} [(\sigma^2)^2 (1 - \rho)]^{-n/2} \times \quad (2.50)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho)^2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{(x_{1j} - \mu_1)^2}{\sigma^2} + \frac{(x_{2j} - \mu_2)^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{(x_{1j} - \mu_1)(x_{2j} - \mu_2)}{\sigma^2} \right] \right\}.$$

O símbolo ρ é usado para a correlação entre X_1 e X_2 , para diferenciar os parâmetros dos modelos, irrestrito e restrito sob H_0 . Toma-se o logaritmo de L_0 , função suporte, deriva-se com relação a cada parâmetro, igualam-se as derivadas a zero e resolve-se o sistema de equações resultante, para obter os estimadores dos parâmetros do modelo. Os estimadores das duas médias são exatamente os mesmos do modelo não restrito e o estimador da variância comum das populações é dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2}{2}. \quad (2.51)$$

O estimador da correlação entre as variáveis X_1 e X_2 é dado por

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}^2}. \quad (2.52)$$

O máximo da função de verossimilhança sob a hipótese nula é dado por

$$L_{0,\max} = (2\pi)^{-n} [(\hat{\sigma}^2)^2 (1 - \hat{\rho}^2)]^{-n/2} \exp\{-n\}. \quad (2.53)$$

A estatística do teste da razão de verossimilhanças (LRT) é dada por

$$\Lambda = \frac{L_{0,\max}}{L_{\max}} = \frac{[(\hat{\sigma}^2)^2 (1 - \hat{\rho}^2)]^{-n/2}}{[\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 (1 - \hat{\rho}_{12}^2)]^{-n/2}} = \frac{[\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 (1 - \hat{\rho}_{12}^2)]^{n/2}}{[(\hat{\sigma}^2)^2 (1 - \hat{\rho}^2)]^{n/2}}. \quad (2.54)$$

A aproximação assintótica de $-2\ln(\Lambda)$ é dada pela distribuição quiquadrado com ν graus de liberdade (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Como sob H_1 têm-se $q = 2$ médias, $q = 2$ variâncias e $q(q - 1)/2$ correlações e sob H_0 , $q = 2$ médias, 1 variância comum e $q(q - 1)/2$ correlações, os graus de liberdade são dados por $\nu = q + q + q(q - 1)/2 - q - q(q - 1)/2 - 1 = q - 1 = 1$ (FERREIRA, 2009). Esse mesmo resultado foi encontrado por Morgan (1939) e por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999). Portanto, a estatística

$$\chi_c^2 = n \left[2\ln(\hat{\sigma}^2) + \ln(1 - \hat{\sigma}^2) - \sum_{i=1}^2 \ln(\hat{\sigma}_i^2) - \ln(1 - \hat{\rho}_{12}^2) \right] \quad (2.55)$$

tem distribuição assintótica quiquadrado com $\nu=1$ grau de liberdade, sob H_0 . A expressão (2.55) pode ser modificada para se ter uma melhor aproximação assintótica. A aproximação de Bartlett (1937) foi avaliada por simulação Monte Carlo e verificou-se que o teste assim corrigido apresentou melhor desempenho. Logo, a estatística corrigida do teste ($q = 2$) é

$$\chi_c^2 = n[1 - (2k + 11)/(6n)] \left[2\ln(\hat{\sigma}^2) + \ln(1 - \hat{\sigma}^2) - \sum_{i=1}^2 \ln(\hat{\sigma}_i^2) - \ln(1 - \hat{\rho}_{12}^2) \right]. \quad (2.56)$$

2.5 Teste de comparação de matrizes de covariâncias na presença de correlação

O problema de testar a igualdade das matrizes de covariâncias de vetores aleatórios dependentes é de interesse de diversas áreas, como ciências biológicas, físicas, entre outras.

Pode-se observar em Jiang e Sarkar (1998) um exemplo de um estudo de biodisponibilidade/bioequivalência de duas formulações de um composto químico com

mais de uma das estimativas dos parâmetros da farmacocinética, especificando a biodisponibilidade de cada formulação, tais como a área sob a curva de concentração plasmática-tempo (AUC) e a concentração plasmática máxima (C_{\max}), que estão envolvidos. A consideração de segurança é tão importante quanto a eficácia na avaliação de bioequivalência conjunta em termos destas medidas de biodisponibilidade. Segundo Chow e Liu (1992), testar a igualdade das matrizes de covariâncias de medidas de biodisponibilidade para as duas formulações tornou-se uma preocupação importante. Por outro lado, se o estudo é realizado em um delineamento, tal como o delineamento cruzado, as respostas para as duas formulações tornam-se correlacionadas.

Jiang e Sarkar (1998) esboçaram o problema supondo \mathbf{X} um vetor aleatório, composto de q grupos de p variáveis aleatórias cada, isto é, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_q^\top)^\top$, em que $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})^\top$, $i = 1, \dots, q$. Suponha ainda que \mathbf{X} tem distribuição normal $N_{pq}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ com vetor de média $\boldsymbol{\mu}$ desconhecido e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ particionada como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{1q} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{q1} & \boldsymbol{\Sigma}_{q2} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{qq} \end{bmatrix},$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$ é uma matriz ($p \times p$) para $i, j = 1, \dots, q$. O objetivo é testar a hipótese $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_{qq}$ contra a hipótese alternativa de que pelo menos uma das igualdades não se sustenta.

A origem da metodologia estatística sobre a igualdade das variâncias de variáveis aleatórias correlacionadas aconteceu na parte final dos anos 1930, quando Finney (1938) considerou uma população normal bivariada com correlação conhe-

cida e desenvolveu um teste para a igualdade das variâncias com base na estatística F de Fisher. Mais tarde, Morgan (1939) e Pitman (1939) de forma independente e quase simultaneamente trataram este problema com correlação desconhecida e propuseram o teste da razão de verossimilhanças e também uniformemente mais poderoso não-viesado (LEHMANN, 1986, p. 268).

Cornell (1991), Grambsch (1994), McCulloch (1985) e Sandvik e Olsson (1982) propuseram alguns testes livres de distribuições assintóticas neste contexto (JIANG; SARKAR, 1998). Os testes para a homogeneidade das variâncias de três ou mais variáveis aleatórias normais correlacionadas (ou seja, $p = 1$ e $q \geq 3$) foram sugeridos por Choi e Wette (1972) e Han (1968), sob a hipótese de igualdade das correlações emparelhadas ou das covariâncias, e por Cohen (1986), Harris (1985), Levy (1976), Modarres (1993) e Wilcox (1989) sem essas hipóteses restritivas sobre as correlações.

Enquanto Roy e Potthoff (1958) foram os primeiros a tentar resolver este problema para $p \geq 2$ e $q = 2$, o teste proposto é, contudo, inválido por ter uma falha nos argumentos que levam ao seu desenvolvimento (JIANG; SARKAR, 1998). Eles erroneamente alegaram que X_1 e X_2 podem ser linearmente transformados em um outro par de vetores aleatórios que se tornam independentes se e somente se $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$. A redução do problema original para testar a independência de alguns outros vetores aleatórios só é possível quando Σ_{12} é simétrica (JIANG; SARKAR, 1998). Sob tal suposição, Krishnaiah (1975) sugeriu um teste estendendo a ideia de Han (1968), apesar de Seber (1984) erroneamente referir que o teste de Krishnaiah pode ser aplicável a uma situação geral que não requer nenhuma suposição fora da diagonal da matriz de covariâncias (JIANG; SARKAR, 1998).

Smith e Kshirsagar (1985) se aproximaram do problema de testar $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ usando o método da razão de verossimilhanças, mas a implementação do teste é

extremamente difícil por não ter nenhuma expressão analítica explícita do estimador de máxima verossimilhança da matriz de covariâncias, sob a hipótese nula (JIANG; SARKAR, 1998). Smith e Kshirsagar (1985) usaram a sub-rotina ZX-POWL do FORTRAN, da biblioteca IMSL, para resolver o problema de maximização para o caso de duas normais bivariadas correlacionadas (JIANG; SARKAR, 1998).

2.6 Teste da razão de verossimilhanças

Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) consideraram o problema de testar a homogeneidade das matrizes de covariâncias de várias normais multivariadas dependentes, sem quaisquer suposições restritivas fora da diagonal principal das matrizes de covariâncias, e propuseram um teste da razão de verossimilhanças (LRT) com suas versões modificadas por meio de um eficiente esquema iterativo para encontrar o MLE (Estimador de Máxima Verossimilhança) da matriz de covariâncias. Foi considerada por eles uma amostra de tamanho n de uma população normal pq -variada ($p \geq 1$ e $q \geq 2$) com vetor $\boldsymbol{\mu}$ desconhecido e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$, e a l -ésima observação da variável \mathbf{X} é denotada por $\mathbf{X}_l = (\mathbf{X}_{l1}^\top, \mathbf{X}_{l2}^\top, \dots, \mathbf{X}_{lq}^\top)^\top$, $l = 1, \dots, n$, então, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ é uma matriz $n \times pq$ com n observações em \mathbf{X} . O interesse é testar a hipótese $H_0 : \Sigma_{11} = \dots = \Sigma_{qq}$, contra a hipótese alternativa de que pelo menos um par delas difere entre si, com base nesta amostra aleatória da população. A função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-n pq/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \{ \mathbf{X} - E(\mathbf{X}) \} \{ \mathbf{X} - E(\mathbf{X}) \}^\top \right], \quad (2.57)$$

em que $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}_n^\top$ é a esperança de \mathbf{X} com $\mathbf{1}_n$ sendo um vetor coluna $n \times 1$ de elementos unitários (JIANG; SARKAR; HSUAN, 1999). No espaço paramétrico irrestrito Ω , o máximo da função de verossimilhança L na equação (2.57) ocorre

quando $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ são definidos pelos MLEs,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\Omega} = \bar{\mathbf{X}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\Omega} = \mathbf{C},$$

respectivamente, em que

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbf{X}_l, \quad \mathbf{C} = (c_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (\mathbf{X}_l - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_l - \bar{\mathbf{X}})^{\top}.$$

Portanto, o máximo da função de verossimilhança L na equação (2.57) é dado por

$$\max_{\Omega} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-npq/2} |\mathbf{C}|^{-N/2} \exp\left\{-\frac{npq}{2}\right\}.$$

O estimador $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\omega}$ de $\boldsymbol{\mu}$ no espaço paramétrico restrito ω , é o mesmo do $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\Omega}$, mas o de $\boldsymbol{\Sigma}$, isto é $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\omega}$ não tem expressão analítica explícita e só pode ser resolvida numericamente, exceto quando $\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}$ quando $i \neq j = 1, \dots, q$. A última condição é bastante restritiva. Por exemplo, quando $p = q = 2$, esta condição implica que $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}$, ou seja, $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ é simétrica. Note que, neste caso, $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}$, e a hipótese nula H_0 é equivalente à hipótese de independência dos vetores de variáveis transformadas linearmente $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ (KRISHNAIAH, 1975).

Observe que, no espaço paramétrico restrito, a matriz de covariâncias é uma combinação linear de matrizes de dados, isto é,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{\omega}) &= \sum_k \sigma_{kk} \mathbf{I}_q \otimes \mathbf{G}_{kk} + \sum_{k < l} \sigma_{kl} \mathbf{I}_q \otimes (\mathbf{G}_{kl} + \mathbf{G}_{kl}^{\top}) \\ &+ \sum_{i < j} \sum_{k, l} \sigma_{(i-1)p+k, (j-1)p+l} (\mathbf{F}_{ij} \otimes \mathbf{G}_{kl} + \mathbf{F}_{ij}^{\top} \otimes \mathbf{G}_{kl}^{\top}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que σ_ω é um vetor $\{pq(q-1) + p + 1\}p/2 \times 1$ de elementos desconhecidos de Σ , I_q é uma matriz identidade $q \times q$, G_{kl} denota a matriz $p \times p$ com $(G_{kl})_{kl} = 1$ e todos os outros elementos são zeros, F_{ij} denota a matriz $q \times q$ definida como em G_{kl} , e \otimes denota o produto de Kronecker.

Em comparação, no espaço paramétrico irrestrito, a matriz de covariâncias também é combinação linear de matrizes, isto é,

$$\Sigma(\sigma_\Omega) = \sum_m \sigma_{mm} E_{mm} + \sum_{m < n} \sigma_{mn} (E_{mn} + E_{mn}^\top), \quad (2.59)$$

em que σ_Ω é um vetor $pq(pq+1)/2 \times 1$ de elementos desconhecidos de Σ , e E_{mn} denota a matriz $pq \times pq$ definida como em G_{kl} .

Observe que as matrizes de covariâncias, tanto nos espaços paramétricos restritos como nos irrestritos, são formas especiais de uma matriz de covariâncias linearmente padronizada $\Sigma_{(r \times r)}$, como segue

$$\Sigma(\sigma) = \sum_{g=1}^m \sigma_g G_g, \quad (2.60)$$

em que G_1, \dots, G_m são matrizes linearmente independentes, conhecidas e simétricas, $g = 1, \dots, m$; $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^\top$ e, $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ são coeficientes desconhecidos. Supõe-se que há pelo menos um conjunto de coeficientes $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ de tal forma que a equação (2.60) é positiva definida.

Szatrowski (1978, 1980, 1985) mostrou que para uma matriz de covariâncias linearmente padronizada, $\Sigma(\sigma)$, o MLE de σ tem uma representação explícita, isto é, é um vetor de combinações lineares conhecidas de elementos da matriz de covariâncias amostrais, se e somente se Σ^{-1} tem a mesma dimensão de Σ . O MLE de σ tem uma representação explícita, que é o vetor da média dos elementos correspondentes de C .

A inversa da matriz de covariâncias irrestrita Σ da equação (2.59) tem a mesma dimensão da própria matriz de covariâncias. Uma representação explícita do MLE existe e é igual a C tal como esperado. No caso da matriz de covariâncias restrita Σ da equação (2.58), quando $\Sigma_{ij} = \Sigma_{12}$ para $i \neq j = 1, \dots, q$, Σ^{-1} tem a mesma dimensão de Σ , e o MLE de Σ , $\hat{\Sigma}_\omega$ é

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_\omega = & \frac{1}{q} \mathbf{I}_q \otimes \left(\sum_{i=1}^q C_{ii} - \frac{1}{q-1} \sum_{j=1(j \neq i)}^q \sum_{i=1}^q C_{ij} \right) \\ & + \frac{1}{q(q-1)} \mathbf{J}_q \otimes \sum_{j=1(j \neq i)}^q \sum_{i=1}^q C_{ij}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que \mathbf{J}_q é uma matriz $q \times q$ de elementos unitários; que não é o caso quando não existem tais restrições, em que a dimensão de Σ^{-1} é diferente da de Σ , por conseguinte, não existe nenhuma representação explícita do MLE de σ , e a solução numérica para o MLE de σ tem de ser encontrada.

Entre outros procedimentos de otimização não lineares, o método de Newton-Raphson, o método de scores e o algoritmo EM (Expectation - Maximization) são muitas vezes considerados em um problema de maximização (SEARLE; CASSELLA; MCCULLOCH, 1992).

Anderson (1969, 1970) considerou o uso do método de Newton-Raphson para encontrar o MLE de uma matriz de covariâncias linearmente padronizada. Embora o método de Newton-Raphson convirja muito rápido, ele é muito sensível para valores iniciais pequenos (ANDERSON, 1969, 1970). Em vista disto, Anderson (1973) sugeriu a utilização do método de score, uma vez que este é mais robusto para valores iniciais pequenos (JENNRICH; SAMPSON, 1976).

De acordo com Dempster, Laird e Rubin (1977) e Wu (1983), o algoritmo EM garante a convergência em condições relativamente irrestritas, mas pode ser aplicado para o problema de encontrar o MLE de uma matriz de covariâncias, so-

mente se essa matriz de covariâncias puder ser tomada como uma submatriz de uma matriz de covariâncias com dimensão maior, cujo MLE tem uma representação explícita, o que é muitas vezes difícil de construir (RUBIN; SZATROWSKI, 1982). Com base nos argumentos acima, Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) propuseram utilizar o método de score para encontrar o MLE de Σ no espaço paramétrico restrito. Anderson (1973) derivou a equação para encontrar o MLE de σ em (2.60) como segue, o qual corresponde com o método de score Szatrowski (1980),

$$\hat{\sigma} = (\mathbf{W}^\top \hat{\Psi}^{-1} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^\top \hat{\Psi}^{-1} \langle \mathbf{C} \rangle, \quad (2.62)$$

em que $\mathbf{W} = (\langle \mathbf{G}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{G}_m \rangle)$ é uma matriz com $\langle \mathbf{G}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{G}_m \rangle$ vetores colunas, $\hat{\Psi} = \Psi(\hat{\Sigma})$ e Ψ é uma matriz simétrica $\{r(r+1)/2\} \times \{r(r+1)/2\}$ com elementos $\Psi = \Psi(\Sigma) = (\psi_{ijkl}) = (\sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk})$, $i \leq j, k \leq l$. Szatrowski (1980) considerou uma matriz simétrica \mathbf{B} ($r \times r$) e definiu $\langle \mathbf{B} \rangle$ como sendo um vetor coluna consistindo da matriz simétrica triangular superior de elementos de $\mathbf{B}_{(r \times r)}$, isto é, $\langle \mathbf{B} \rangle = (b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}, b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1r}, b_{23}, \dots, b_{r-1,r})^\top$. A notação ψ_{ijkl} representa o elemento de ψ com a mesma posição do elemento b_{ij} na linha de $\langle \mathbf{B} \rangle$, em que \mathbf{B} é uma matriz simétrica e o elemento b_{kl} tem a mesma posição na coluna de $\langle \mathbf{B} \rangle^\top$. Pode-se observar que a equação (2.60) é equivalente para $\langle \Sigma \rangle = \mathbf{W}_\sigma$.

Segundo Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) a equação (2.62) sugere um método iterativo, em que a partir de uma estimativa inicial de Σ , $\hat{\Sigma}$, pode-se resolver as equações lineares em $\hat{\sigma}$ para produzir a próxima estimativa de $\hat{\Sigma}$. Para convergir com maior rapidez pode-se começar usando o método de score e mudar para o método de Newton-Raphson.

Szatrowski (1980) mostrou que se o MLE de σ (e, portanto, de Σ) tem uma representação explícita, que é dada por $\hat{\sigma}$ em (2.62), após uma iteração de qualquer valor inicial admissível $\hat{\Sigma}$, isto é, qualquer valor inicial $\hat{\Sigma} = \Sigma(\hat{\sigma})$ será positiva

definida. De acordo com Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) isso evita a dificuldade de dependência do MLE de Σ , no espaço paramétrico irrestrito, nos valores iniciais experimentados pelo algoritmo de direção do conjugado modificado usando uma sub-rotina ZXPOWL do FORTRAN da biblioteca IMSL (JIANG; SARKAR, 1998), como descrito por Smith (1975).

No espaço paramétrico restrito, o MLE de Σ , $\hat{\Sigma}_\omega$, pode ser resolvido numericamente por meio de cálculos iterativos usando a equação (2.62). Se $\hat{\Sigma}_\omega$ é encontrado, o máximo da função de verossimilhança L na equação (2.57) será dado por

$$\max_{\omega} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-npq/2} |\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2} \exp\left\{-\frac{npq}{2}\right\}.$$

Assim, o critério da razão de verossimilhanças é dado por

$$\lambda = \Lambda^{n/2} = \frac{\max_{\omega} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\max_{\Omega} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})} = \left(\frac{|C|}{|\hat{\Sigma}_\omega|}\right)^{n/2}. \quad (2.63)$$

Sob a hipótese nula,

$$\text{LRT} = -2 \log \lambda = -n \log \Lambda \quad (2.64)$$

é assintoticamente distribuída como $\chi^2_{p(p+1)(q-1)/2}$.

Quando $p = 1$ e $q = 2$, $\hat{\Sigma}_\omega$ pode ser obtido a partir da equação (2.61), e o

critério da razão de verossimilhanças na equação (2.63) reduz-se a

$$\lambda^{2/N} = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{c_{11}+c_{22}}{2} & c_{12} \\ c_{12} & \frac{c_{11}+c_{22}}{2} \end{vmatrix}},$$

o qual é equivalente ao teste de Pitman-Morgan (MORGAN, 1939).

O teste da razão de verossimilhanças na equação (2.64) pode ser modificado de várias maneiras, a fim de ser melhor aproximado pela distribuição quiquadrado para pequenas amostras. Uma abordagem consiste em utilizar os graus de liberdade $\nu = n - 1$ ao invés do tamanho da amostra n na equação (2.64) (ANDERSON, 1984; BARTLETT, 1937). A imposição dessa modificação na equação (2.64) implica em

$$\text{LRT}_1 = -\nu \log \Lambda.$$

Box (1949) mostrou que um fator de correção leva a um teste de razão de verossimilhanças que se aproxima mais da distribuição quiquadrado para pequenas amostras. Segundo Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), uma solução de forma fechada do fator de correção para testar H_0 não é acessível, mas está disponível em casos especiais. No caso de $\Sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j = 1, \dots, q$, Box derivou um fator de correção m_1 para o teste da razão de verossimilhanças modificado de Bartlett da seguinte forma

$$m_1 = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(q + 1)}{6q\nu(p + 1)}.$$

De acordo com Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), uma vez que m_1 varia entre 0 e

1 e se aproxima de 1 com o aumento de n , pode-se supor que a aproximação χ^2 melhora para LRT_1 , que produz

$$LRT_2 = -m_1 \nu \log \Lambda = - \left\{ \nu - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(q + 1)}{6q(p + 1)} \right\} \log \Lambda.$$

Outro caso especial é quando $\Sigma_{ij} = \Sigma_{12}$ para $i \neq j = 1, \dots, q$, em que Krishnaiah (1975) transformou o problema de testar H_0 para o de testar a independência de um vetor aleatório p -variado e um vetor aleatório $p(q-1)$, e um fator de correção m_2 foi também obtido por Box (1949) para o teste da razão de verossimilhanças, dado por

$$m_2 = 1 - \frac{pq + 1}{2\nu}.$$

Aplicando m_2 a LRT_1 pode-se também melhorar a aproximação χ^2 , que produz

$$LRT_3 = -m_2 \nu \log \Lambda = - \left(\nu - \frac{pq + 1}{2} \right) \log \Lambda.$$

Sob a hipótese nula, LRT_1 , LRT_2 e LRT_3 seguem assintoticamente a mesma distribuição como LRT.

Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) mostraram que o poder do teste aproximado e o tamanho da amostra podem ser calculados por meio da aplicação do Teorema 5 de Sztrowski (1979), no qual $-(2/n)\log \lambda$ segue assintoticamente distribuição normal

não nula com média m_∞ e variância v_∞/n , em que

$$\begin{aligned}
m_\infty &= \log\left(\frac{|\Sigma_0|}{|\Sigma^*|}\right), \\
v_\infty &= 2pq - 8\langle \Sigma_0 \rangle^\top \Psi_0^{-1} \mathbf{W}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1} \mathbf{T}_0 \langle \Sigma^* \rangle \\
&\quad + 4\langle \Sigma_0 \rangle^\top \Psi_0^{-1} \mathbf{W}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0)^{-1} \mathbf{T}_0 \Psi^* \mathbf{T}_0^\top (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^\top)^{-1} \mathbf{W}_0^\top \Psi_0^{-1} \langle \Sigma_0 \rangle, \\
\mathbf{M}_0 &= (\mathbf{W}_0^\top \Psi_0^{-1} \mathbf{W}_0)^{-1} (\mathbf{U}_0^\top \Psi_0^{-1} \mathbf{W}_0), \quad \mathbf{U}_0 = (\langle \mathbf{V}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{V}_m \rangle), \\
\mathbf{T}_0 &= (\mathbf{W}_0^\top \Psi_0^{-1} \mathbf{W}_0)^{-1} \mathbf{W}_0^\top \Psi_0^{-1}, \quad \mathbf{V}_g = \mathbf{G}_g \Sigma_0^{-1} (\Sigma_0 - \Sigma^*) + (\Sigma_0 - \Sigma^*) \Sigma_0^{-1} \mathbf{G}_g,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

com Σ^* sendo o valor assumido sob a hipótese alternativa H_1 e não assumido sob a hipótese nula H_0 , \mathbf{W}_0 sendo o valor de \mathbf{W} sob a hipótese nula H_0 , de modo que a equação (2.58) é equivalente a $\langle \Sigma(\sigma_\omega) \rangle = \mathbf{W}_0 \sigma_\omega$, $\Psi_0 = \Psi(\Sigma)_0$, $\Psi^* = \Psi(\Sigma^*)$, e Σ_0 sendo as estimativas de máxima verossimilhança, sob a hipótese nula H_0 derivadas da equação (2.62) com \mathbf{C} e \mathbf{W} substituídos por Σ^* e \mathbf{W}_0 , respectivamente. Observe que Σ_0 não é uma estatística.

Portanto, o tamanho da amostra necessária para atingir certo poder Π quando $\Sigma = \Sigma^*$ para um dado nível de significância α é aproximadamente

$$n = \frac{b \pm (b^2 - 4m_\infty^2 c_\alpha^2)^{1/2}}{2m_\infty^2}, \tag{2.66}$$

em que $b = 2m_\infty c_\alpha + v_\infty z_{\Pi}^2$, z_{Π} é a percentagem Π da distribuição normal padrão, \pm é escolhido para ter o mesmo sinal de z_{Π} , e c_α é a percentagem $(1 - \alpha)$ de $\chi_{p(p+1)(q-1)/2}^2$.

O poder aproximado pode ser calculado quando $\Sigma = \Sigma^*$ para valores de n e α ,

do seguinte modo

$$\Pi = \Phi \left\{ \left(\frac{n}{\nu_\infty} \right)^{1/2} \left(m_\infty - \frac{c_\alpha}{n} \right) \right\}, \quad (2.67)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição normal padrão acumulada.

Segundo Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), as equações (2.66) e (2.67) também se aplicam para os testes da razão de verossimilhanças modificados LRT_1 , LRT_2 e LRT_3 .

A fim de avaliar o desempenho de uma amostra pequena do teste de razão de verossimilhanças e suas modificações descritas acima, Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) realizaram um estudo de Monte Carlo para aproximações dos níveis de significância e poderes dos testes para o caso $p = q = 2$, com o intuito de compará-los com os demais testes.

Alguns testes assintóticos foram sugeridos por Jiang e Sarkar (1998). Inicialmente, eles consideraram $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top)^\top$, com $\mathbf{X}_i : (2 \times 1)$, $i = 1, 2$, como sendo uma normal 4-variada com vetor de média $\boldsymbol{\mu}$ desconhecido e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma)_{ij}$.

O interesse é testar a hipótese nula $H_0 : \sigma_{11} = \sigma_{33}, \sigma_{22} = \sigma_{44}, \sigma_{12} = \sigma_{34}$, contra a hipótese alternativa de que pelo menos uma dessas igualdades não vale, baseada em $\mathbf{X}_l, l = 1, \dots, n$, uma amostra aleatória de tamanho n desta população. Para isso, considere $\mathbf{S} = (s_{ij})$ uma matriz de covariâncias amostrais calculada a partir de \mathbf{X}_l , dada por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (\mathbf{X}_l - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_l - \bar{\mathbf{X}})^\top = C \left(\frac{n}{n-1} \right).$$

Sabe-se que para $\mathbf{s} = (s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{33}, s_{44}, s_{34})^\top$, $n^{1/2} \mathbf{s}$ segue assintoticamente uma distribuição normal multivariada com vetor de média $n^{1/2} \boldsymbol{\sigma}$ e matriz de cova-

riâncias Ω , em que $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}, \sigma_{44}, \sigma_{34})^\top$, e $\Omega = (\sigma_{im} \sigma_{jn} + \sigma_{in} \sigma_{jm})$ (ANDERSON, 1984; GRAYBILL, 1983). Mais explicitamente, Ω pode ser particionado como

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix},$$

em que

$$\Omega_{11} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}^2 & 2\sigma_{12}^2 & 2\sigma_{11}\sigma_{12} \\ 2\sigma_{12}^2 & 2\sigma_{22}^2 & 2\sigma_{12}\sigma_{22} \\ 2\sigma_{11}\sigma_{12} & 2\sigma_{12}\sigma_{22} & \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{12}^2 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{12} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{13}^2 & 2\sigma_{14}^2 & 2\sigma_{13}\sigma_{14} \\ 2\sigma_{23}^2 & 2\sigma_{24}^2 & 2\sigma_{23}\sigma_{24} \\ 2\sigma_{13}\sigma_{23} & 2\sigma_{14}\sigma_{24} & \sigma_{13}\sigma_{24} + \sigma_{14}\sigma_{23} \end{pmatrix},$$

Ω_{22} pode ser obtido a partir de Ω_{11} pela substituição de 3 e 4 por 1 e 2, respectivamente, e $\Omega_{21} = \Omega_{12}^\top$.

Jiang e Sarkar (1998) utilizaram a distribuição assintótica de s para desenvolver alguns testes a partir da estatística de Wald, cuja motivação derivou dos resultados apresentados por Layard (1972) para testar a igualdade das matrizes de covariâncias de duas populações multivariadas independentes, e por Harris (1985) para testar a igualdade das variâncias de variáveis correlacionadas.

Observe que a última igualdade da hipótese H_0 , $\sigma_{12} = \sigma_{34}$, pode ser escrita em termos das correlações, ao invés das covariâncias correspondentes, e $\varphi_2(s) = (s_{11} - s_{33}, s_{22} - s_{44}, r_{12} - r_{34})^\top$ pode ser usada para descrever um teste para testar a hipótese H_0 , sendo $R = (r_{ij})$ usado para denotar a matriz de correlação

correspondente a \mathcal{S} . Assintoticamente, $n^{1/2}\varphi_2(\mathbf{s})$ segue uma normal 3-variada com vetor de média $n^{1/2}\varphi_2(\boldsymbol{\sigma})$ e matriz de covariâncias $\mathbf{A}_2^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}_2$, em que \mathbf{A}_2 é uma matriz de ordem um de φ_2 calculada a partir de $\boldsymbol{\Sigma}$. Seja (ϱ_{ij}) uma matriz de correlação correspondente de $\boldsymbol{\Sigma}$. Portanto, $\mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}_{21}^\top, -\mathbf{A}_{22}^\top)^\top$, em que

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\varrho_{12}}{2\sigma_{11}} \\ 0 & 1 & -\frac{\varrho_{12}}{2\sigma_{22}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\sigma_{11}\sigma_{22})^{1/2}} \end{pmatrix},$$

e \mathbf{A}_{22} pode ser obtido a partir de \mathbf{A}_{21} pela substituição de 3 e 4 por 1 e 2, respectivamente. Assim,

$$\mathbf{A}_2^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{11} \mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{22}^\top \boldsymbol{\Omega}_{22} \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22} - (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})^\top,$$

em que

$$\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{11} \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}^2 & 2\sigma_{12}^2 & \sigma_{11} \varrho_{12}(1 - \varrho_{12}^2) \\ 2\sigma_{12}^2 & 2\sigma_{22}^2 & \sigma_{22} \varrho_{12}(1 - \varrho_{12}^2) \\ \sigma_{11} \varrho_{12}(1 - \varrho_{12}^2) & \sigma_{22} \varrho_{12}(1 - \varrho_{12}^2) & (1 - \varrho_{12}^2)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{13}^2 & 2\sigma_{14}^2 & \sigma_{11} \{2\varrho_{13}\varrho_{14} - \varrho_{34}(\varrho_{13}^2 + \varrho_{14}^2)\} \\ 2\sigma_{23}^2 & 2\sigma_{24}^2 & \sigma_{22} \{2\varrho_{23}\varrho_{24} - \varrho_{34}(\varrho_{23}^2 + \varrho_{24}^2)\} \\ (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})_{31} & (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})_{32} & (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})_{33} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})_{31} &= \sigma_{33} \{ 2 \varrho_{13} \varrho_{23} - \varrho_{12} (\varrho_{13}^2 + \varrho_{23}^2) \} \\ (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})_{32} &= \sigma_{44} \{ 2 \varrho_{14} \varrho_{24} - \varrho_{12} (\varrho_{14}^2 + \varrho_{24}^2) \} \\ (\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{12} \mathbf{A}_{22})_{33} &= \frac{1}{2} \varrho_{12} \varrho_{34} (\varrho_{13}^2 + \varrho_{14}^2 + \varrho_{23}^2 + \varrho_{24}^2) + \varrho_{13} \varrho_{24} + \varrho_{14} \varrho_{23} - \\ &\quad - (\varrho_{12} \varrho_{13} \varrho_{14} + \varrho_{12} \varrho_{23} \varrho_{24} + \varrho_{13} \varrho_{23} \varrho_{34} + \varrho_{14} \varrho_{24} \varrho_{34}), \end{aligned}$$

e $\mathbf{A}_{22}^\top \boldsymbol{\Omega}_{22} \mathbf{A}_{22}$ pode ser obtida a partir de $\mathbf{A}_{21}^\top \boldsymbol{\Omega}_{11} \mathbf{A}_{21}$ pela substituição de 3 e 4, respectivamente. Deste modo, uma estatística do teste pode ser construída como

$$W_2 = (n - 1)(\varphi_2(s))^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_2^{*-1} \varphi_2(s),$$

em que $\hat{\mathbf{A}}_2$ é uma estimativa de \mathbf{A}_2 obtida pela substituição de s_{ij} e r_{ij} por σ_{ij} e ϱ_{ij} , respectivamente.

Jiang e Sarkar (1998) sugeriram o uso de outros testes assintóticos, como

$$W_5 = (n - 3)(\varphi_5(s))^\top \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_5^{*-1} \varphi_5(s),$$

em que $\varphi_5(s) = (\tanh^{-1} r_{13}^*, \tanh^{-1} r_{24}^*, \tanh^{-1} r_{12} - \tanh^{-1} r_{34})^\top$, r_{13}^* sendo a correlação amostral entre $x_{11} + x_{21}$ e $x_{11} - x_{21}$, e r_{24}^* a correlação amostral entre $X_{12} + X_{22}$ e $x_{12} - x_{22}$, e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_2^*$ e $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_5^*$ são estimativas de $\boldsymbol{\Gamma}_2^*$ e $\boldsymbol{\Gamma}_5^*$, obtidas pela substituição de σ_{ij} por s_{ij} , respectivamente, com $\boldsymbol{\Gamma}_2^*$ e $\boldsymbol{\Gamma}_5^*$ sendo as matrizes de covariâncias assintóticas de $n^{1/2} \varphi_2(s)$ e $n^{1/2} \varphi_5(s)$ calculadas por meio de $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente. Sob H_0 , em grandes amostras, W_2 e W_5 seguem uma distribuição assintótica χ^2 com 3 graus de liberdade.

Para fins de comparação, Ferreira (2009) considerou o teste da razão de verossimilhança de Krishnaiah (1975), citado por Seber (1984). Para $q > 2$ populações,

o teste é extremamente limitado, uma vez que considera que Σ_{rs} é igual a Σ_{12} , para todo $r \neq s = 1, 2, \dots, q$. No presente caso, como $q = 2$, tal limitação não existe.

Considerando a amostra aleatória $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$, em que $\mathbf{X}_j \in \mathbb{R}^{2p}$, em que

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{j1} \\ \mathbf{X}_{j2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_{ji} \in \mathbb{R}^p, \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Inicialmente, os dados são transformados da seguinte maneira:

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{j1} \\ \mathbf{Y}_{j2} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I}_p & \frac{1}{2} \mathbf{I}_p \\ -\frac{1}{2} \mathbf{I}_p & \frac{1}{2} \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{j1} \\ \mathbf{X}_{j2} \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

De (2.68) observa-se que

$$\mathbf{Y}_{j1} = \bar{\mathbf{X}}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{j1} + \mathbf{X}_{j2})$$

e

$$\mathbf{Y}_{j2} = \mathbf{X}_{j2} - \bar{\mathbf{X}}_j.$$

Assim, $\mathbf{Y}_j \sim N_{2p}(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}^\top)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\mathbf{Y}_{j1}, \mathbf{Y}_{j2}) &= \text{Cov}(\bar{\mathbf{X}}_j, \mathbf{X}_{j2} - \bar{\mathbf{X}}_j) \\
&= \text{Cov}(\bar{\mathbf{X}}_j, \mathbf{X}_{j2}) - \text{Cov}(\bar{\mathbf{X}}_j) \\
&= \frac{1}{2} [\text{Cov}(\mathbf{X}_{j1}, \mathbf{X}_{j2}) + \text{Cov}(\mathbf{X}_{j2}, \mathbf{X}_{j2})] - \frac{1}{4} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \text{Cov}(\mathbf{X}_{jr}, \mathbf{X}_{js}) \\
&= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}) - \frac{1}{4} (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + \boldsymbol{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{21}) \\
&= \frac{1}{4} (\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{11}) + \frac{1}{4} (\boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}).
\end{aligned}$$

Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) consideraram o problema para o caso de $p = 2$ e $q = 2$ e testaram a igualdade $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{22}$ usando um teste de independência entre \mathbf{Y}_{j1} e \mathbf{Y}_{j2} . Para isso, os autores assumem que $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}$, que ocorre se e somente se $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ for uma matriz simétrica, que é uma condição muito forte, improvável de acontecer em uma situação prática. Logo, assumindo essa condição como verdadeira, covariância de \mathbf{Y}_{j1} com \mathbf{Y}_{j2} será nula se e somente se $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{22}$. Portanto, testar que $H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{22}$ equivale a testar que \mathbf{Y}_{j1} e \mathbf{Y}_{j2} são independentes. Para isso, será considerado o teste da razão de verossimilhanças para independência de dois grupos.

Considerando a transformação (2.68) em todas as observações é obtida a amostra aleatória $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_j, \dots, \mathbf{Y}_n$. Sendo \mathbf{S} a matriz de covariâncias amostrais dos \mathbf{Y}'_j s, com a seguinte estrutura

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right].$$

A hipótese de interesse é verificar se os $q = 2$ grupos de variáveis são mutua-

mente independentes, ou seja, deseja-se testar a seguinte hipótese

$$H_0 : \Sigma_{ij} = \mathbf{0} \quad \forall \quad i \neq j = 1, 2, \quad \text{ou}$$

$$H_0 : \Sigma = \Sigma_0 = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \Sigma_{22} \end{array} \right].$$

Deve-se salientar que a variável aleatória correspondente à j -ésima unidade amostral é particionada da seguinte forma $\mathbf{Y}_j = [\mathbf{Y}_{(1)j}^\top, \mathbf{Y}_{(2)j}^\top]^\top$ e que os sub-vetores $\mathbf{Y}_{(1)j}, \mathbf{Y}_{(2)j}$ representam partições do vetor \mathbf{Y}_j e não uma amostra aleatória de vetores independentes.

A função de verossimilhança para o modelo normal multivariado é dada por

$$L(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{j=1}^n f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_j) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu}) \right\}. \quad (2.69)$$

O máximo dessa função pode ser obtido tomando-se as derivadas parciais de primeira ordem em relação a cada parâmetro, igualando as funções obtidas a zero e resolvendo o sistema de equações formado. Os estimadores resultantes são os estimadores de máxima verossimilhança. Muitas vezes é mais fácil tomar o logaritmo da função de verossimilhança e determinar o máximo dessa nova função, que é chamada de função suporte. Os máximos das funções de verossimilhança e suporte, em relação aos estimadores obtidos, são exatamente os mesmos. Isso decorre do fato de a função logaritmo ser monótona crescente. Para esse caso, a

função suporte será denominada por g , e dada por

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= \ln [L(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})] = \ln \left[\prod_{j=1}^n f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_j) \right] \\ &= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned}$$

Realizando-se os mesmos procedimentos que seriam aplicados para determinar o máximo da função de verossimilhança, deve-se, inicialmente, tomar a derivada de primeira ordem da função suporte em relação a $\boldsymbol{\mu}$ e posteriormente em relação a $\boldsymbol{\Sigma}$ e resolver o sistema de equações formado. Assim, tem-se

$$\frac{\partial g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu}).$$

Igualando a zero e resolvendo a equação resultante obtém-se facilmente o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\mu}$ por

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j}{n} = \bar{\mathbf{Y}}. \quad (2.70)$$

Antes de calcular a derivada de primeira ordem em relação à matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, rearranja-se o expoente do número neperiano, na equação da função de

verossimilhança (2.69), da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) + \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}$$

Como os elementos dessa soma são formas quadráticas e, portanto, escalares, pode-se aplicar o traço e utilizar a propriedade de que $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$, resultando assim na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n tr \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^\top \right] + 2 \sum_{j=1}^n tr \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top \right] + \\
&+ \sum_{j=1}^n tr \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}) (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top \right].
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade de que a soma de traços é igual ao traço da soma e considerando que o termo central $2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top$ é uma matriz de zeros, então tem-se

$$tr \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^\top \right] + tr \left[n \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}) (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top \right].$$

Sabe-se que $(n-1)\mathbf{S} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_j - \bar{\mathbf{Y}})^\top$. Assim, a função suporte pode

ser reescrita como

$$g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{np}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2}\text{tr}[(n-1)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}] - \frac{1}{2}\text{tr}[n\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top]. \quad (2.71)$$

Tomando-se a derivada de primeira ordem da função suporte, modificada dessa forma, em relação à matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} &= -\frac{n}{2}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^\top + \frac{(n-1)}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\ &= -\frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{(n-1)}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}. \end{aligned}$$

Igualando a zero, substituindo o estimador de $\boldsymbol{\mu}$ dado pela equação (2.70) e resolvendo a equação resultante obtém-se facilmente o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\Sigma}$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + \frac{(n-1)}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + \frac{n}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\mathbf{Y}} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^\top\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} &= \mathbf{0} \\ -n\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + (n-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + n\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}})(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}})^\top\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} &= \mathbf{0} \\ -n\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + (n-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} &= \mathbf{0} \\ -n\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}} + (n-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

sendo, portanto

$$\begin{aligned} n\hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= (n-1)\mathbf{S} \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{(n-1)\mathbf{S}}{n} = \mathbf{S}_n. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança do vetor de médias (2.70) e da matriz de covariâncias (2.72) maximizam a função de verossimilhança apresentada na equação (2.69). Para obter o máximo da função de verossimilhança, inicialmente calcula-se

$$L_{\Omega}(\mathbf{Y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}_n|^{-\frac{n}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{-\text{tr}[n\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{S}_n] - \text{tr}[n\mathbf{S}_n^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}})(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{Y}})^{\top}]}{2} \right\},$$

que após ser simplificada resulta em

$$L_{\Omega}(\mathbf{Y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\mathbf{S}_n|^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{np}{2} \right\}, \quad (2.73)$$

em que Ω representa o espaço paramétrico irrestrito. As partições apresentadas anteriormente devem ser aplicadas da mesma forma.

A função de verossimilhança, para o modelo restrito, pode ser escrita da seguinte forma

$$L_{\Omega_0}(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \prod_{i=1}^2 |\boldsymbol{\Sigma}_{ii}|^{-\frac{n}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_{(ij)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})^{\top} \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} (\mathbf{Y}_{(ij)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)}) \right\},$$

e a função suporte, por

$$g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \sum_{i=1}^2 \ln|\boldsymbol{\Sigma}_{ii}| - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_{(ij)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})^{\top} \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} (\mathbf{Y}_{(ij)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)}).$$

Utilizando argumentos semelhantes ao utilizado no teste de Bartlett multivariado a expressão $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_{(i)j} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})^\top \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} (\mathbf{Y}_{(i)j} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})$ pode ser reescrita por

$$\sum_{i=1}^2 \text{tr} \left[(n-1) \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} + n \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)}) (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})^\top \right],$$

em que a matriz ($p_i \times p_i$), dada por \mathbf{S}_{ii} , representa o estimador não-viesado da covariância para o i -ésimo grupo de variáveis. Assim, a função suporte é simplificada em

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0) &= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \sum_{i=1}^2 \ln|\boldsymbol{\Sigma}_{ii}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \text{tr} \left[(n-1) \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \text{tr} \left[n \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)}) (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})^\top \right]. \end{aligned}$$

Derivando essa função em relação aos parâmetros obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\mu}_{(i)}} = n \boldsymbol{\Sigma}_{ii}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)}),$$

para $i = 1, 2$. Igualando a equação resultante a zero obtém-se

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{(i)} = \bar{\mathbf{Y}}_{(i)}. \quad (2.74)$$

O estimador de máxima verossimilhança da média populacional do i -ésimo grupo de variáveis corresponde à média amostral do mesmo grupo. Para encontrar

os estimadores de máxima verossimilhança para a matriz de covariâncias obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \Sigma_{ii}} = -\frac{n}{2} \Sigma_{ii}^{-1} + \frac{(n-1)}{2} \Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} \Sigma_{ii}^{-1} + \frac{n}{2} \Sigma_{ii}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)}) (\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{(i)})^\top \Sigma_{ii}^{-1}.$$

Igualando essa equação a zero, substituindo o estimador de $\boldsymbol{\mu}_{(i)}$ dado pela equação (2.74) obtém-se

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} + \frac{n-1}{2} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} &= \mathbf{0} \\ -\frac{n}{2} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} &= -\frac{n-1}{2} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} \\ \hat{\Sigma}_{ii} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} \hat{\Sigma}_{ii} &= \frac{n-1}{n} \hat{\Sigma}_{ii} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ii} \hat{\Sigma}_{ii}^{-1} \hat{\Sigma}_{ii}, \end{aligned}$$

$$\hat{\Sigma}_{ii} = \frac{n-1}{n} \mathbf{S}_{ii} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_{(i)j} - \bar{\mathbf{Y}}_{(i)}) (\mathbf{Y}_{(i)j} - \bar{\mathbf{Y}}_{(i)})^\top.$$

Substituindo os estimadores de máxima verossimilhança na função de verossimilhança restrita obtém-se seu máximo, após algumas simplificações, que é dado por

$$L_{\Omega_0}(\mathbf{Y}; \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\Sigma}_0) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} \left[\prod_{i=1}^2 |\hat{\Sigma}_{ii}|^{-\frac{n}{2}} \right] \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}.$$

A estatística do teste de razão de verossimilhança para a independência de $q = 2$ grupos é dada por

$$\Lambda = \frac{|\hat{\Sigma}|^{n/2}}{\left[\prod_{i=1}^2 |\hat{\Sigma}_{ii}| \right]^{n/2}} = \frac{|\mathbf{S}|^{n/2}}{\left[\prod_{i=1}^2 |\mathbf{S}_{ii}| \right]^{n/2}} = \frac{|\mathbf{R}|^{n/2}}{\left[\prod_{i=1}^2 |\mathbf{R}_{ii}| \right]^{n/2}}, \quad (2.75)$$

sendo \mathbf{R} a matriz de covariâncias amostrais e \mathbf{R}_{ii} a partição correspondente ao

i -ésimo grupo. Sob a hipótese nula de independência entre grupos, para grandes amostras, $-2 \ln(\Lambda)$ possui distribuição assintótica quiquadrado com $\nu = 2p^2$ (FERREIRA, 2009).

A estatística do teste com correção de Box (1949) é dada por

$$\chi_c^2 = -(n-1)(1-C^*) [\ln|\mathbf{S}| - (\ln|\mathbf{S}_{11}| + \ln|\mathbf{S}_{22}|)] \quad (2.76)$$

$$C^* = \frac{4\Gamma_3 + 6\Gamma_2}{12(n-1)\Gamma_2} \quad \text{e} \quad \Gamma_r = (2p)^r - 2p^r \quad \text{para} \quad r = 2,3.$$

A estatística (2.76), sob H_0 , segue assintoticamente uma distribuição quiquadrado com $\nu = 2p^2$ graus de liberdade, e é utilizada para testar a hipótese nula de igualdade das matrizes de covariâncias sob correlação entre os dois grupos.

Esse teste não será aplicado ou utilizado, pois só é válido em uma situação improvável de acontecer em situações reais.

2.7 Simulação *bootstrap*

O método de simulação *bootstrap* foi proposto por Efron (1979) e é referido como técnica de reamostragem. Métodos de *bootstrap* são métodos computacionais intensivos de análise estatística que usam simulação para a realização de testes de hipótese, estimação de parâmetros por intervalos e estimação de erros padrões.

Segundo Ferreira (2013), a vantagem de utilizar os métodos de reamostragens como o *bootstrap* para realizar inferências é quando não se conhece a distribuição de probabilidade da população e o modelo normal não é adequado para os dados ou resíduos.

O termo *bootstrap* refere-se a simulações Monte Carlo que tratam a amostra original como a pseudo-população. O pesquisador trata a sua amostra como se

fosse a população de origem dos dados e utiliza a amostragem com reposição para gerar pseudo-amostras a partir da amostra original. Uma amostra original de tamanho n é considerada e cada elemento da amostra tem a mesma probabilidade de ser selecionado. Assim, pode-se estimar os parâmetros da população a partir das pseudo-amostras por meio da distribuição empírica amostral conhecida.

Segundo Chernick (2008 apud GEBERT, 2010), o número de reamostragens necessárias para se obterem boas estimativas, em intervalos de confiança e problemas de testes de hipóteses, seria de pelo menos 1000 repetições *bootstrap*. As duas maneiras de *bootstrap* mais utilizadas são o não-paramétrico e o paramétrico.

2.7.1 *Bootstrap* não-paramétrico

A ideia do método *bootstrap* não-paramétrico é realizar reamostragem com reposição da amostra original, formando novas amostras de mesmo tamanho. É usada quando não se conhece a distribuição de probabilidade da variável aleatória ou da estatística de interesse.

Suponha uma amostra aleatória de tamanho n , X_1, X_2, \dots, X_n de uma população com distribuição desconhecida e cujo interesse é um parâmetro θ . Essa amostra será reamostrada B vezes com reposição, de forma que cada reamostragem (subamostra) $(1, 2, \dots, B)$ tenha tamanho n . A cada subamostra gerada calcula-se uma estatística de interesse, e após B reamostragens a distribuição empírica gerada é utilizada para a realização de inferências.

Segundo Ferreira (2013), para a maior parte dos modelos probabilísticos teorias exatas não são conhecidas ou são intratáveis analiticamente. Nesse caso, usa-se a distribuição de probabilidade empírica, a qual atribui para cada observação amostral uma probabilidade $1/n$. Ainda segundo Ferreira (2013), a ideia de *bootstrap* é substituir a distribuição desconhecida da população pela distribuição empírica,

que é conhecida. Por essa razão que se denomina esse método de *bootstrap* não-paramétrico.

O algoritmo das reamostragens *bootstrap*, para estimar um parâmetro θ desconhecido de uma população, cuja distribuição de probabilidade f , considerando, ainda, que o estimador $\hat{\theta}$ é uma função dos valores amostrais, $\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, foi apresentado por Ferreira (2013) da seguinte forma:

- (i) atribuir massa de probabilidade $1/n$ para cada observação amostral X_j , $j = 1, 2, \dots, n$, para criar a distribuição de probabilidade empírica \hat{f} ;
- (ii) gerar amostras aleatórias com reposição da distribuição de probabilidade empírica \hat{f} , denominada de amostra de *bootstrap* e dada por $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$;
- (iii) calcular uma estimativa de $\hat{\theta}$ por $\tilde{\theta}$, e usar a amostra de *bootstrap* no lugar da amostra original, da seguinte forma $\tilde{\theta} = g(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n)$;
- (iv) repetir os passos (ii) e (iii) B vezes.

2.7.2 *Bootstrap* paramétrico

Os procedimentos *bootstrap* paramétricos são mais restritivos, em virtude de assumirem uma distribuição de probabilidade conhecida $F(\cdot)$, com parâmetros desconhecidos. Assim, utiliza-se as estimativas desses parâmetros, obtidas a partir da amostra X_1, X_2, \dots, X_n , para gerar dados da distribuição de interesse.

De acordo com Ferreira (2013), no *bootstrap* paramétrico devem-se estimar os parâmetros a partir da amostra aleatória que se encontra disponível e utilizar as estimativas como parâmetros da função densidade correspondente e, assim, gerar dados da distribuição de interesse. A utilização de estimativas dos parâmetros para obter uma estimativa da distribuição da variável aleatória é a principal característica que diferencia os métodos Monte Carlo do *bootstrap* paramétrico.

No procedimento *bootstrap* paramétrico devem-se obter as estimativas dos parâmetros da distribuição de interesse. A partir desses parâmetros são geradas B amostras aleatórias de tamanho n . Para cada amostra calcula-se uma estimativa da estatística de interesse, que tem a forma da estatística original (GEBERT, 2010).

2.8 Simulação Monte Carlo

O método de Monte Carlo surgiu com o propósito de resolver problemas matemáticos de integração numérica utilizando geração de sequências de números aleatórios, sugerindo o nome “Monte Carlo” em comparação à aleatoriedade e repetição da roleta utilizada nos cassinos, uma vez que a roleta seria comparável a um mecanismo gerador de números aleatórios. A geração dessas sequências seja aleatória ou pseudo-aleatória é um fator importante a ser considerado para que a precisão das estimativas Monte Carlo sejam aceitáveis.

O suporte estatístico para validação dos resultados obtidos via simulação Monte Carlo é verificado na “Lei dos Grandes Números”, permitindo interpretar que à medida que o número de simulações aumenta a estimativa converge para o verdadeiro valor da variável.

O método de simulação Monte Carlo é usado para fazer inferências quando não se conhece a distribuição do parâmetro de interesse ou quando as pressuposições de um modelo são violadas. Segundo Ferreira (2013), muitos testes e métodos de estimação têm suas propriedades avaliadas quando há violação de pelo menos uma de suas pressuposições, o que se dá o nome de avaliação da robustez do método, utilizando mecanismos Monte Carlo.

A ideia do método de Monte Carlo é estimar a distribuição de uma estatística por meio de amostras aleatórias de uma população e observar o comportamento da estatística sobre as amostras. Nessa situação, o método Monte Carlo é uma abor-

dagem paramétrica porque a amostra é retirada de uma população com distribuição conhecida.

A aplicação do método inicia com a definição da pseudo-população, que é assumida para representar a população. Em seguida deve-se determinar a pseudo-população que representa a verdadeira população de interesse. Dessa forma, uma técnica de amostragem deve ser aplicada para obter uma amostra da pseudo-população, com o intuito de calcular o valor da estatística de interesse. Deve-se repetir B vezes a técnica de amostragem para calcular os B valores da estatística de interesse. Esses B valores obtidos devem ser usados para estudar a distribuição da estatística.

No estudo da avaliação ou desempenho de testes estatísticos, a obtenção analítica de informações sobre a taxa de erro tipo I e poder torna-se muito complicada. Por isso, com a utilização do método Monte Carlo pode-se obter essas informações de uma maneira simples e eficiente, evitando-se assim dificuldades analíticas (GEBERT, 2010).

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Teste de comparação de covariâncias na presença de correlação

Considere a variável multidimensional \mathbf{X} de dimensão $(2p \times 1)$ normal multivariada com vetor média $\boldsymbol{\mu}$ $(2p \times 1)$ e covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ $(2p \times 2p)$, $\mathbf{X} \sim N_{2p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Nesse trabalho somente o caso para $q = 2$ populações relacionadas é considerado, resultando na dimensão $qp = 2p$ das matrizes. Seja considerada uma partição de \mathbf{X} em $q = 2$ grupos de p variáveis, quais sejam, \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 ambos de dimensões $(p \times 1)$. Igualmente, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ devem ser particionadas de forma correspondente. Os grupos 1 e 2 são formados de tal forma que as p variáveis dos vetores \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 correspondam às mensurações antes e após a aplicação de algum tipo de tratamento. As partições correspondentes de $\boldsymbol{\Sigma}$ são dadas por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{array} \right].$$

O principal objetivo é testar a hipótese especificada em (3.1):

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_{11} \neq \boldsymbol{\Sigma}_{22} \quad (3.1)$$

quando $\boldsymbol{\Sigma}_{12} \neq \mathbf{0}$. Os testes para o caso em que $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$ são bastantes conhecidos na literatura (BARTLETT, 1937). Para desenvolver o teste especificamente para $q = 2$ populações, sejam definidas as variáveis U e V como combinações lineares das variáveis de \mathbf{X} . Para isso, seja o vetor não nulo \mathbf{a} $(p \times 1)$ de coeficientes reais que estabelece as combinações lineares de \mathbf{X} . Sejam os vetores $\mathbf{b}^\top = (\mathbf{a}^\top, \mathbf{a}^\top)$ e $\mathbf{c}^\top = (\mathbf{a}^\top, -\mathbf{a}^\top)$ de dimensão $(1 \times 2p)$. Portanto, sejam $U = \mathbf{b}^\top \mathbf{X} = \mathbf{a}^\top \mathbf{X}_1 + \mathbf{a}^\top \mathbf{X}_2 = U_1 + U_2$ e $V = \mathbf{c}^\top \mathbf{X} = \mathbf{a}^\top \mathbf{X}_1 - \mathbf{a}^\top \mathbf{X}_2 = U_1 - U_2$. Como U e

U e V são combinações lineares de variáveis normais \mathbf{X} , então, $U \sim N_1(\mu_U, \sigma_U^2)$ e $V \sim N_1(\mu_V, \sigma_V^2)$ (ANDERSON, 1978), sendo:

$$\begin{aligned}\mu_U &= \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}_2 & \text{e} & \quad \sigma_U^2 = \mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}; \\ \mu_V &= \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\mu}_2 & \text{e} & \quad \sigma_V^2 = \mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Para desenvolver o teste sugerido, inicialmente é obtida a correlação entre essas combinações lineares U e V (ρ_{UV}). Seu estimador de máxima verossimilhança é então utilizado. Em seguida o teste t de *Student* é aplicado para a hipótese de correlação linear nula. Como U e V são variáveis normais, o teste aplicado é exato sob $H_0 : \rho_{UV} = 0$. Em seguida é mostrado como o teste dessa hipótese está relacionada com a hipótese de interesse (3.1). Finalmente é mostrado como determinar o vetor \mathbf{a} para que o teste seja mais poderoso. A correlação entre U e V é definida por

$$\rho_{UV} = \frac{\sigma_{UV}}{\sqrt{\sigma_U^2} \sqrt{\sigma_V^2}},$$

em que σ_{UV} é a covariância entre U e V definida por $\sigma_{UV} = E(UV) - E(U)E(V)$, σ_U^2 e σ_V^2 foram definidos anteriormente. Então,

$$\sigma_{UV} = \text{Cov}(\mathbf{b}^\top \mathbf{X}, \mathbf{c}^\top \mathbf{X}) = \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c} = \mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a}.$$

Portanto,

$$\rho_{UV} = \frac{\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}}}. \quad (3.2)$$

O estimador de máxima verossimilhança de sigma corrigido para viés (\hat{S}) em

uma amostra de tamanho n , devidamente particionado é

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right] = \frac{\sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})^\top}{n-1}. \quad (3.3)$$

O estimador de ρ_{UV} é dado por

$$r_{UV} = \frac{\mathbf{a}^\top (\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22}) \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^\top (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22} + 2\mathbf{S}_{12}) \mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{a}^\top (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22} - 2\mathbf{S}_{12}) \mathbf{a}}}. \quad (3.4)$$

Como $U \sim N(\mu_U, \sigma_U^2)$ e $V \sim N(\mu_V, \sigma_V^2)$, então a estatística pivô

$$t_c = \frac{r_{UV} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{UV}^2}} \quad (3.5)$$

tem distribuição t de *Student* com $\nu = n - 2$ graus de liberdade, se $\rho_{UV} = 0$. Essa estatística segue a distribuição t de *Student* com $\nu = n - 2$ graus de liberdade, dado que \mathbf{a} é conhecido.

A expressão (3.2) permite que se conclua que $\rho_{UV} = 0$ se e somente se $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$. Portanto, testar a hipótese $H_0 : \rho_{UV} = 0$ é equivalente a testar a hipótese $H_0 : \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$. Quando, no entanto, $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$, o teste de Bartlett (1937) pode ser utilizado para testar essa hipótese.

Para definir qual é o valor do vetor \mathbf{a} que torna o teste (3.5) mais poderoso, na próxima seção é apresentada uma solução.

3.1.1 Maximizar ρ_{UV}

A correlação entre U e V foi definida anteriormente por

$$\rho_{UV} = \frac{\sigma_{UV}}{\sqrt{\sigma_U^2} \sqrt{\sigma_V^2}} = \frac{\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}}}.$$

Para obter o máximo, será imposta a restrição $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$, devido a escolha de $\mathbf{a} = 1$. Em seguida deve-se derivar ρ_{UV} em relação ao vetor \mathbf{a} , igualar a zero e resolver a equação formada.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{UV}}{\partial \mathbf{a}} = & \left\{ \frac{2(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]^{1/2} [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]^{1/2}}{[\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}] [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]} - \right. \\ & - \mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a} [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]^{-1/2}}{[\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}] [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]} \times \right. \\ & \times \frac{[\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]^{1/2} + [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]^{1/2}}{[\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}] [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]} \times \\ & \left. \left. \times \frac{(\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a} [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]^{1/2}}{[\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}] [\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Impondo as restrições $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{UV}}{\partial \mathbf{a}} = & 2(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} - \mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} [(\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} + 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a} + \\ & + (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22} - 2\boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{a}]. \end{aligned}$$

Como, sob a restrição $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ tem-se $\mathbf{a}^\top (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} = \rho_{UV}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{UV}}{\partial \mathbf{a}} = & 2(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} - 2\rho_{UV} (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}) \mathbf{a} \\ = & 2 [(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{22}) - \rho_{UV} (\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{22})] \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Igualando a zero tem-se:

$$[(\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) - \rho_{UV}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})] \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Para solucionar o sistema (3.6), a matriz $\Sigma_{11} + \Sigma_{22}$ será fatorada por $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} = \Omega\Omega^\top$, em que Ω é o fator de Cholesky de $\Sigma_{11} + \Sigma_{22}$.

Usando a transformação linear $\mathbf{a} = (\Omega^\top)^{-1} \mathbf{z}$, e substituindo em (3.6) tem-se

$$[(\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) - \rho_{UV} \Omega\Omega^\top] (\Omega^\top)^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Pré-multiplicando o sistema (3.7) por Ω^{-1} tem-se

$$[\Omega^{-1}(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})(\Omega^\top)^{-1} - \rho_{UV} \Omega^{-1} \Omega\Omega^\top (\Omega^\top)^{-1}] \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

que resulta em

$$(\mathbf{H} - \rho_{UV} \mathbf{I}) \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

sendo $\mathbf{H} = \Omega^{-1}(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})(\Omega^\top)^{-1}$. Obtendo-se os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ e os autovetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$ da matriz \mathbf{H} , então

$$\begin{cases} \rho_{UV} = \lambda_1 \\ \mathbf{z} = \mathbf{e}_1 \end{cases}.$$

Portanto, o vetor \mathbf{a} deve ser recuperado por

$$\mathbf{a} = (\Omega^\top)^{-1} \mathbf{z}. \quad (3.8)$$

Sob H_0 a matriz \mathbf{H} é igual a matriz nula, portanto, o vetor \mathbf{a} pode ser qualquer

vetor não nulo fixado.

Sob H_1 essa maximização levaria a um teste mais poderoso. Entretanto, o valor de \mathbf{a} é dependente de quantidades paramétricas desconhecidas.

Nesse trabalho foi escolhido um vetor $p \times 1$ de uns. Assim, com $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, tem-se que o estimador de ρ_{UV} é dado por (3.4) e a estatística do teste proposto é (3.5), que sob H_0 possui distribuição t de *Student* com $\nu = n - 2$ graus de liberdade.

Utilizando o estimador \mathbf{S} de Σ , ρ_{UV} e \mathbf{a} podem ser estimados determinando-se os autovalores e autovetores de $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\Omega}^{-1}(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22})(\hat{\Omega}^\top)^{-1}$, sendo a matriz $\hat{\Omega}$, o fator de Cholesky de $(\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22})$. Assim,

$$\begin{cases} \hat{\rho}_{UV} = \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\mathbf{a}} = (\hat{\Omega}^\top)^{-1} \mathbf{z} = (\hat{\Omega}^\top)^{-1} \hat{\mathbf{e}}_1 \end{cases} .$$

Como $U = \hat{\mathbf{a}}^\top \mathbf{X}_1 + \hat{\mathbf{a}}^\top \mathbf{X}_2 \sim N(\mu_U, 1)$ e $V = \hat{\mathbf{a}}^\top \mathbf{X}_1 - \hat{\mathbf{a}}^\top \mathbf{X}_2 \sim N(\mu_V, 1)$, então para testar a hipótese nula $H_0 : \rho_{UV} = 0$, a distribuição t é inadequada. A estatística do teste é

$$t_c = \frac{\hat{\rho}_{UV} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_{UV}^2}}, \quad (3.9)$$

que sob H_0 e com \mathbf{a} conhecido possui distribuição t de *Student* com $\nu = n - 2$ graus de liberdade, porém, nesse caso, não tem distribuição conhecida, pois \mathbf{a} é desconhecido. Testar a hipótese de que $\rho_{UV} = 0$, equivale a testar $H_0 : \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$. Assim, para usar esse resultado, em que o vetor \mathbf{a} é estimado, optou-se por obter a distribuição nula dessa estatística via *bootstrap*. Na próxima seção apresenta-se essa solução para o teste.

Para fins de comparação, optou-se por apresentar um teste ideal que nas situações do mundo real, seria impossível usá-lo. Esse teste será denotado por t_a e

será considerado um teste de referência, pois sua distribuição nula será exata, conforme explicações apresentadas na sequência. Assim, o teste t_c , cuja estatística é dada em (3.5) com escolha de $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ e o teste *bootstrap* que será apresentado na próxima seção serão comparados com este teste de referência. Sob H_0 , o teste t_a será o mesmo de t_c , ou seja, terá a mesma estatística em que se usará a escolha de $\mathbf{a} = \mathbf{1}$. Esta estatística possui distribuição nula exata t de *Student* com $\nu = n - 2$ graus de liberdade. Porém, sob H_1 , será determinado o vetor \mathbf{a} que maximiza a estatística do teste t de *Student*. É claro que essa escolha, que manterá a estatística final do teste, ainda com distribuição t de *Student*, deve ser fixa e dependente dos parâmetros Σ_{11} e Σ_{22} , conforme demonstrado nessa seção. Assim, a estatística do teste sob H_1 é dada por

$$t_a = \frac{\hat{\rho}_{UV} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_{UV}^2}}, \quad (3.10)$$

em que \mathbf{a} é dado em (3.8), que depende dos autovalores de $\mathbf{H} = \mathbf{\Omega}^{-1}(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})(\mathbf{\Omega}^T)^{-1}$, bem como $\hat{\rho}_{UV}$ é dado por $\hat{\rho}_{UV} = \mathbf{a}^T(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22})\mathbf{a}$. Logo, para se usar o teste t_a , primeiro, precisa-se conhecer se os dados em questão estão sob a hipótese nula ou alternativa. Segundo, é necessário conhecer os parâmetros Σ_{11} e Σ_{22} para se determinar \mathbf{a} . Assim, esse teste, como já dito, só tem finalidade de servir como teste de referência. Se os demais testes tiverem poder semelhante ou iguais a ele, então teriam-se testes ideais, que poderiam ser considerados ótimos nesse contexto.

3.1.2 Teste *bootstrap* não-paramétrico

3.1.2.1 Estatística original

Para construção do teste *bootstrap* não-paramétrico considere uma amostra aleatória *bootstrap* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$ independente e identicamente distribuída, de uma população qualquer, em que \mathbf{X}_j tem dimensão $(2p \times 1)$, $j = 1, \dots, n$, com vetor de média $\boldsymbol{\mu}_{(2p \times 1)}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_{(2p \times 2p)}$ positiva definida. Em seguida, fixou-se o número de reamostragens *bootstrap* em $B = 1000$ e calculou-se o estimador \mathbf{S} ($2p \times 2p$), da matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, dado por:

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \hline \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right].$$

Posteriormente, determinaram-se e isolaram-se as partições \mathbf{S}_{11} e \mathbf{S}_{22} de \mathbf{S} para o cálculo da matriz $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{22})(\hat{\boldsymbol{\Omega}}^\top)^{-1}$, sendo a matriz $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ o fator de Cholesky de $\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{22}$. Assim, o máximo autovalor de $\hat{\mathbf{H}}$ é dado por $\hat{\rho}_{UV} = \hat{\lambda}_1$. Dessa forma, calculou-se

$$t_{b_0} = \frac{\hat{\rho}_{UV} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_{UV}^2}} \quad (3.11)$$

para gerar a estatística original.

3.1.2.2 Distribuição nula de *bootstrap*

Nessa construção consideraram-se os seguintes passos:

(i) Inicialmente recebeu-se a amostra original $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$, conside-

rando $\mathbf{X}_j = [\mathbf{X}_{j(1)}^\top | \mathbf{X}_{j(2)}^\top]^\top$. Em seguida, obtiveram-se as médias amostrais

$$\bar{\mathbf{X}}_{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_{j(1)}}{n} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{X}}_{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_{j(2)}}{n}$$

para o cálculo dos resíduos

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{X}_j - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{(1)} \\ \bar{\mathbf{X}}_{(2)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(ii) Posteriormente sorteou-se uma amostra *bootstrap* com reposição da amostra original dos \mathbf{e}_j 's, ou seja, $\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \dots, \mathbf{X}_j^*, \dots, \mathbf{X}_n^*$, considerando \mathbf{X}_j^* de dimensão $(2p \times 1)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

(iii) Para a imposição da hipótese nula $H_0 : \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$, quando $\Sigma_{12} \neq 0$ considerou-se a partição $\mathbf{X}_j^* = [\mathbf{X}_{j(1)}^{*\top} | \mathbf{X}_{j(2)}^{*\top}]_{(2p \times 1)}^\top$. A hipótese nula é imposta reamostrando ao acaso cada partição aleatoriamente para compor a amostra de qualquer um dos grupos. A probabilidade de que uma das partições de um dos grupos seja sorteada para o outro foi de 50%. Logo, a amostra final de *bootstrap* será dada por \mathbf{X}_j^+ ($2p \times 1$), $j = 1, 2, \dots, n$, definido por

$$\mathbf{X}_j^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{j(2)}^* \\ \mathbf{X}_{j(1)}^* \end{bmatrix}, \quad \text{com probabilidade 50\% ou}$$

$$\mathbf{X}_j^+ = \mathbf{X}_j^*, \quad \text{com probabilidade 50\%}.$$

(iv) De posse da amostra $\mathbf{X}_1^+, \mathbf{X}_2^+, \dots, \mathbf{X}_j^+, \dots, \mathbf{X}_n^+$ calculou-se \mathbf{S}^+ , que é a matriz de covariâncias amostrais *bootstrap*. Posteriormente, tomaram-se as partições \mathbf{S}_{11}^+ e \mathbf{S}_{22}^+ e calculou-se $\hat{\mathbf{H}}^+ = \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}(\mathbf{S}_{11}^+ - \mathbf{S}_{22}^+)(\hat{\mathbf{\Omega}}^\top)^{-1}$, sendo a matriz $\hat{\mathbf{\Omega}}$ o

fator de Cholesky de $(\mathbf{S}_{11}^+ + \mathbf{S}_{22}^+)$. Assim, o máximo autovalor de $\hat{\mathbf{H}}^+$ é dado por $\hat{\rho}_{UV}^+ = \hat{\lambda}_1^+$.

Dessa forma, obteve-se a estatística

$$t_{b_k} = \frac{\hat{\rho}_{UV}^+ \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - (\hat{\rho}_{UV}^+)^2}}, \quad (3.12)$$

para a k -ésima amostra de *bootstrap*.

(v) Em seguida repetiram-se os passos de (i) a (iv), fazendo k variar de 1 a B . Os B valores da estatística t_{b_k} foram armazenados juntamente com o valor na amostra original t_{b_0} , na posição $B + 1$.

(vi) Dessa forma, o valor- p foi calculado por:

$$\text{valor-}p = \frac{\sum_{k=1}^{B+1} I(t_{b_k} \geq t_{b_0})}{B + 1},$$

em que $I(t_{b_k} \geq t_{b_0})$ é a função indicadora, que retorna 1 se $t_{b_k} \geq t_{b_0}$, e 0 caso contrário.

(vii) Retornou-se o valor da estatística t_{b_0} e o valor- p .

(viii) A decisão de rejeição da hipótese foi obtida confrontando-se o valor- p e o nível nominal de significância α . Se o valor- $p \leq \alpha$ rejeita-se H_0 .

O critério de *bootstrap* utilizado neste trabalho é idêntico ao apresentado por Cirillo et al. (2010), porém o que diferencia um trabalho do outro é a estatística do teste utilizada.

3.2 Simulação Monte Carlo

A simulação Monte Carlo realizada neste trabalho teve como intuito avaliar as taxas de erro tipo I e poder dos testes propostos (*Bootstrap* não-paramétrico

(t_{b_0}) , Maximização de ρ_{UV} para otimizar o \mathbf{a} paramétrico (t_a) e o teste (t_c), obtido fixando o \mathbf{a} num vetor de uns), com o objetivo de compará-los com os testes apresentados por Jiang e Sarkar (1998) (W_2 e W_5) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) (LRT, LRT₁, LRT₂ e LRT₃).

Optou-se neste trabalho pelo uso da mesma terminologia dos testes apresentados por Jiang e Sarkar (1998) (W_2 e W_5) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) (LRT, LRT₁, LRT₂ e LRT₃).

Na simulação sob H_0 pode-se usar qualquer valor não nulo para \mathbf{a} e sob H_1 existe um valor \mathbf{a} que é ótimo. Se o valor de \mathbf{a} for conhecido, espera-se que o teste t_a controle o erro tipo I e tenha um poder maior ou igual ao de t_c . Esse teste é usado para validar a teoria, embora não seja aplicável nas situações reais práticas.

Em cada simulação foram aplicados os testes (t_{b_0} , t_c e t_a) em um nível nominal de significância (α) fixado em 5% e 1%, para testar se a hipótese nula $H_0 : \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ quando $\Sigma_{12} \neq \mathbf{0}$. Para a simulação do teste t_{b_0} fixou-se o número de reamostragens em $B = 1000$.

Em todos os casos foram simuladas $N = 10000$ amostras e a proporção de rejeição da hipótese nula H_0 foi computada para cada teste ao longo de todas as simulações Monte Carlo. Os valores da taxa de erro tipo I empírica foram comparados com o valor nominal fixado em cada um dos casos. Todos os testes foram aplicados a cada uma dessas amostras, em cada uma das configurações formadas pela combinação dos valores de n e Σ , considerando os níveis de significância $\alpha = 0,05$ e $0,01$. As simulações foram realizadas no software R (R CORE TEAM, 2014).

3.2.1 Taxas de erro tipo I e poder dos testes t_a , t_c e t_{b_0}

Foram consideradas as taxas de erro tipo I e poder na avaliação do desempenho dos três testes: t_a , t_c e t_{b_0} e foram simuladas amostras aleatórias normais multivariadas, de tamanho n , dadas por $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$, em que $\mathbf{X}_j \in \mathbb{R}^{2p}$, com vetor média $\boldsymbol{\mu}_{(2p \times 1)}$ e covariância $\boldsymbol{\Sigma}_{(2p \times 2p)}$ positiva definida, $\mathbf{X} \sim N_{2p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Na simulação realizada neste trabalho e na apresentada por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), para $p = 2$, foram considerados os mesmos valores para os parâmetros como no estudo de Jiang e Sarkar (1998), tais como: $n \in \{10, 15, 20, 25, 50, 75, 100\}$,

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 1,0000 & -1,0000 & 0,7071 & -0,7071 \\ -1,0000 & 5,0000 & -0,7071 & 0,7071 \\ 0,7071 & -0,7071 & 1,0000 & -1,0000 \\ -0,7071 & 0,7071 & -1,0000 & 5,0000 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 1,0 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 1,0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_4 = \begin{bmatrix} 1,0000 & -1,0000 & 0,7071 & -1,4142 \\ -1,0000 & 5,0000 & -0,7071 & 1,4142 \\ 0,7071 & -0,7071 & 1,0000 & -1,0000 \\ -1,4142 & 1,4142 & -1,0000 & 5,0000 \end{bmatrix},$$

para estimar as taxas de erro tipo I, e

$$\boldsymbol{\Sigma}_5 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 1,0 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 1,0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_6 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 1,0 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 1,0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 3,0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_7 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 2,0 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 3,0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 4,0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_9 = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 1,0 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 1,0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{10} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 1,0 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 1,0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 3,0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11}^* = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 2,0 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 3,0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 4,0 \end{bmatrix},$$

para estimar o poder dos testes. Observe que, em Σ_1 e Σ_8 , $\Sigma_{21} = \Sigma_{12} = \mathbf{0}$, o que indica que as matrizes não são correlacionadas, de modo que a forma fechada do fator de correção m_1 existe, enquanto que em $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8$ tem-se $\Sigma_{21} = \Sigma_{12}$, assim a forma fechada do fator de correção m_2 existe. Já para as matrizes de covariâncias $\Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_9, \Sigma_{10}$ e Σ_{11}^* , a igualdade $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ já não é mais válida, sendo apenas válida a igualdade $\Sigma_{12} = (\Sigma_{21})^\top$, peculiar à maioria das matrizes de covariâncias observadas em circunstâncias reais.

Considere uma matriz de covariâncias Σ como sendo positiva definida e particione-a da seguinte forma:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right].$$

Quando a matriz de covariâncias tem dimensão (8×8) cada um dos quatro blocos $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22})$ tem dimensão (4×4) . E, quando a matriz de covariâncias tem dimensão (20×20) cada um dos quatro blocos tem dimensão (10×10) . Para que Σ seja positiva definida é necessário que todos os seus autovalores sejam números reais maiores que zero.

Para a simulação das taxas de erro tipo I e poder dos testes t_a, t_c e t_{b_0} foram construídas matrizes de covariâncias positivas definidas, considerando $p = 4$ e $p = 10$, $n \in \{10, 15, 20, 25, 50, 75, 100, 300, 500, 1000\}$ e nível de significância fixado em $\alpha = 5\%$ e 1% . A construção das matrizes de covariâncias foi dividida em duas partes:

(i) Construção das matrizes de covariâncias positivas definidas, com $p = 4$ e $p = 10$, para avaliar as taxas de erro tipo I dos testes t_a, t_c e t_{b_0} :

Na simulação da taxa de erro tipo I dos três testes foram construídas matrizes

de covariâncias positivas definidas considerando $p = 4$ e $p = 10$. Nesse caso, cada matriz de covariâncias foi considerada como uma matriz de correlações populacionais (ρ). A simulação foi feita sob a hipótese nula $H_0 : \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$, considerando as correlações de Σ_{12} como sendo valores menores ou iguais (de forma decrescente na linha e decrescente na coluna) às correlações fora da diagonal principal de Σ_{11} .

As correlações da diagonal principal de Σ_{11} são todas iguais a 1. Como Σ é simétrica tem-se que $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}^T$. Em cada simulação foram consideradas as configurações formadas pela combinação dos valores de Σ e n e níveis de significância (α) fixados em 5% e 1%.

Em todos os casos o número de simulações Monte Carlo foi $N = 10000$, ou seja, foram gerados 10000 valores- p . Com esses valores foi calculada a proporção de vezes em que H_0 foi erroneamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor- p foi menor que α .

(ii) Construção das matrizes de covariâncias positivas definidas, com $p = 4$ e $p = 10$, para avaliar os poderes dos testes t_a, t_c e t_{b_0} :

A simulação do poder dos três testes foi feita sob a hipótese alternativa $H_1 : \Sigma_{11} \neq \Sigma_{22}$. A construção da matriz de correlação para simular o poder dos testes foi feita da seguinte forma:

1) Inicialmente considerou-se uma matriz diagonal de desvios padrões σ_k , com $k = 1, 2, \dots, 2p$, definida por $V^{1/2}$, de forma que o máximo desvio padrão de Σ_{11} é menor que o mínimo desvio padrão de Σ_{22} .

2) A partir da matriz de correlação construída no item (i), diga-se ρ , construiu-se a matriz de covariâncias, fazendo o produto das matrizes $\Sigma = V^{1/2} \rho V^{1/2}$, que por sua vez é uma matriz positiva definida, usada na simulação do poder dos testes.

Em cada simulação foram consideradas as configurações formadas pela combinação dos valores de Σ e n e níveis de significância (α) fixados em 5% e 1%. Em todos os casos o número de simulações Monte Carlo foi $N = 10000$, ou seja, foram gerados 10000 valores- p . Com esses valores foi calculada a proporção de vezes em que H_0 foi acertadamente rejeitada, ou seja, a proporção de vezes que o valor- p foi menor que α .

Para facilitar o acompanhamento construíram-se as matrizes de correlação com índice par (sob H_0) e as matrizes de covariâncias com índice ímpar (sob H_1). As matrizes com índice par foram usadas para simular a taxa de erro tipo I, e as matrizes com índice ímpar para simular o poder dos testes.

Algumas matrizes de correlações, considerando $p = 4$, usadas na estimação do erro tipo I, foram construídas considerando a seguinte estrutura de correlação:

$$\rho = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array} \right],$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,0 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho^* & \rho^* & \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* & \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* & \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* & \rho^* & \rho^* \end{bmatrix},$$

e em módulo $\rho^* \leq \rho$.

A partir da matriz de correlações construiu-se a matriz de covariâncias, ambas com dimensão (8×8) , com o intuito de estimar o poder dos testes, considerando uma matriz diagonal (8×8) dos desvios padrões $\mathbf{V}^{1/2}$, definida como (3.13):

$$\mathbf{V}^{1/2} = \text{diag} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8), \quad (3.13)$$

em que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e σ_4 são desvios padrões menores que $\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7$ e σ_8 .

Para os desvios padrões foram escolhidos valores arbitrários que satisfazem a restrição imposta.

Abaixo seguem as matrizes de correlação e de covariância que foram construídas considerando $p = 4$.

1) A matriz ρ_{12} usada para simular o erro tipo I, dos testes, foi construída considerando $\rho = \rho^* = 0,9$. A partir da matriz de correlação ρ_{12} construiu-se a matriz de covariâncias Σ_{13} , usada na estimação do poder dos testes, considerando a matriz diagonal dos desvios padrões $\mathbf{V}^{1/2} = \text{diag} (4, 5, 2, 1, 16, 20, 30, 10)$. Assim, $\Sigma_{13} = \mathbf{V}^{1/2} \rho_{12} \mathbf{V}^{1/2}$.

2) A matriz de correlação ρ_{14} foi construída considerando $\rho = \rho^* = 0,8$ e a matriz diagonal dos desvios padrões $\mathbf{V}^{1/2} = \text{diag} (4, 5, 2, 1, 16, 20, 30, 10)$. Assim, a matriz de covariâncias $\Sigma_{15} = \mathbf{V}^{1/2} \rho_{14} \mathbf{V}^{1/2}$.

3) Na construção de ρ_{16} considerou-se $\rho = \rho^* = 0,5$, e para determinar Σ_{17} a matriz $\mathbf{V}^{1/2} = \text{diag} (3, 5, 2, 4, 16, 20, 40, 10)$ foi considerada.

Assim, $\Sigma_{17} = \mathbf{V}^{1/2} \rho_{16} \mathbf{V}^{1/2}$.

4) Para ρ_{18} considerou-se $\rho = \rho^* = 0,1$, e para determinar Σ_{19} a matriz diagonal dos desvios padrões $\mathbf{V}^{1/2} = \text{diag} (3, 5, 2, 4, 16, 20, 40, 10)$ foi considerada. Assim, $\Sigma_{19} = \mathbf{V}^{1/2} \rho_{18} \mathbf{V}^{1/2}$.

5) A matriz ρ_{20} foi construída considerando $\rho = \rho^* = 0$, e para determinar Σ_{21}^* definiu-se a matriz $\mathbf{V}^{1/2} = \text{diag} (2, 5, 4, 6, 15, 12, 20, 10)$.

Assim, $\Sigma_{21}^* = \mathbf{V}^{1/2} \rho_{20} \mathbf{V}^{1/2}$.

6) Para ρ_{22} considerou-se $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0,8$. Definiu-se a matriz Σ_{23} a partir

de $V^{1/2} = \text{diag}(2, 5, 4, 6, 15, 12, 20, 10)$. Logo, $\Sigma_{23} = V^{1/2} \rho_{22} V^{1/2}$.

7) Para ρ_{24} considerou-se $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0,5$. Definiu-se a matriz Σ_{25} a partir de $V^{1/2} = \text{diag}(1, 5, 7, 3, 15, 24, 10, 30)$. Assim, $\Sigma_{25} = V^{1/2} \rho_{24} V^{1/2}$.

8) Para ρ_{26} considerou-se $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0,1$. Definiu-se a matriz Σ_{27} a partir de $V^{1/2} = \text{diag}(1, 5, 7, 3, 15, 24, 10, 30)$. Logo, $\Sigma_{27} = V^{1/2} \rho_{26} V^{1/2}$.

9) A matriz ρ_{28} foi determinada considerando $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0$. Definiu-se a matriz Σ_{29} a partir de $V^{1/2} = \text{diag}(5, 6, 2, 4, 12, 15, 25, 20)$. Dessa forma, $\Sigma_{29} = V^{1/2} \rho_{28} V^{1/2}$.

10) Na construção da matriz de correlação ρ_{30} considerou-se outra estrutura de correlação definida por:

$$\rho = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho_1^* & \rho_2^* & \rho_3^* & \rho_4^* \\ \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho_2^* & \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* \\ \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* \\ \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* \\ \hline \rho_1^* & \rho_2^* & \rho_3^* & \rho_4^* & 1,0 & \rho & \rho & \rho \\ \rho_2^* & \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho & 1,0 & \rho & \rho \\ \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho & \rho & 1,0 & \rho \\ \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* & \rho & \rho & \rho & 1,0 \end{array} \right],$$

de forma que $\rho_1^* = 0,7$, $\rho_2^* = 0,6$, $\rho_3^* = 0,5$, $\rho_4^* = 0,4$, $\rho_5^* = 0,3$, $\rho_6^* = 0,2$ e $\rho_7^* = 0,1$. Definiu-se a matriz Σ_{31} a partir de ρ_{30} e $V^{1/2} = \text{diag}(5, 6, 2, 4, 12, 15, 25, 20)$. Dessa forma, $\Sigma_{31} = V^{1/2} \rho_{30} V^{1/2}$.

Algumas matrizes de correlações de dimensão (20×20) , usadas na estimação do erro tipo I, foram construídas considerando a seguinte estrutura de correlação:

$$\rho = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array} \right],$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,0 & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \\ \rho^* & \rho^* \end{bmatrix},$$

e em módulo $\rho^* \leq \rho$.

A partir da matriz de correlação construiu-se a matriz de covariâncias, ambas com dimensão (20×20) , com o intuito de estimar o poder dos testes, considerando uma matriz diagonal dos desvios padrões $\mathbf{V}^{1/2}$, de dimensão (20×20) , definida por (3.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{1/2} &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{15}, \sigma_{16}, \sigma_{17}, \sigma_{18}, \sigma_{19}, \sigma_{20}) \\ &= \text{diag}(4, 5, 2, 1, 16, 20, 30, 10, 12, 16, 40, 45, 60, 55, 41, 39, 35, 65, 100, 50). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os valores dos desvios padrões da matriz $V^{1/2}$, quando $p = 10$, foram escolhidos arbitrariamente, de forma que satisfazem a restrição imposta: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9$ e σ_{10} são desvios padrões menores que $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{15}, \sigma_{16}, \sigma_{17}, \sigma_{18}, \sigma_{19}$ e σ_{20} .

Abaixo seguem as matrizes de correlação e de covariâncias que foram construídas, considerando $p = 10$.

1) A matriz de correlação ρ_{32} usada para simular o erro tipo I, dos testes, foi construída considerando $\rho = \rho^* = 0,9$. A partir da matriz de correlação ρ_{32} construiu-se a matriz de covariâncias Σ_{33} , usada na estimação do poder dos testes, considerando a matriz diagonal $V^{1/2}$ definida em (3.14). Com isso pode-se afirmar que $\Sigma_{33} = V^{1/2} \rho_{32} V^{1/2}$.

2) Na construção da matriz ρ_{34} foi considerado $\rho = \rho^* = 0,8$. Para definir Σ_{35} considerou-se a matriz diagonal $V^{1/2}$ definida em (3.14). Dessa forma, tem-se $\Sigma_{35} = V^{1/2} \rho_{34} V^{1/2}$.

3) Posteriormente, considerou $\rho = \rho^* = 0,5$ para definir a matriz de correlação ρ_{36} . Em seguida, determinou-se a matriz de covariâncias Σ_{37} a partir de $V^{1/2}$, definida em (3.14), e de Σ_{36}^* por: $\Sigma_{37} = V^{1/2} \rho_{36} V^{1/2}$.

4) A matriz de correlação ρ_{38} foi definida considerando $\rho = \rho^* = 0,1$. A partir da matriz Σ_{38} e de $V^{1/2}$ definida em (3.14) determinou-se a matriz de covariâncias Σ_{39} , e definida por: $\Sigma_{39} = V^{1/2} \rho_{38} V^{1/2}$.

5) Da mesma forma, ρ_{40} foi definida considerando $\rho = \rho^* = 0$. E, Σ_{41} foi determinada por ρ_{40} e $V^{1/2}$, e definida em (3.14) por: $\Sigma_{41} = V^{1/2} \rho_{40} V^{1/2}$.

6) A matriz ρ_{42} foi definida considerando $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0,8$. Assim, Σ_{43} pode ser determinada, a partir de ρ_{42} e $V^{1/2}$ em (3.14), por: $\Sigma_{43} = V^{1/2} \rho_{42} V^{1/2}$.

7) Para a construção da matriz ρ_{44} foi fixado $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0,5$. A matriz Σ_{45} foi determinada através de Σ_{44} e $V^{1/2}$ em (3.14), e definida por: $\Sigma_{45} =$

$$V^{1/2} \rho_{44} V^{1/2}.$$

8) A matriz ρ_{46} foi definida considerando $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0,1$. Assim, Σ_{47} pode ser determinada, a partir de ρ_{46} e $V^{1/2}$ em (3.14), por: $\Sigma_{47} = V^{1/2} \rho_{46} V^{1/2}$.

9) Da mesma forma, ρ_{48} foi definida considerando $\rho = 0,9$ e $\rho^* = 0$. E, Σ_{49} foi determinada por ρ_{48} e $V^{1/2}$ definida em (3.14), por: $\Sigma_{49} = V^{1/2} \rho_{48} V^{1/2}$.

10) Na construção da matriz de correlação ρ_{50} considerou-se outra estrutura de correlação definida por:

$$\rho = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right],$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1,0 & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & \rho & 1,0 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho & \rho \\ \rho & 1,0 & \rho \\ \rho & 1,0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} \rho_1^* & \rho_2^* & \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* \\ \rho_2^* & \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* \\ \rho_3^* & \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* \\ \rho_4^* & \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* \\ \rho_5^* & \rho_6^* & \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* & \rho_{14}^* \\ \rho_6^* & \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* & \rho_{14}^* & \rho_{15}^* \\ \rho_7^* & \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* & \rho_{14}^* & \rho_{15}^* & \rho_{16}^* \\ \rho_8^* & \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* & \rho_{14}^* & \rho_{15}^* & \rho_{16}^* & \rho_{17}^* \\ \rho_9^* & \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* & \rho_{14}^* & \rho_{15}^* & \rho_{16}^* & \rho_{17}^* & \rho_{18}^* \\ \rho_{10}^* & \rho_{11}^* & \rho_{12}^* & \rho_{13}^* & \rho_{14}^* & \rho_{15}^* & \rho_{16}^* & \rho_{17}^* & \rho_{18}^* & \rho_{19}^* \end{bmatrix},$$

de forma que $\rho = 0,8$, $\rho_1^* = 0,4$, $\rho_2^* = 0,38$, $\rho_3^* = 0,37$, $\rho_4^* = 0,36$, $\rho_5^* = 0,35$,

$\rho_6^* = 0,34, \rho_7^* = 0,29, \rho_8^* = 0,28, \rho_9^* = 0,25, \rho_{10}^* = 0,23, \rho_{11}^* = 0,18, \rho_{12}^* = 0,15,$
 $\rho_{13}^* = 0,13, \rho_{14}^* = 0,12, \rho_{15}^* = 0,1, \rho_{16}^* = 0,09, \rho_{17}^* = 0,08, \rho_{18}^* = 0,07$ e $\rho_{19}^* = 0,05$.

A partir de ρ_{50} determinou-se Σ_{51} , considerando $V^{1/2}$, definida em (3.14).
 Dessa forma, $\Sigma_{51} = V^{1/2} \rho_{50} V^{1/2}$.

11) Considerou-se a mesma estrutura de correlação, definida no item (10),
 acima, para construir a matriz de correlação ρ_{52} , em que: $\rho = 0,5, \rho_1^* = 0,4,$
 $\rho_2^* = 0,38, \rho_3^* = 0,37, \rho_4^* = 0,36, \rho_5^* = 0,35, \rho_6^* = 0,34, \rho_7^* = 0,29, \rho_8^* = 0,28,$
 $\rho_9^* = 0,25, \rho_{10}^* = 0,23, \rho_{11}^* = 0,18, \rho_{12}^* = 0,15, \rho_{13}^* = 0,13, \rho_{14}^* = 0,12, \rho_{15}^* = 0,1,$
 $\rho_{16}^* = 0,09, \rho_{17}^* = 0,08, \rho_{18}^* = 0,07$ e $\rho_{19}^* = 0,05$.

A partir de ρ_{52} determinou-se Σ_{53} , considerando $V^{1/2}$, definida em (3.14).
 Dessa forma, $\Sigma_{53} = V^{1/2} \rho_{52} V^{1/2}$.

O processo de simulação de Monte Carlo foi repetido 10000 vezes e os testes
 acima foram aplicados em cada amostra. Os níveis de significância nominais,
 α , foram fixados em 1% e 5%. As taxas de erro tipo I foram calculadas para
 cada teste, como a proporção de vezes que a hipótese de nulidade foi (falsamente)
 rejeitada, e esta foi comparada com o nível de significância nominal. Uma vez que
 estas taxas de erro tipo I foram estimadas usando simulações de Monte Carlo, elas
 não são livres de erro.

Os testes binomiais exatos foram aplicados usando o software Sisvar, criado
 por Ferreira (2011b), considerando um nível de significância nominal de 1% para
 a hipótese $H_0 : \alpha = 5\%$ contra $H_1 : \alpha \neq 5\%$ e $H_0 : \alpha = 1\%$ versus $H_1 : \alpha \neq 1\%$
 são aplicados para as taxas de erro de tipo I. Se a hipótese nula for rejeitada e
 as taxas de erro tipo I observadas forem consideradas de forma significativa ($p <$
 $0,01$) inferior ao nível nominal, o teste deverá ser considerado conservativo; se as
 taxas de erro tipo I observados forem consideradas significativamente ($p < 0,01$)
 superior à do nível nominal, o teste deverá ser considerado liberal; e se as taxas de

erro tipo I observadas não foram significativamente ($p > 0,01$) diferente do nível nominal, o teste deverá ser considerado exato (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010).

Se y representa o número de hipóteses nulas rejeitadas em $N = 10000$ simulações de Monte Carlo para o nível de significância α nominal, então obtém-se a estatística do teste, utilizando-se a relação entre F e a distribuição binomial, com probabilidade de sucesso $p = \alpha$, dada por

$$F = \left(\frac{y + 1}{N - y} \right) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right),$$

que, sob a hipótese nula, segue uma distribuição F com $\nu_1 = 2(N - y)$ e $\nu_2 = 2(y + 1)$ graus de liberdade. Se $F \leq F_{0,005}$ ou $F \geq F_{0,995}$, a hipótese nula deve ser rejeitada ao nível de significância de 1%, onde $F_{0,005}$ e $F_{0,995}$ são quantis da distribuição F com ν_1 e ν_2 graus de liberdade (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010).

Na seção 4 são apresentados resultados de simulação para avaliar a performance dos testes propostos (t_{b_0} , t_c e t_a), com o objetivo de compará-los com os testes apresentados por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Simulação Monte Carlo

Nessa seção são apresentados os resultados de simulação das taxas de erro tipo I e poder dos testes propostos neste trabalho (t_{b_0} , t_c e t_a), com o objetivo de compará-los com os testes LRT, LRT₁, LRT₂, LRT₃, propostos por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), e W_2 e W_5 , propostos por Jiang e Sarkar (1998). Espera-se que os testes propostos tenham bom desempenho e possam ser competitivos e até mesmo venham a suplantiar as soluções numéricas e computacionalmente intensivas existentes.

Na simulação de níveis de significância e poderes do teste da razão de verossimilhança e suas modificações mencionadas na seção 2, Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) geraram 50000 conjuntos de amostras aleatórias de tamanho n de uma população normal 4-variada com vetor de média zero e matriz de covariâncias comum Σ , usando SAS/IML e SAS/STAT (SAS INSTITUTE INCORPORATED, 1997, versão 6.09E). A proporção de vezes que um resultado do teste rejeita H_0 fornece uma aproximação do nível de significância nominal (quando Σ satisfaz H_0) ou do poder (quando Σ não satisfaz H_0) deste teste. Os resultados para W_2 e W_5 são mostrados por Jiang e Sarkar (1998). Esses testes foram usados para a comparação com os testes propostos nesse trabalho, também aplicados nessas mesmas circunstâncias. Convém salientar que se trata da comparação da matriz de covariâncias de duas populações normais bidimensionais correlacionadas.

Para avaliar o desempenho dos testes, as taxas de erro tipo I e poder foram computadas e são apresentadas e discutidas separadamente nas subseções 4.1.1 e 4.1.2.

4.1.1 Erro tipo I

De acordo com Oliveira e Ferreira (2010), o tamanho do teste é uma característica fundamental para o seu desempenho. Se o teste tiver tamanho real equivalente ao tamanho nominal, α , então é considerado exato. Testes que têm um tamanho real menor do que o nominal são considerados conservativos, e aqueles que apresentam taxas de erro tipo I maiores do que os níveis nominais α são considerados liberais. Pode-se observar que para $N = 10000$ simulações e $\alpha = 5\%$, valores inferiores a 445 e superiores a 559 rejeições levam a rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 5\%$, considerando o nível de significância de 1% para o teste. E valores inferiores a 76 e superiores a 129 levam à rejeição da hipótese nula $H_0 : \alpha = 1\%$, considerando o mesmo nível de significância de 1% para o teste realizado.

Para avaliar a taxa de erro tipo I e poder dos testes, $(t_a, t_c$ e $t_{b_0})$ foram utilizadas rotinas implementadas usando o programa R (R CORE TEAM, 2014), que estão apresentadas nos APÊNDICES A, B e C.

O teste t_c apresenta a característica importante em relação ao teste t_{b_0} e aos testes apresentados por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), que é possibilitar aplicá-lo e, portanto, realizar simulações Monte Carlo de erro tipo I e poder, quando $n < p$. Portanto, para as configurações avaliadas, para simulação Monte Carlo de erro tipo I e poder, não foi possível avaliar o teste *bootstrap* não-paramétrico t_{b_0} nos seguintes casos: (i) quando $p = 4$ e $n = 10$; e (ii) quando $p = 10$ e para $n = 10$ e $n = 15$. Isso é devido a reamostragem, que nas proximidades do limiar gera singularidade nas matrizes.

Na Tabela 1 estão apresentadas, em porcentagem, as taxas de erro tipo I de nove testes de igualdade de matrizes de covariâncias: $t_a, t_c, t_{b_0}, LRT, LRT_1, LRT_2, LRT_3, W_2$ e W_5 , obtidas em 10000 simulações de Monte Carlo, em função de (n) e $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e $\alpha = 5\%$. Pode-se verificar que os testes t_a, t_c, t_{b_0}, LRT_3 e W_2

controlaram o erro tipo I em nível inferior ou no máximo igual ao valor nominal de 5%. Em todos os casos, os testes t_a e t_c mostraram-se exatos, e os testes t_{b_0} , LRT_3 e W_2 foram conservativos em algumas situações. Como pode ser visto na Tabela 1, os testes t_a , t_c , t_{b_0} , LRT_3 e W_2 se sobressaem em relação aos demais, por controlar o erro tipo I, mesmo quando $n = 10$. Os testes LRT , LRT_1 , LRT_2 e W_5 mostraram-se liberais em alguns casos. Apesar disso, segundo Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), os testes LRT_2 e W_5 podem ser recomendados quando $n \geq 20$, com LRT_2 tendo uma ligeira vantagem sobre W_5 . Para $n = 100$, observou-se que, em todas as configurações de Σ avaliadas, os tamanhos dos testes não foram significativamente diferentes dos valores nominais de 5%.

No geral, os testes t_a e t_c apresentaram melhor desempenho em relação ao controle de erro tipo I, em relação aos demais, pois podem ser considerados exatos. Os testes LRT , LRT_1 , LRT_2 e W_5 foram liberais quando $n \leq 75$, $n \leq 50$, $n \leq 20$ e $n \leq 25$, respectivamente. Por fim, o teste *bootstrap* não-paramétrico t_{b_0} foi conservativo para amostras pequenas ($n = 25$) e tendeu a ser exato para amostras maiores ($n = 75$).

Tabela 1 Taxas de erro tipo I de nove testes de igualdade de matrizes de covariâncias: LRT , LRT_1 , LRT_2 , LRT_3 , W_2 , W_5 , t_a , t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e valor nominal de significância de 5%.

Σ	n	LRT^a	LRT_1^a	LRT_2^a	LRT_3^a	W_2^b	W_5^b	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_1	10	14,00*	10,80*	7,50*	3,80 ⁺	5,30 ^{ns}	7,20*	4,56 ^{ns}	4,70 ^{ns}	1,68 ⁺
	15	9,20*	7,40*	5,70*	3,80 ⁺	4,20 ⁺	6,10*	4,52 ^{ns}	5,35 ^{ns}	2,55 ⁺
	20	8,10*	6,90*	5,70*	4,20 ⁺	4,00 ⁺	5,90*	4,90 ^{ns}	5,28 ^{ns}	2,71 ⁺
	25	7,30*	6,30*	5,50 ^{ns}	4,30 ⁺	4,00 ⁺	5,70*	5,08 ^{ns}	5,17 ^{ns}	3,90 ⁺
	50	6,10*	5,70*	5,30 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,20 ⁺	5,20 ^{ns}	4,77 ^{ns}	5,04 ^{ns}	4,50 ^{ns}
	75	5,60*	5,30 ^{ns}	5,10 ^{ns}	4,70 ^{ns}	4,50 ^{ns}	5,10 ^{ns}	5,56 ^{ns}	5,04 ^{ns}	4,46 ^{ns}
	100	5,40 ^{ns}	5,30 ^{ns}	5,10 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,70 ^{ns}	5,20 ^{ns}	5,48 ^{ns}	5,40 ^{ns}	4,70 ^{ns}

Tabela 1 , “continua”

Σ	n	LRT ^a	LRT ₁ ^a	LRT ₂ ^a	LRT ₃ ^a	W ₂ ^b	W ₅ ^b	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_2	10	13,50*	10,20*	7,10*	3,70 ⁺	3,70 ⁺	7,40*	4,83 ^{ns}	5,35 ^{ns}	1,34 ⁺
	15	9,70*	7,90*	6,10*	4,00 ⁺	3,30 ⁺	6,40*	5,28 ^{ns}	5,07 ^{ns}	2,58 ⁺
	20	8,30*	7,20*	6,00*	4,50 ^{ns}	3,30 ⁺	6,00*	4,63 ^{ns}	5,32 ^{ns}	2,97 ⁺
	25	7,40*	6,50*	5,50 ^{ns}	4,40 ⁺	3,30 ⁺	5,70*	4,77 ^{ns}	4,91 ^{ns}	3,90 ⁺
	50	6,20*	5,80*	5,30 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,00 ⁺	5,40 ^{ns}	5,08 ^{ns}	4,83 ^{ns}	3,92 ⁺
	75	5,70*	5,40 ^{ns}	5,20 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,30 ⁺	5,30 ^{ns}	4,80 ^{ns}	5,19 ^{ns}	4,61 ^{ns}
	100	5,50 ^{ns}	5,30 ^{ns}	5,10 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,50 ^{ns}	5,20 ^{ns}	4,87 ^{ns}	5,03 ^{ns}	4,54 ^{ns}
Σ_3	10	13,80*	10,50*	7,20*	3,90 ⁺	5,00 ^{ns}	7,50*	5,08 ^{ns}	5,06 ^{ns}	1,65 ⁺
	15	9,50*	7,80*	6,00*	4,00 ⁺	4,20 ⁺	6,50*	5,35 ^{ns}	4,76 ^{ns}	2,76 ⁺
	20	8,30*	7,10*	5,80*	4,40 ⁺	3,80 ⁺	5,90*	4,95 ^{ns}	5,13 ^{ns}	3,16 ⁺
	25	7,30*	6,40*	5,50 ^{ns}	4,40 ⁺	4,00 ⁺	5,90*	4,93 ^{ns}	4,83 ^{ns}	3,47 ⁺
	50	6,10*	5,70*	5,30 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,30 ⁺	5,40 ^{ns}	4,92 ^{ns}	5,14 ^{ns}	4,02 ⁺
	75	5,90*	5,60*	5,30 ^{ns}	5,00 ^{ns}	4,50 ^{ns}	5,30 ^{ns}	5,22 ^{ns}	5,25 ^{ns}	4,53 ^{ns}
	100	5,50 ^{ns}	5,40 ^{ns}	5,20 ^{ns}	4,90 ^{ns}	4,60 ^{ns}	5,10 ^{ns}	4,86 ^{ns}	5,11 ^{ns}	4,56 ^{ns}
Σ_4	10	13,20*	10,30*	7,00*	3,30 ⁺	4,00 ⁺	7,50*	4,85 ^{ns}	5,04 ^{ns}	1,60 ⁺
	15	9,60*	7,80*	6,10*	4,10 ⁺	3,40 ⁺	6,50*	5,32 ^{ns}	5,30 ^{ns}	2,60 ⁺
	20	8,30*	7,00*	5,90*	4,30 ⁺	3,40 ⁺	6,00*	4,88 ^{ns}	5,32 ^{ns}	3,11 ⁺
	25	7,50*	6,60*	5,60*	4,50 ^{ns}	3,50 ⁺	5,70*	5,01 ^{ns}	4,93 ^{ns}	3,75 ⁺
	50	6,10*	5,70*	5,30 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,10 ⁺	5,40 ^{ns}	5,28 ^{ns}	4,70 ^{ns}	4,16 ⁺
	75	5,60*	5,40 ^{ns}	5,10 ^{ns}	4,80 ^{ns}	4,50 ^{ns}	5,40 ^{ns}	4,77 ^{ns}	5,05 ^{ns}	4,75 ^{ns}
	100	5,50 ^{ns}	5,30 ^{ns}	5,10 ^{ns}	4,90 ^{ns}	4,60 ^{ns}	5,20 ^{ns}	5,07 ^{ns}	4,96 ^{ns}	4,53 ^{ns}

^a Taxas de erro tipo I dos testes LRT, LRT₁, LRT₂ e LRT₃, apresentados por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999).

^b Taxas de erro tipo I dos testes W₂ e W₅, apresentados por Jiang e Sarkar (1998).

* O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e maior que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

⁺ O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e menor que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

^{ns} O valor não pode ser considerado estatisticamente diferente do α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

Para o nível nominal de significância de 1%, o teste t_c apresentou taxa de erro tipo I igual ao valor nominal, em todas as configurações avaliadas. Pode-se ob-

servar, na maioria das situações, que o teste t_a pode ser considerado exato, exceto para as configurações: Σ_2 e $n = 75$; Σ_3 e $n = 100$, em que a taxa de erro tipo I foi significativamente inferior ao valor nominal, indicando teste conservativo, e para Σ_3 e $n = 75$, em que a taxa de erro tipo I superou significativamente o valor nominal, indicando desempenho liberal. Por fim, pode-se verificar que o teste *bootstrap* não-paramétrico t_{b_0} foi conservativo, na maioria dos casos, para pequenas amostras e exato para amostras maiores. Esses resultados estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 Taxas de erro tipo I de três testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_a , t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais n , diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e valor nominal de significância de 1%.

Σ	n	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_1	10	0,95 ^{ns}	1,01 ^{ns}	0,06 ⁺
	15	0,90 ^{ns}	1,11 ^{ns}	0,16 ⁺
	20	1,00 ^{ns}	1,00 ^{ns}	0,27 ⁺
	25	1,18 ^{ns}	1,01 ^{ns}	0,41 ⁺
	50	0,91 ^{ns}	1,14 ^{ns}	0,75 ⁺
	75	1,22 ^{ns}	0,92 ^{ns}	0,78 ^{ns}
	100	1,01 ^{ns}	1,08 ^{ns}	0,75 ⁺
	300	1,15 ^{ns}	1,02 ^{ns}	0,87 ^{ns}
	500	1,07 ^{ns}	0,93 ^{ns}	0,89 ^{ns}
	1000	0,83 ^{ns}	0,84 ^{ns}	1,05 ^{ns}

Tabela 2 , “continua”

Σ	n	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_2	10	0,99 ^{ns}	1,06 ^{ns}	0,02 ⁺
	15	0,85 ^{ns}	0,90 ^{ns}	0,20 ⁺
	20	0,99 ^{ns}	1,13 ^{ns}	0,30 ⁺
	25	0,86 ^{ns}	0,95 ^{ns}	0,40 ⁺
	50	0,93 ^{ns}	0,98 ^{ns}	0,62 ⁺
	75	0,73 ⁺	0,83 ^{ns}	0,70 ⁺
	100	0,94 ^{ns}	0,98 ^{ns}	0,76 ⁺
	300	0,97 ^{ns}	0,91 ^{ns}	1,02 ^{ns}
	500	0,96 ^{ns}	1,14 ^{ns}	0,89 ^{ns}
	1000	1,05 ^{ns}	1,07 ^{ns}	1,12 ^{ns}
Σ_3	10	1,09 ^{ns}	1,00 ^{ns}	0,05 ⁺
	15	1,16 ^{ns}	1,01 ^{ns}	0,21 ⁺
	20	1,07 ^{ns}	1,07 ^{ns}	0,29 ⁺
	25	0,90 ^{ns}	0,96 ^{ns}	0,42 ⁺
	50	0,89 ^{ns}	1,04 ^{ns}	0,49 ⁺
	75	1,35 [*]	0,97 ^{ns}	0,67 ⁺
	100	0,71 ⁺	1,02 ^{ns}	0,66 ⁺
	300	0,96 ^{ns}	0,97 ^{ns}	0,87 ^{ns}
	500	1,05 ^{ns}	1,05 ^{ns}	0,84 ^{ns}
	1000	0,99 ^{ns}	1,21 ^{ns}	1,13 ^{ns}

Tabela 2 , “continua”

Σ	n	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_4	10	0,86 ^{ns}	0,93 ^{ns}	0,01 ⁺
	15	1,06 ^{ns}	0,87 ^{ns}	0,15 ⁺
	20	1,01 ^{ns}	1,07 ^{ns}	0,25 ⁺
	25	0,97 ^{ns}	0,89 ^{ns}	0,41 ⁺
	50	1,15 ^{ns}	1,14 ^{ns}	0,71 ⁺
	75	1,00 ^{ns}	1,04 ^{ns}	0,76 ⁺
	100	1,07 ^{ns}	1,04 ^{ns}	0,81 ^{ns}
	300	0,90 ^{ns}	0,97 ^{ns}	0,85 ^{ns}
	500	1,04 ^{ns}	1,23 ^{ns}	0,83 ^{ns}
	1000	1,06 ^{ns}	1,18 ^{ns}	1,16 ^{ns}

* O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e maior que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

+ O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e menor que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

^{ns} O valor não pode ser considerado estatisticamente diferente do α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) fizeram um estudo de simulação da taxa de erro tipo I dos testes com nível de significância de 1% e 10%, mas não apresentaram os resultados de simulação para a taxa de erro tipo I. Segundo Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), estes resultados, embora não relatados, essencialmente corroboram os resultados que foram observados para a taxa nominal de 5% de significância.

Nas configurações avaliadas por Cirillo et al. (2010) para $q = 2$, em relação às taxas de erro tipo I, pode-se afirmar que para todos os testes propostos por eles, em que as matrizes de covariâncias foram geradas por meio do método *bootstrap*, constatou-se que foram eficientes no controle do erro tipo I.

A discussão em relação aos testes propostos por Cirillo et al. (2010) foi feita analisando suas performances, assumindo que as covariâncias foram determinadas

a partir de uma estrutura de correlação, cujos valores das correlações foram classificados em alto e baixo, respectivamente, já mencionados por meio das correlações globais $\rho = 0,20$ e $\rho = 0,80$.

Considerando $q = 2$ populações, em situações bivariadas, Cirillo et al. (2010) observaram que o efeito da correlação global dado pelo valor de $\rho = 0,80$, os testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método *bootstrap* foram conservativos considerando $n = 100$. Reduzindo o valor dessa correlação para $\rho = 0,20$, os testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método *bootstrap* também foram conservativos, independentemente do tamanho amostral.

Os testes apresentados por Cirillo et al. (2010) foram adequados, porém pouco poderosos em relação aos testes apresentados por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999). Segundo Cirillo et al. (2010) isso se deve ao fato de os resultados obtidos por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), em relação aos testes propostos por Bartlett (1937), Box (1949) e Krishnaiah (1975) mostrarem que não controlaram o erro tipo I. Isto se deu para todas as amostras definidas em $n \in \{10, 15, 20, 25, 50, 75 \text{ e } 100\}$, incluindo diversas estruturas de correlação.

Os testes assintóticos apresentados por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) controlaram o erro tipo I para amostras maiores que 50 ($n > 50$), com probabilidades próximas ao nível nominal adotado.

Para os testes propostos por Cirillo et al. (2010), pode-se observar que para amostras de tamanhos menores que 50 ($n < 50$) os testes foram conservativos, com $\rho = 0,80$, considerando como critério a razão dos determinantes. Fixando $\rho = 0,20$ a probabilidade de ocorrência do erro tipo I se aproximou mais do valor nominal de 5% quando $n = 50$. No entanto, de acordo com Cirillo et al. (2010), em situações de alta correlação, observou-se um padrão mais conservativo dos testes baseados na razão dos traços do que os construídos sobre a razão dos determinan-

tes; portanto, espera-se que haja um menor poder para os testes em que a razão dos traços é considerada. Os testes mostrados em Cirillo et al. (2010) tenderam a ser mais conservativos que os testes t_c e t_{b_0} , em todas as situações analisadas.

Na Tabela 3 estão apresentados, em porcentagem, as taxas de erro tipo I dos dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: teste t_c e teste t_{b_0} . Esses testes foram avaliados em função do tamanho da amostra $n \in \{10, 15, 20, 25, 50, 75, 100, 300, 500 \text{ e } 1000\}$, e das matrizes de correlações para $p = 4$: $\rho_{12}, \rho_{14}, \rho_{16}, \rho_{18}, \rho_{20}, \rho_{22}, \rho_{24}, \rho_{26}, \rho_{28}$ e ρ_{30} , resultantes de $N = 10000$ simulações Monte Carlo, considerando o nível nominal de significância de 5%.

Pode-se observar que o teste t_c controlou o erro tipo I, em nível igual ao valor nominal de 5%, para todas as configurações avaliadas, o que indica um teste exato. Para amostras menores ou iguais a 100 o teste *bootstrap* não-paramétrico t_{b_0} apresentou taxas significativamente menores do que 5%, indicando um teste conservativo. Para $n \geq 300$, o teste t_{b_0} apresentou taxas de erro tipo I iguais ao valor nominal, o que indica um teste exato.

Tabela 3 Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(8 \times 8)}$ e valor nominal de significância de 5%.

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{12}	10	5,18 ^{ns}	-
	15	5,30 ^{ns}	1,13 ⁺
	20	5,15 ^{ns}	1,80 ⁺
	25	5,13 ^{ns}	1,97 ⁺
	50	5,04 ^{ns}	3,46 ⁺
	75	5,21 ^{ns}	3,65 ⁺
	100	5,02 ^{ns}	3,86 ⁺
	300	5,09 ^{ns}	4,59 ^{ns}
	500	4,93 ^{ns}	4,67 ^{ns}
	1000	5,05 ^{ns}	4,92 ^{ns}
ρ_{14}	10	4,87 ^{ns}	-
	15	4,87 ^{ns}	1,22 ⁺
	20	5,10 ^{ns}	1,76 ⁺
	25	4,82 ^{ns}	2,32 ⁺
	50	5,19 ^{ns}	2,83 ⁺
	75	5,21 ^{ns}	3,95 ⁺
	100	5,07 ^{ns}	3,97 ⁺
	300	5,01 ^{ns}	4,56 ^{ns}
	500	5,07 ^{ns}	4,57 ^{ns}
	1000	5,15 ^{ns}	4,79 ^{ns}

Tabela 3 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{16}	10	4,80 ^{ns}	-
	15	4,87 ^{ns}	1,00 ⁺
	20	5,03 ^{ns}	1,69 ⁺
	25	4,82 ^{ns}	2,22 ⁺
	50	5,20 ^{ns}	3,34 ⁺
	75	5,09 ^{ns}	3,87 ⁺
	100	5,01 ^{ns}	4,15 ⁺
	300	5,26 ^{ns}	4,50 ⁺
	500	4,98 ^{ns}	4,88 ^{ns}
	1000	5,08 ^{ns}	5,05 ^{ns}
ρ_{18}	10	5,11 ^{ns}	-
	15	5,58 ^{ns}	1,04 ⁺
	20	5,12 ^{ns}	1,72 ⁺
	25	5,11 ^{ns}	2,32 ⁺
	50	5,01 ^{ns}	3,38 ⁺
	75	4,34 ⁺	3,62 ⁺
	100	4,98 ^{ns}	4,13 ⁺
	300	5,31 ^{ns}	4,67 ^{ns}
	500	4,75 ^{ns}	4,70 ^{ns}
	1000	5,06 ^{ns}	4,84 ^{ns}
ρ_{20}	10	4,76 ^{ns}	-
	15	4,91 ^{ns}	1,08 ⁺
	20	4,94 ^{ns}	1,89 ⁺
	25	4,79 ^{ns}	2,31 ⁺
	50	5,16 ^{ns}	3,41 ⁺
	75	5,15 ^{ns}	3,85 ⁺
	100	5,21 ^{ns}	4,13 ⁺
	300	5,02 ^{ns}	4,89 ^{ns}
	500	5,06 ^{ns}	4,99 ^{ns}
	1000	4,93 ^{ns}	4,65 ^{ns}

Tabela 3 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b0}
ρ_{22}	10	5,28 ^{ns}	-
	15	4,74 ^{ns}	0,98 ⁺
	20	4,73 ^{ns}	1,67 ⁺
	25	4,71 ^{ns}	2,25 ⁺
	50	4,93 ^{ns}	3,30 ⁺
	75	4,88 ^{ns}	3,85 ⁺
	100	4,81 ^{ns}	3,91 ⁺
	300	5,48 ^{ns}	4,77 ^{ns}
	500	4,80 ^{ns}	4,88 ^{ns}
	1000	4,98 ^{ns}	4,74 ^{ns}
ρ_{24}	10	4,92 ^{ns}	-
	15	4,90 ^{ns}	1,11 ⁺
	20	5,39 ^{ns}	1,65 ⁺
	25	4,83 ^{ns}	2,17 ⁺
	50	5,27 ^{ns}	3,00 ⁺
	75	5,17 ^{ns}	3,76 ⁺
	100	5,05 ^{ns}	4,25 ⁺
	300	5,08 ^{ns}	4,63 ^{ns}
	500	5,29 ^{ns}	4,66 ^{ns}
	1000	4,87 ^{ns}	4,70 ^{ns}
ρ_{26}	10	4,68 ^{ns}	-
	15	5,06 ^{ns}	1,17 ⁺
	20	4,78 ^{ns}	1,56 ⁺
	25	5,27 ^{ns}	2,29 ⁺
	50	5,46 ^{ns}	3,57 ⁺
	75	4,86 ^{ns}	3,87 ⁺
	100	5,24 ^{ns}	4,03 ⁺
	300	4,86 ^{ns}	4,45 ⁺
	500	4,95 ^{ns}	5,11 ^{ns}
	1000	5,16 ^{ns}	5,10 ^{ns}

Tabela 3 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{28}	10	4,90 ^{ns}	-
	15	4,95 ^{ns}	0,89 ⁺
	20	4,90 ^{ns}	1,61 ⁺
	25	4,83 ^{ns}	1,92 ⁺
	50	4,88 ^{ns}	3,11 ⁺
	75	4,87 ^{ns}	3,91 ⁺
	100	5,00 ^{ns}	4,37 ⁺
	300	5,09 ^{ns}	4,30 ⁺
	500	5,10 ^{ns}	4,83 ^{ns}
	1000	4,59 ^{ns}	4,91 ^{ns}
ρ_{30}	10	4,73 ^{ns}	-
	15	4,98 ^{ns}	1,06 ⁺
	20	5,37 ^{ns}	1,68 ⁺
	25	4,83 ^{ns}	2,10 ⁺
	50	4,63 ^{ns}	2,95 ⁺
	75	5,08 ^{ns}	3,47 ⁺
	100	4,56 ^{ns}	3,90 ⁺
	300	5,28 ^{ns}	4,61 ^{ns}
	500	5,03 ^{ns}	5,12 ^{ns}
	1000	5,13 ^{ns}	4,84 ^{ns}

⁺ O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e menor que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

^{ns} O valor não pode ser considerado estatisticamente diferente do α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) não verificaram o tamanho dos testes apresentados por eles quando $p > 2$. Assim, não foi possível comparar a taxa de erro tipo I dos testes apresentados por eles com a taxa de erro tipo I dos testes t_c e t_{b_0} quando $p > 2$.

Para o nível nominal de 1%, o teste t_c apresentou taxa de erro tipo I igual ao nível nominal de significância, tanto para pequenas como para grandes amostras,

sendo considerado exato. Para pequenas amostras, o teste t_{b_0} controlou o erro tipo I, em nível inferior ao valor nominal. Nas configurações de ρ_{14} , ρ_{18} , ρ_{26} e $n \geq 300$ o teste foi exato. Esses resultados estão apresentados, em porcentagem, na Tabela 4.

Tabela 4 Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(8 \times 8)}$ e valor nominal de significância de 1%.

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{12}	10	1,07 ^{ns}	-
	15	1,06 ^{ns}	0,03 ⁺
	20	0,99 ^{ns}	0,14 ⁺
	25	0,94 ^{ns}	0,17 ⁺
	50	0,90 ^{ns}	0,38 ⁺
	75	1,17 ^{ns}	0,53 ⁺
	100	1,09 ^{ns}	0,63 ⁺
	300	1,17 ^{ns}	0,78 ^{ns}
	500	0,97 ^{ns}	0,92 ^{ns}
	1000	0,91 ^{ns}	0,84 ^{ns}
ρ_{14}	10	1,03 ^{ns}	-
	15	0,96 ^{ns}	0,03 ⁺
	20	0,94 ^{ns}	0,09 ⁺
	25	0,90 ^{ns}	0,23 ⁺
	50	1,07 ^{ns}	0,29 ⁺
	75	0,97 ^{ns}	0,44 ⁺
	100	1,00 ^{ns}	0,67 ⁺
	300	1,07 ^{ns}	1,02 ^{ns}
	500	0,96 ^{ns}	0,85 ^{ns}
	1000	0,99 ^{ns}	0,79 ^{ns}

Tabela 4 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{16}	10	0,88 ^{ns}	-
	15	0,94 ^{ns}	0,11 ⁺
	20	1,00 ^{ns}	0,10 ⁺
	25	1,06 ^{ns}	0,18 ⁺
	50	1,07 ^{ns}	0,34 ⁺
	75	0,97 ^{ns}	0,51 ⁺
	100	1,08 ^{ns}	0,66 ⁺
	300	1,05 ^{ns}	0,66 ⁺
	500	1,04 ^{ns}	0,98 ^{ns}
	1000	1,03 ^{ns}	0,96 ^{ns}
ρ_{18}	10	1,08 ^{ns}	-
	15	1,22 ^{ns}	0,08 ⁺
	20	0,90 ^{ns}	0,10 ⁺
	25	1,07 ^{ns}	0,21 ⁺
	50	1,20 ^{ns}	0,47 ⁺
	75	0,73 ⁺	0,49 ⁺
	100	0,96 ^{ns}	0,68 ⁺
	300	1,20 ^{ns}	1,16 ^{ns}
	500	1,04 ^{ns}	0,95 ^{ns}
	1000	0,98 ^{ns}	0,99 ^{ns}
ρ_{20}	10	0,91 ^{ns}	-
	15	0,86 ^{ns}	0,03 ⁺
	20	1,08 ^{ns}	0,13 ⁺
	25	1,00 ^{ns}	0,18 ⁺
	50	0,99 ^{ns}	0,39 ⁺
	75	1,19 ^{ns}	0,52 ⁺
	100	1,07 ^{ns}	0,76 ^{ns}
	300	0,93 ^{ns}	0,85 ^{ns}
	500	1,06 ^{ns}	1,16 ^{ns}
	1000	0,97 ^{ns}	0,92 ^{ns}

Tabela 4 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{22}	10	1,27 ^{ns}	-
	15	1,03 ^{ns}	0,08 ⁺
	20	0,87 ^{ns}	0,13 ⁺
	25	1,01 ^{ns}	0,16 ⁺
	50	1,05 ^{ns}	0,35 ⁺
	75	0,96 ^{ns}	0,54 ⁺
	100	1,06 ^{ns}	0,64 ⁺
	300	1,02 ^{ns}	0,83 ^{ns}
	500	0,94 ^{ns}	0,78 ^{ns}
	1000	0,98 ^{ns}	0,95 ^{ns}
ρ_{24}	10	1,02 ^{ns}	-
	15	0,86 ^{ns}	0,05 ⁺
	20	1,13 ^{ns}	0,09 ⁺
	25	0,86 ^{ns}	0,17 ⁺
	50	1,07 ^{ns}	0,37 ⁺
	75	1,02 ^{ns}	0,50 ⁺
	100	0,96 ^{ns}	0,60 ⁺
	300	1,05 ^{ns}	0,82 ^{ns}
	500	1,00 ^{ns}	0,76 ^{ns}
	1000	1,07 ^{ns}	0,86 ^{ns}
ρ_{26}	10	0,89 ^{ns}	-
	15	1,00 ^{ns}	0,04 ⁺
	20	0,78 ^{ns}	0,10 ⁺
	25	1,20 ^{ns}	0,18 ⁺
	50	1,03 ^{ns}	0,39 ⁺
	75	0,93 ^{ns}	0,63 ⁺
	100	1,20 ^{ns}	0,56 ⁺
	300	0,95 ^{ns}	0,94 ^{ns}
	500	0,84 ^{ns}	1,12 ^{ns}
	1000	0,96 ^{ns}	0,94 ^{ns}

Tabela 4 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{28}	10	0,96 ^{ns}	-
	15	1,00 ^{ns}	0,03 ⁺
	20	0,81 ^{ns}	0,11 ⁺
	25	1,12 ^{ns}	0,10 ⁺
	50	0,92 ^{ns}	0,35 ⁺
	75	0,85 ^{ns}	0,47 ⁺
	100	0,87 ^{ns}	0,80 ^{ns}
	300	0,98 ^{ns}	0,81 ^{ns}
	500	1,07 ^{ns}	0,93 ^{ns}
	1000	0,91 ^{ns}	1,04 ^{ns}
ρ_{30}	10	0,98 ^{ns}	-
	15	1,05 ^{ns}	0,05 ⁺
	20	1,23 ^{ns}	0,18 ⁺
	25	1,10 ^{ns}	0,21 ⁺
	50	0,84 ^{ns}	0,36 ⁺
	75	0,96 ^{ns}	0,51 ⁺
	100	0,80 ^{ns}	0,50 ⁺
	300	0,98 ^{ns}	0,73 ⁺
	500	0,97 ^{ns}	0,88 ^{ns}
	1000	1,09 ^{ns}	0,98 ^{ns}

⁺ O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e menor que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

^{ns} O valor não pode ser considerado estatisticamente diferente do α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

Na Tabela 5 estão apresentados, em porcentagem, os resultados de erro tipo I dos dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: teste t_c e teste t_{b_0} , considerando diferentes tamanhos amostrais $n \in \{10, 15, 20, 25, 50, 75, 100, 300, 500 \text{ e } 1000\}$, diferentes matrizes de correlações com $p = 10$: ρ_{32} , ρ_{34} , ρ_{36} , ρ_{38} , ρ_{40} , ρ_{42} , ρ_{44} , ρ_{46} , ρ_{48} , ρ_{50} e ρ_{52} e valor nominal de significância de 5%. É possível observar que para o teste t_c houve um desempenho diferente em relação

ao teste t_{b_0} para o controle do erro tipo I, pois o teste t_c foi exato em todas as situações analisadas, e o teste t_{b_0} foi conservativo quando $n \leq 300$ e tendeu a ser exato quando $n \geq 500$.

Tabela 5 Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(20 \times 20)}$ e valor nominal de significância de 5%.

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{32}	10	5,15 ^{ns}	-
	15	4,75 ^{ns}	-
	20	5,09 ^{ns}	0,01 ⁺
	25	5,09 ^{ns}	0,18 ⁺
	50	5,12 ^{ns}	1,00 ⁺
	75	4,75 ^{ns}	1,89 ⁺
	100	5,16 ^{ns}	2,28 ⁺
	300	4,98 ^{ns}	3,73 ⁺
	500	5,00 ^{ns}	4,54 ⁺
	1000	4,76 ^{ns}	4,37 ⁺
ρ_{34}	10	5,06 ^{ns}	-
	15	5,01 ^{ns}	-
	20	4,88 ^{ns}	0,01 ⁺
	25	4,93 ^{ns}	0,19 ⁺
	50	4,99 ^{ns}	0,87 ⁺
	75	5,18 ^{ns}	1,94 ⁺
	100	5,22 ^{ns}	2,25 ⁺
	300	5,22 ^{ns}	3,76 ⁺
	500	4,77 ^{ns}	4,19 ⁺
	1000	4,60 ^{ns}	4,80 ^{ns}

Tabela 5 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b0}
ρ_{36}	10	4,65 ^{ns}	-
	15	5,40 ^{ns}	-
	20	4,63 ^{ns}	0,05 ⁺
	25	4,61 ^{ns}	0,13 ⁺
	50	5,30 ^{ns}	1,39 ⁺
	75	5,12 ^{ns}	1,70 ⁺
	100	4,97 ^{ns}	2,43 ⁺
	300	4,88 ^{ns}	3,59 ⁺
	500	5,29 ^{ns}	4,14 ⁺
	1000	4,75 ^{ns}	4,46 ⁺
ρ_{38}	10	5,40 ^{ns}	-
	15	4,74 ^{ns}	-
	20	4,79 ^{ns}	0,04 ⁺
	25	5,18 ^{ns}	0,31 ⁺
	50	4,68 ^{ns}	1,00 ⁺
	75	5,18 ^{ns}	1,87 ⁺
	100	5,22 ^{ns}	2,42 ⁺
	300	4,76 ^{ns}	3,89 ⁺
	500	5,04 ^{ns}	4,24 ⁺
	1000	4,83 ^{ns}	4,70 ^{ns}
ρ_{40}	10	4,91 ^{ns}	-
	15	4,84 ^{ns}	-
	20	4,47 ⁺	0,00 ⁺
	25	4,94 ^{ns}	0,20 ⁺
	50	5,16 ^{ns}	1,08 ⁺
	75	5,16 ^{ns}	2,11 ⁺
	100	5,55 ^{ns}	2,30 ⁺
	300	5,04 ^{ns}	3,68 ⁺
	500	5,10 ^{ns}	3,95 ⁺
	1000	4,74 ^{ns}	4,76 ^{ns}

Tabela 5 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{42}	10	4,90 ^{ns}	-
	15	5,09 ^{ns}	-
	20	4,59 ^{ns}	0,02 ⁺
	25	4,68 ^{ns}	0,21 ⁺
	50	5,08 ^{ns}	1,13 ⁺
	75	4,91 ^{ns}	1,84 ⁺
	100	4,83 ^{ns}	2,48 ⁺
	300	4,86 ^{ns}	3,74 ⁺
	500	4,80 ^{ns}	4,51 ⁺
	1000	5,03 ^{ns}	4,53 ⁺
ρ_{44}	10	5,15 ^{ns}	-
	15	4,97 ^{ns}	-
	20	4,88 ^{ns}	0,01 ⁺
	25	5,18 ^{ns}	0,15 ⁺
	50	5,44 ^{ns}	1,23 ⁺
	75	4,65 ^{ns}	1,85 ⁺
	100	5,55 ^{ns}	2,40 ⁺
	300	5,07 ^{ns}	3,79 ⁺
	500	5,32 ^{ns}	4,20 ⁺
	1000	5,00 ^{ns}	4,61 ^{ns}
ρ_{46}	10	5,19 ^{ns}	-
	15	5,07 ^{ns}	-
	20	4,73 ^{ns}	0,02 ⁺
	25	5,13 ^{ns}	0,23 ⁺
	50	5,39 ^{ns}	1,17 ⁺
	75	5,34 ^{ns}	1,90 ⁺
	100	4,89 ^{ns}	2,27 ⁺
	300	4,95 ^{ns}	3,88 ⁺
	500	5,05 ^{ns}	4,17 ⁺
	1000	5,28 ^{ns}	4,49 ⁺

Tabela 5 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{48}	10	5,30 ^{ns}	-
	15	4,92 ^{ns}	-
	20	5,12 ^{ns}	0,01 ⁺
	25	4,87 ^{ns}	0,26 ⁺
	50	5,25 ^{ns}	1,13 ⁺
	75	4,77 ^{ns}	1,78 ⁺
	100	4,72 ^{ns}	2,49 ⁺
	300	4,97 ^{ns}	3,87 ⁺
	500	4,81 ^{ns}	4,13 ⁺
	1000	5,13 ^{ns}	4,43 ⁺
ρ_{50}	10	4,94 ^{ns}	-
	15	5,09 ^{ns}	-
	20	4,64 ^{ns}	0,05 ⁺
	25	4,70 ^{ns}	0,23 ⁺
	50	5,12 ^{ns}	1,03 ⁺
	75	4,93 ^{ns}	2,13 ⁺
	100	4,83 ^{ns}	2,44 ⁺
	300	4,84 ^{ns}	3,74 ⁺
	500	4,83 ^{ns}	4,05 ⁺
	1000	5,02 ^{ns}	4,50 ⁺
ρ_{52}	10	4,98 ^{ns}	-
	15	4,95 ^{ns}	-
	20	4,60 ^{ns}	0,03 ⁺
	25	4,58 ^{ns}	0,18 ⁺
	50	5,16 ^{ns}	1,14 ⁺
	75	4,85 ^{ns}	1,96 ⁺
	100	4,87 ^{ns}	2,26 ⁺
	300	5,00 ^{ns}	3,75 ⁺
	500	4,93 ^{ns}	4,20 ⁺
	1000	4,97 ^{ns}	4,66 ^{ns}

⁺ O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e menor que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

^{ns} O valor não pode ser considerado estatisticamente diferente do α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

Para o nível nominal de significância de 1%, o teste t_c também foi exato em todas as configurações analisadas. O teste t_{b_0} controlou o erro tipo I em nível inferior ao nominal, sendo considerado conservativo em todos os casos estudados. Os resultados estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 Taxas de erro tipo I de dois testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de correlações $\rho_{(20 \times 20)}$ e valor nominal de significância de 1%.

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{32}	10	1,05 ^{ns}	-
	15	1,12 ^{ns}	-
	20	1,04 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	1,16 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	0,94 ^{ns}	0,05 ⁺
	75	0,91 ^{ns}	0,22 ⁺
	100	0,93 ^{ns}	0,22 ⁺
	300	1,11 ^{ns}	0,76 ^{ns}
	500	0,98 ^{ns}	0,82 ^{ns}
	1000	0,88 ^{ns}	0,84 ^{ns}
ρ_{34}	10	0,93 ^{ns}	-
	15	1,29 ^{ns}	-
	20	0,92 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,99 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	0,97 ^{ns}	0,08 ⁺
	75	0,96 ^{ns}	0,19 ⁺
	100	0,84 ^{ns}	0,26 ⁺
	300	0,95 ^{ns}	0,53 ⁺
	500	1,00 ^{ns}	0,73 ⁺
	1000	0,92 ^{ns}	0,78 ^{ns}

Tabela 6 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{36}	10	1,00 ^{ns}	-
	15	1,00 ^{ns}	-
	20	0,88 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,76 ^{ns}	0,01 ⁺
	50	0,99 ^{ns}	0,13 ⁺
	75	1,07 ^{ns}	0,19 ⁺
	100	1,12 ^{ns}	0,33 ⁺
	300	1,08 ^{ns}	0,52 ⁺
	500	1,14 ^{ns}	0,84 ^{ns}
	1000	1,01 ^{ns}	0,75 ⁺
ρ_{38}	10	0,95 ^{ns}	-
	15	1,03 ^{ns}	-
	20	1,03 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	1,22 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	0,94 ^{ns}	0,10 ⁺
	75	0,86 ^{ns}	0,18 ⁺
	100	0,98 ^{ns}	0,27 ⁺
	300	0,88 ^{ns}	0,51 ⁺
	500	1,00 ^{ns}	0,74 ⁺
	1000	0,91 ^{ns}	0,90 ^{ns}
ρ_{40}	10	1,10 ^{ns}	-
	15	0,89 ^{ns}	-
	20	0,80 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	1,06 ^{ns}	0,01 ⁺
	50	1,13 ^{ns}	0,13 ⁺
	75	0,97 ^{ns}	0,21 ⁺
	100	1,06 ^{ns}	0,23 ⁺
	300	1,16 ^{ns}	0,52 ⁺
	500	1,01 ^{ns}	0,79 ^{ns}
	1000	0,97 ^{ns}	0,87 ^{ns}

Tabela 6 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{42}	10	0,97 ^{ns}	-
	15	1,05 ^{ns}	-
	20	0,88 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,96 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	1,14 ^{ns}	0,15 ⁺
	75	0,90 ^{ns}	0,18 ⁺
	100	1,11 ^{ns}	0,25 ⁺
	300	0,91 ^{ns}	0,62 ⁺
	500	0,97 ^{ns}	0,88 ^{ns}
	1000	0,92 ^{ns}	0,87 ^{ns}
ρ_{44}	10	0,97 ^{ns}	-
	15	1,25 ^{ns}	-
	20	0,92 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,84 ^{ns}	0,01 ⁺
	50	1,18 ^{ns}	0,11 ⁺
	75	0,89 ^{ns}	0,19 ⁺
	100	1,13 ^{ns}	0,22 ⁺
	300	1,10 ^{ns}	0,70 ⁺
	500	1,10 ^{ns}	0,72 ⁺
	1000	0,91 ^{ns}	0,95 ^{ns}
ρ_{46}	10	0,98 ^{ns}	-
	15	0,98 ^{ns}	-
	20	0,95 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,94 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	1,05 ^{ns}	0,08 ⁺
	75	1,23 ^{ns}	0,13 ⁺
	100	1,01 ^{ns}	0,18 ⁺
	300	0,90 ^{ns}	0,66 ⁺
	500	0,99 ^{ns}	0,75 ⁺
	1000	1,09 ^{ns}	0,78 ^{ns}

Tabela 6 , “continua”

ρ	n	t_c	t_{b_0}
ρ_{48}	10	1,08 ^{ns}	-
	15	0,99 ^{ns}	-
	20	1,01 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,94 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	1,02 ^{ns}	0,10 ⁺
	75	1,02 ^{ns}	0,13 ⁺
	100	0,88 ^{ns}	0,34 ⁺
	300	1,06 ^{ns}	0,70 ⁺
	500	0,88 ^{ns}	0,66 ⁺
	1000	1,02 ^{ns}	0,74 ⁺
ρ_{50}	10	0,97 ^{ns}	-
	15	1,07 ^{ns}	-
	20	0,90 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	0,96 ^{ns}	0,00 ⁺
	50	1,16 ^{ns}	0,11 ⁺
	75	0,92 ^{ns}	0,30 ⁺
	100	1,13 ^{ns}	0,26 ⁺
	300	0,94 ^{ns}	0,47 ⁺
	500	0,96 ^{ns}	0,63 ⁺
	1000	0,95 ^{ns}	0,89 ^{ns}
ρ_{52}	10	0,96 ^{ns}	-
	15	1,07 ^{ns}	-
	20	0,93 ^{ns}	0,00 ⁺
	25	1,01 ^{ns}	0,02 ⁺
	50	1,16 ^{ns}	0,10 ⁺
	75	1,02 ^{ns}	0,25 ⁺
	100	1,13 ^{ns}	0,24 ⁺
	300	0,89 ^{ns}	0,54 ⁺
	500	0,99 ^{ns}	0,58 ⁺
	1000	0,96 ^{ns}	0,87 ^{ns}

⁺ O valor pode ser considerado estatisticamente diferente e menor que o α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

^{ns} O valor não pode ser considerado estatisticamente diferente do α correspondente, considerando uma confiança de 99%.

4.1.2 Poder

Na Tabela 7 estão apresentados, em porcentagem, os valores de poder de nove testes de igualdade de matrizes de covariâncias: teste t_a , teste t_c , teste t_{b_0} , LRT, LRT₁, LRT₂, LRT₃, W₂, W₅, em função de n , $p = 2$ e $\alpha = 5\%$. Os testes t_a , t_c , t_{b_0} , LRT₃ e W₂ apresentaram controle adequado do erro tipo I. Como consequência disso, espera-se que os testes que são conservativos (t_{b_0} , LRT₃ e W₂) e os testes que são exatos (t_a e t_c) sejam menos poderosos que os considerados liberais. Isso realmente aconteceu, como pode ser visto na Tabela 7. Como era de se esperar, o poder de todos os testes aumentou quando o tamanho amostral n e as taxas de erro tipo I foram aumentadas. Para grandes amostras ($n = 100$), o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%, exceto para t_a e t_c em Σ_5 e Σ_9 , em que o valor de poder destes testes foi inferior a 60%.

De acordo com Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), no caso de duas normais bivariadas dependentes, o teste da razão de verossimilhanças modificado LRT₂ e o teste assintótico W₅ são recomendados para serem usados em amostras de tamanhos moderados ou grandes $n \geq 20$, enquanto que os testes LRT₃ e W₂ podem ser aplicados para pequenas amostras. Pode-se verificar que em alguns casos de pequenas amostras ($n \leq 25$) o teste W₅ é mais poderoso do que W₂, e para amostras maiores ($n \geq 75$) os dois testes mantiveram o mesmo poder. Segundo Jiang e Sarkar (1998) isso se deve ao fato de W₅ tornar-se cada vez mais poderoso quando a diferença entre Σ_{11} e Σ_{22} torna-se mais proeminente. Dentre os testes apresentados por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), o teste LRT₂ supera os demais por ter poder elevado e controlar a taxa de erro tipo I para amostras de tamanho $n \geq 20$ de duas populações normais bivariadas dependentes.

Quando se compara o t_a com t_c verifica-se que praticamente não houve ganho, quando se buscou a combinação linear que maximizava o coeficiente de correlação

linear entre as projeções univariadas. Assim, entre as alternativas estudadas, pode-se afirmar que o uso do coeficiente $\alpha = 1$ não interferiu no poder do teste e seu uso pode ser recomendado.

Cirillo et al. (2010) apresentaram os resultados referentes aos critérios definidos pela razão dos determinantes, uma vez que os testes baseados na razão dos traços apresentaram probabilidades semelhantes aos testes definidos pela razão dos determinantes. Assim, espera-se que o poder entre esses testes seja aproximado.

Conforme apresentado por Cirillo et al. (2010), os testes propostos por eles controlaram o erro tipo I, seja para o nível nominal fixado em 1% ou 5%. As probabilidades referentes ao poder foram obtidas mediante a situação de baixa e alta correlação global, respectivamente, ($\rho = 0,20$) e ($\rho = 0,80$), e observou-se que quanto maior a correlação (ρ) e o grau de heterogeneidade (δ) mais poderoso é o teste.

Tabela 7 Poder de nove testes de igualdade de matrizes de covariâncias: LRT , LRT_1 , LRT_2 , LRT_3 , W_2 , W_5 , t_a , t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e $\alpha = 5\%$.

Σ	n	LRT^a	LRT_1^a	LRT_2^a	LRT_3^a	W_2^b	W_5^b	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_5	10	28,40	22,50	16,70	9,10	18,30	18,50	9,20	8,21	4,81
	15	32,20	28,30	23,90	18,20	25,40	25,50	10,99	11,82	11,49
	20	39,3	36,30	32,80	27,00	34,00	33,90	14,96	14,72	20,75
	25	46,30	43,70	40,90	37,00	42,30	42,00	18,52	16,50	29,63
	50	76,60	75,60	74,50	73,00	75,50	75,10	31,70	31,45	65,33
	75	92,10	91,80	91,50	91,00	91,80	91,70	45,55	44,38	86,68
	100	97,50	97,40	97,30	97,20	97,60	97,60	56,02	56,94	95,26

Tabela 7 , “continua”

Σ	n	LRT ^a	LRT ₁ ^a	LRT ₂ ^a	LRT ₃ ^a	W ₂ ^b	W ₃ ^b	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_6	10	39,20	33,30	26,40	16,40	10,20	27,80	24,29	24,18	7,55
	15	49,30	45,00	39,80	32,50	15,90	41,20	38,75	37,44	22,00
	20	60,30	57,10	53,60	48,00	27,50	54,40	49,90	49,15	36,61
	25	69,60	67,50	64,90	61,20	43,40	65,70	59,43	60,00	51,96
	50	94,90	94,50	94,10	93,60	90,70	94,30	89,71	89,40	92,00
	75	99,40	99,40	99,40	99,30	99,10	99,40	97,80	97,71	98,99
	100	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,55	99,56	99,89
Σ_7	10	48,50	42,10	34,90	24,50	8,90	34,20	26,90	26,23	8,85
	15	60,00	56,10	51,30	43,80	19,90	50,50	41,41	39,89	23,71
	20	71,00	68,40	65,20	60,30	39,10	64,80	53,18	52,90	41,06
	25	80,60	78,80	76,70	73,50	58,40	76,40	64,28	63,80	56,92
	50	98,30	98,10	98,00	97,70	96,60	97,90	92,14	92,07	94,32
	75	99,90	99,90	99,90	99,90	99,80	99,90	98,52	98,69	99,61
	100	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,77	99,77	99,99
Σ_8	10	92,40	89,00	84,70	72,50	88,20	88,10	70,86	70,43	46,03
	15	98,90	98,40	97,80	96,90	98,30	98,50	89,94	89,43	84,31
	20	99,90	99,80	99,70	99,70	99,80	99,90	96,57	96,45	96,76
	25	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,02	99,15	99,52
	50	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	75	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
	100	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
Σ_9	10	28,10	22,50	16,50	8,60	18,30	18,20	8,95	8,28	5,16
	15	32,60	28,90	24,40	18,60	25,50	25,50	12,43	12,13	11,82
	20	39,40	36,30	32,80	28,10	34,20	34,00	15,19	15,24	20,59
	25	47,00	44,50	41,70	37,40	42,90	42,50	18,66	17,35	29,54
	50	78,00	77,10	76,00	74,60	76,20	75,70	33,36	32,53	66,10
	75	92,60	92,40	92,00	91,60	92,40	92,20	47,28	46,13	86,79
	100	97,90	97,90	97,80	97,70	97,90	97,80	58,48	59,09	95,21

Tabela 7 , “continua”

Σ	n	LRT ^a	LRT ₁ ^a	LRT ₂ ^a	LRT ₃ ^a	W ₂ ^b	W ₅ ^b	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_{10}	10	41,00	35,00	27,40	16,90	10,40	28,20	25,06	25,91	7,66
	15	50,00	46,00	40,80	33,50	16,20	41,90	38,58	38,61	21,39
	20	60,70	57,70	54,00	48,70	28,00	54,60	50,62	51,39	37,21
	25	69,90	67,70	65,10	61,10	43,80	66,20	61,12	61,49	52,18
	50	94,90	94,60	94,20	93,70	91,00	94,5	90,08	90,28	91,59
	75	99,50	99,40	99,40	99,30	99,10	99,40	98,13	97,87	99,17
	100	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	100,00	99,52	99,62	99,93
Σ_{11}^*	10	48,60	42,50	35,20	25,20	9,10	34,20	26,55	26,48	8,79
	15	60,30	56,30	51,20	43,50	20,00	50,70	40,73	40,44	23,77
	20	71,20	68,70	65,40	60,50	39,40	65,30	54,46	53,41	40,99
	25	80,80	79,10	77,00	73,90	58,90	76,80	65,27	64,33	57,07
	50	98,30	98,10	97,90	97,70	96,70	98,00	92,47	92,12	94,40
	75	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	98,60	98,73	99,63
	100	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,78	99,78	99,99

^a Poder dos testes LRT, LRT₁, LRT₂ e LRT₃, apresentados por Jiang, Sarkar e Hsuan (1999).

^b Poder dos testes W₂ e W₅, apresentados por Jiang e Sarkar (1998).

Na Tabela 8 estão apresentados, em porcentagem, os valores de poder de três testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_a , t_c e t_{b_0} , em função de (n) e $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e $\alpha = 1\%$. O teste *bootstrap* não-paramétrico t_{b_0} foi menos poderoso que os demais, porém para $n \geq 75$ apresentou poder um pouco mais elevado que t_a e t_c . Para grandes amostras ($n = 100$), o desempenho dos testes se igualou e seus valores de poder se aproximaram de 100%, exceto para t_a e t_c em Σ_5 e Σ_9 , em que o valor de poder destes testes foi inferior a 35% e para t_{b_0} em Σ_9 , em que o valor do poder foi inferior a 83%.

Tabela 8 Poder de três testes de igualdade de matrizes de covariâncias: t_a , t_c e t_{b_0} (%), considerando diferentes tamanhos amostrais (n), diferentes matrizes de covariâncias $\Sigma_{(4 \times 4)}$ e valor nominal de significância de 1%.

Σ	n	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_5	10	2,24	1,88	0,23
	15	3,07	3,21	1,47
	20	4,86	4,07	4,25
	25	6,00	5,46	7,68
	50	13,54	12,84	35,19
	75	23,09	22,73	64,16
	100	31,10	32,81	82,80
	300	86,87	86,86	100,00
	500	98,76	98,61	100,00
	1000	99,99	100,00	100,00
Σ_6	10	8,54	8,42	0,42
	15	16,40	16,10	3,33
	20	25,80	25,56	9,61
	25	34,11	34,85	19,64
	50	74,20	73,41	72,43
	75	91,87	91,56	94,42
	100	97,60	97,93	99,09
	300	100,00	100,00	100,00
	500	100,00	100,00	100,00
	1000	100,00	100,00	100,00

Tabela 8 , “continua”

Σ	n	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_7	10	9,16	9,16	0,45
	15	18,81	17,72	3,47
	20	27,72	27,27	9,89
	25	38,76	38,17	20,01
	50	78,53	78,34	73,57
	75	93,98	94,29	95,11
	100	98,90	98,78	99,54
	300	100,00	100,00	100,00
	500	100,00	100,00	100,00
	1000	100,00	100,00	100,00
Σ_8	10	43,20	42,27	6,62
	15	71,69	72,13	39,59
	20	88,02	88,04	74,37
	25	95,40	95,61	91,79
	50	99,98	99,99	100,00
	75	100,00	100,00	100,00
	100	100,00	100,00	100,00
	3000	100,00	100,00	100,00
	500	100,00	100,00	100,00
	1000	100,00	100,00	100,00
Σ_9	10	2,13	1,87	0,23
	15	3,33	3,25	1,49
	20	4,96	4,36	4,19
	25	6,13	5,79	7,98
	50	14,23	13,75	35,39
	75	24,03	24,38	63,63
	100	34,17	34,90	82,69
	300	88,21	89,02	100,00
	500	99,06	98,99	100,00
	1000	100,00	100,00	100,00

Tabela 8 , “continua”

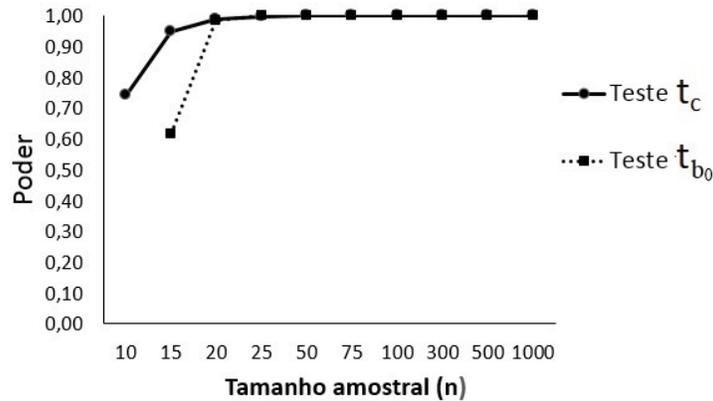
Σ	n	t_a	t_c	t_{b_0}
Σ_{10}	10	8,60	8,89	0,46
	15	16,83	16,80	3,42
	20	26,24	26,52	9,67
	25	35,93	36,27	19,46
	50	74,90	74,77	72,81
	75	92,34	92,20	94,66
	100	97,82	98,10	99,25
	300	100,00	100,00	100,00
	500	100,00	100,00	100,00
	1000	100,00	100,00	100,00
Σ_{11}^*	10	8,93	9,02	0,48
	15	18,41	17,98	3,36
	20	29,56	27,70	9,88
	25	40,18	38,47	20,10
	50	78,35	79,00	73,73
	75	94,48	94,51	95,21
	100	98,60	98,74	99,49
	300	100,00	100,00	100,00
	500	100,00	100,00	100,00
	1000	100,00	100,00	100,00

Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) não apresentaram resultados de poder dos testes com nível de significância de 1% e 10%, embora tenham feito o estudo de simulação. Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999) afirmaram que, embora não relatados, essencialmente possuem o mesmo desempenho relativo dos encontrados para o caso do nível nominal de 5%. Assim, como já relatado para o estudo de erro tipo I, não foi possível comparar o poder dos testes que foram apresentados por eles com o poder dos testes t_c e t_{b_0} , quando $p > 2$.

Os resultados de poder dos testes t_c e t_{b_0} , considerando as matrizes de covariâncias (Σ_{13} , Σ_{15} , Σ_{17} , Σ_{19} , Σ_{21}^* , Σ_{23} , Σ_{25} , Σ_{27} , Σ_{29} e Σ_{31}), $n \in \{10, 15, 20, 25, 50,$

75, 100, 300, 500 e 1000}, com $p = 4$ e $\alpha = 5\%$ foram bastante elevados, sendo superiores a 98%, mesmo para amostras pequenas ($n = 15$).

Para $\alpha = 1\%$, os testes t_c e t_{b_0} apresentaram excelentes resultados de poderes. Em quase todos os casos analisados aproximaram-se de 100%, mesmo para amostras pequenas ($n = 20$), exceto para Σ_{21}^* , que apresentou menor poder quando $n < 20$, como pode-se observar na Figura 1. O desempenho do poder dos testes apresentou semelhanças ao observado para o nível nominal de 5%. Logo, pode-se concluir que os testes t_{b_0} e t_c são poderosos quando $p = 4$.



$$\Sigma_{21}^*, p = 4 \text{ e } \alpha = 5\%$$

Figura 1 Poder de dois testes de igualdades de matrizes de covariâncias: t_c e t_{b_0} , em função de diferentes tamanhos amostrais (n), número de variáveis ($p = 4$) e $\alpha = 0,01$

Os valores do poder dos testes t_c e t_{b_0} , considerando diferentes matrizes de covariâncias com $p = 10$, diferentes tamanhos amostrais (n) e $\alpha = 5\%$, se aproximaram de 100% em todas as configurações avaliadas, mesmo para pequenas amostras ($n = 20$). Para $\alpha = 1\%$, os testes t_c e t_{b_0} também se aproximaram de 100% em todas as situações analisadas.

4.1.3 Considerações Gerais

Considerando as matrizes de covariâncias quando $p = 2$, pode-se afirmar que os testes t_a , t_c , t_{b_0} , LRT_3 e W_5 controlaram o erro tipo I em todos os casos analisados. Os testes t_c , t_{b_0} se aproximaram do teste teórico t_a , porém tiveram menor poder que os testes LRT_3 e W_5 quando $n \geq 75$. Na maioria dos casos, o teste *bootstrap* não paramétrico t_{b_0} foi conservativo quando $n \leq 50$ e exato para $n > 50$. Já os testes t_a e t_c foram exatos quando $n \geq 10$.

Nas simulações para $p = 4$, o teste t_{b_0} foi conservativo quando $n \leq 100$, exceto para ρ_{16} , ρ_{26} e ρ_{28} , que foi conservativo quando $n \leq 300$; e exato quando $n > 100$, com exceção dos casos das matrizes de correlações ρ_{16} , ρ_{26} e ρ_{28} , que foi exato quando $n > 300$. O teste t_c foi exato para todos os tamanhos amostrais.

Analisando as matrizes de correlações quando $p = 10$, observa-se que o teste t_c foi exato em todas as situações analisadas. E o teste t_{b_0} foi conservativo quando $n \leq 1000$; exceto para ρ_{34} , ρ_{38} , ρ_{40} , ρ_{44} e ρ_{52} , que foi conservativo quando $n \leq 500$, e exato nesses casos de matrizes de correlações citadas acima, quando $n = 1000$.

Comparando os testes t_a , t_c e t_{b_0} com todos os testes apresentados por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), pode-se afirmar que em relação ao erro tipo I eles foram tão bons quanto ou melhores. E, nas situações não avaliadas por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), ($p = 4$ e $p = 10$), eles controlaram o erro tipo I em todos os casos analisados.

Em relação ao poder, os testes t_a , t_c e t_{b_0} , nas situações comparáveis com os testes apresentados por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), mostraram-se em alguns casos um poder elevado, sendo superiores a 95%, quando $n = 100$, e em outros foram inferiores porque controlaram o erro tipo I. Nos casos não comparáveis ($p = 4$ e $p = 10$), os testes t_a , t_c e t_{b_0} se destacaram por apresen-

tarem um excelente desempenho, com marcas de 100% quase sempre. Para o caso de matrizes de correlações não estruturadas (ρ_{50}, ρ_{52}) os testes t_c e t_{b_0} controlaram o erro tipo I.

De uma maneira geral, o que se pode dizer sobre as taxas de erro tipo I é que o aumento do número de variáveis não acarretou variação nos valores das taxas de erro tipo I. Em relação ao poder, o aumento do número de variáveis provocou um aumento expressivo no poder, quase sempre igual a 100%, mesmo para amostras pequenas $n = 20$.

Os resultados de simulação Monte Carlo, obtidos por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), se limitaram a apenas duas variáveis. Portanto, para um número maior de variáveis não se viram relatos na literatura que possam ser comparados com os resultados dos testes t_c e t_{b_0} .

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho os objetivos propostos foram alcançados e obtiveram-se as seguintes conclusões:

1. Os testes t_a , t_c , t_{b_0} , LRT_3 e W_2 controlaram em todas as situações o erro tipo I, em níveis iguais ou inferiores aos valores nominais de significância, e apresentaram desempenho superior aos testes LRT , LRT_1 , LRT_2 e W_5 , que são liberais nas situações de pequenas amostras. Nas situações em que foi possível comparar os testes propostos neste trabalho com os apresentados por Jiang e Sarkar (1998) e Jiang, Sarkar e Hsuan (1999), pode-se dizer que em alguns casos os resultados de poder dos testes t_a , t_c foram aceitáveis, próximos de 60%, do teste t_{b_0} superior a 95% e dos testes LRT_3 e W_2 superiores a 97%. Portanto, pode-se afirmar que dentre os testes que controlaram o erro tipo I, para $p = 2$, os testes LRT_3 e W_2 foram superiores aos seus competidores em todas as situações estudadas.

2. Nos casos não comparáveis ($p = 4$ e $p = 10$), os testes t_a , t_c e t_{b_0} se destacaram por apresentarem um ótimo desempenho, com marcas de quase sempre 100% para $n \geq 20$. Portanto, recomenda-se a aplicação dos testes t_c e t_{b_0} em situações reais.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T. W. Statistical inference for covariance matrices with linear structure. In: KRISHNAIAH, P. E. I. (Ed.). **Multivariate analysis II**. New York: Academic Press, 1969. p. 55–66.
- ANDERSON, T. W. Estimation of covariance matrices which are linear combinations or whose inverses are linear combinations of given matrices. In: BOSE, R. C. I. et al. (Ed.). **Essays in probability and statistics**. Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1970. p. 1–24.
- ANDERSON, T. W. Asymptotically efficient estimation of covariance matrices with linear structure. **The Annals of Statistics**, Philadelphia, v. 1, n. 1, p. 135–141, 1973.
- ANDERSON, T. W. **Maximum likelihood estimation for vector autorregressive moving average models**. California: Stanford University, 1978. 16 p.
- ANDERSON, T. W. **An introduction to multivariate statistical analysis**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1984. 752 p.
- BANZATTO, D. A.; KRONKA, S. N. **Experimentação agrícola**. 4. ed. Jaboticabal: Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, 2013. 237 p.
- BARTLETT, M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. **Proceedings of the Royal Society. Series A**, London, v. 160, n. 901, p. 268–282, May 1937.
- BARTLETT, M. S. Multivariate analysis. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, London, v. 9, n. 2, p. 176–197, 1947.
- BHATTACHARJEE, G. P.; ALAM, S. S. Testing equality of variances after a preliminary test of significance for correlation-coefficient. **Journal of Statistical Planning and Inference**, North-Holland, v. 6, n. 1, p. 17–28, 1982.
- BOGLE, W.; HSU, Y. S. Sample size determination in comparing two population variances with paired-data: application to bilirubin tests. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 44, n. 5, p. 594–602, July 2002.
- BOOS, D. D.; BROWNIE, C. Bootstrap methods for testing homogeneity of variances. **Technometrics**, Columbus, v. 31, n. 1, p. 69–82, Feb. 1989.
- BOX, G. E. P. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. **Biometrika**, Oxford, v. 36, n. 3, p. 317–346, Dec. 1949.

BOX, G. E. P.; ANDERSEN, S. L. Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumptions. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, Madison, v. 17, n. 1, p. 1–26, 1955.

BROWN, M. B.; FORSYTHE, A. B. Robust tests for equality of variances. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 69, n. 346, p. 364–367, June 1974.

CHERNICK, M. R. **Bootstrap methods: a guide for practitioners and researchers**. 2nd ed. Newtown: Wiley-Interscience, 2008. 369 p.

CHOI, S. C.; WETTE, R. A test for the homogeneity of variances among correlated variables. **Biometrics, International Biometric Society**, Arlington, v. 28, n. 2, p. 589–592, June 1972.

CHOW, S. C.; LIU, J. P. **Design and analysis of bioavailability and bioequivalence studies**. New York: Marcel Dekker, 1992.

CHU, S. S.; PILLAI, K. C. S. Some complex variable transformations and exact power comparisons of two-sided tests of equality of two Hermitian covariance matrices. **Journal of Statistical Planning and Inference**, North-Holland, v. 4, n. 3, p. 267–290, 1980.

CIRILLO, M. A. et al. Generalized variances ratio test for comparing k covariance matrices from dependent normal populations. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, Essex, v. 9, n. 2, p. 369–378, Nov. 2010.

COHEN, A. Comparing variances of correlated variables. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, Madison, v. 51, n. 3, p. 379–391, Sept. 1986.

CORNELL, R. G. Nonparametric tests of dispersion for the two-period crossover design. **Communications in Statistics. Part A, Theory and Methods**, New York, v. 20, n. 3, p. 1099–1106, 1991.

DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, Madison, v. 39, n. 1, p. 1–38, 1977.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, Philadelphia, v. 7, n. 1, p. 1–26, Jan. 1979.

- FERREIRA, D. F. **Estatística básica**. 2. ed. Lavras: Editora da UFLA, 2009. 664 p.
- FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. 2. ed. Lavras: Editora da UFLA, 2011a. 675 p.
- FERREIRA, D. F. Sisvar: a computer statistical analysis system. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 35, n. 6, p. 1039–1042, 2011b.
- FERREIRA, D. F. **Estatística computacional em java**. Lavras: Editora da UFLA, 2013. 695 p.
- FINNEY, D. J. The distribution of the ratio of estimates of the two variances in a sample from a normal bivariate population. **Biometrika**, Oxford, v. 30, p. 190–192, 1938.
- GEBERT, D. M. P. **Proposta de testes bootstrap para inferir sobre o número de componentes principais retidos**. 2010. 75 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) — Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.
- GOMES, F. P. **Curso de estatística experimental**. 14. ed. Piracicaba: ESALQ/USP, 2000. 476 p.
- GRAMBSCH, P. M. Simple robust tests for scale differences in paired data. **Biometrika**, Oxford, v. 81, n. 2, p. 359–372, 1994.
- GRAYBILL, F. A. **Matrices with applications in statistics**. California: Wadsworth, 1983. 461 p.
- HAN, C. P. Testing homogeneity of a set of correlated variances. **Biometrika**, Oxford, v. 55, n. 2, p. 317–326, July 1968.
- HARRIS, P. Testing for variance homogeneity of correlated variables. **Biometrika**, Oxford, v. 72, n. 1, p. 103–107, Apr. 1985.
- HAYAKAWA, T. Normalizing and variance stabilizing transformations of multivariate statistics under an elliptical population. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics. Part A**, Tokyo, v. 39, n. 1, p. 299–306, 1987.
- JENNRICH, R. J.; SAMPSON, P. F. Newton-Raphson and related algorithms for maximum likelihood variance component estimation. **Technometrics**, Columbus, v. 18, n. 1, p. 11–17, Feb. 1976.

- JIANG, G.; SARKAR, S. K. Some asymptotic tests for the equality of the covariance matrices of two dependent bivariate normals. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 40, n. 2, p. 205–225, 1998.
- JIANG, G.; SARKAR, S. K. The likelihood ratio test for the homogeneity of the variances in a covariance matrix with block compound symmetry. **Communications in Statistics. Part A, Theory and Methods**, New York, v. 29, n. 5–6, p. 1155–1178, 2000.
- JIANG, G.; SARKAR, S. K. Testing the equality of the intra-subject treatment covariance matrices in a crossover study. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 43, n. 6, p. 677–696, 2001.
- JIANG, G.; SARKAR, S. K. Combination tests for the equality of the covariance matrices of two dependent bivariate normal. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 72, n. 6, p. 495–505, 2002.
- JIANG, G.; SARKAR, S. K.; HSUAN, F. A likelihood ratio test and its modifications for the homogeneity of the covariance matrices of dependent multivariate normals. **Journal of Statistical Planning and Inference**, North-Holland, v. 81, n. 1, p. 95–111, Oct. 1999.
- KRISHNAIAH, P. R. Tests for the equality of the covariance matrices of correlated multivariate normal populations. In: SRIVASTAVA, J. N. E. I. (Ed.). **A survey of statistical design and linear models**. Amsterdam: Elsevier, 1975. p. 355–366.
- LAYARD, M. W. J. Large sample tests for the equality of two covariance matrices. **The Annals of Mathematical Statistics**, Amsterdam, v. 43, n. 1, p. 123–141, Feb. 1972.
- LAYARD, M. W. J. Robust large-sample tests for homogeneity of variances. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 68, n. 341, p. 195–198, Mar. 1973.
- LEHMANN, E. L. **Testing statistical hypotheses**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- LEVENE, H. Robust test for equality of variances. In: OLKIN, I. I. et al. (Ed.). **Contribution to probability and statistics**. Stanford: Stanford University Press, 1960. p. 278–292.

LEVY, K. J. A procedure for testing the equality of p -correlated variances. **British Journal of Mathematical Statistical Psychology**, Malden, v. 29, n. 1, p. 89–93, May 1976.

LIM, T. S.; LOH, W. Y. A comparison of tests of equality of variances. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsterdam, v. 22, n. 3, p. 287–301, July 1996.

MANLY, B. F. J. **Randomization, bootstrap and Monte Carlo methods in biology**. 2nd ed. New Zealand: University of Otago, 1997. 356 p.

MCCULLOCH, C. E. Tests for equality of variances with paired data. **Communications in Statistics. Part A, Theory and Methods**, New York, v. 16, n. 5, p. 1377–1391, 1985.

MILLER, R. G. J. Jackknifing variances. **The Annals of Mathematics Statistics**, Hayward, v. 39, n. 2, p. 567–582, Apr. 1968.

MODARRES, R. Testing the equality of dependent variances. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 35, n. 7, p. 785–790, 1993.

MOOD, A. M. **Introduction to the theory of statistics**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1965. 433 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. **Introduction to the theory of statistics**. 3rd ed. Singapore: McGraw-Hill International, 1974. 480 p.

MORGAN, W. A. A test for the significance of the difference between the two variances in a sample from a normal bivariate population. **Biometrika**, Oxford, v. 31, n. 1-2, p. 13–19, July 1939.

O'BRIEN, R. G. A robust technique for testing heterogeneity of variances effects in factorial design. **Psychometrika**, Williamsburg, v. 43, n. 3, p. 327–342, Sep. 1978.

O'BRIEN, R. G. A general ANOVA method for robust tests of additive models for variances. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v. 74, n. 368, p. 877–880, Dec. 1979.

OLIVEIRA, I. R. C.; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 80, n. 5, p. 513–526, 2010.

PIEPHO, H. P. Tests for equality of dispersion in bivariate samples - Review and empirical comparison. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 56, n. 4, p. 353–372, 1997.

PITMAN, E. J. G. A note on normal correlation. **Biometrika**, Oxford, v. 31, n. 1-2, p. 9–12, July 1939.

R CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 14 mar. 2014.

ROY, S. N.; POTTHOFF, R. F. Confidence bounds on vector analogues of the "ratio of means" and the "ratio of variances" for two correlated normal variates and some associated tests. **The Annals of Mathematical Statistics**, Amsterdam, v. 29, n. 3, p. 829–841, Sept. 1958.

RUBIN, D. B.; SZATROWSKI, T. H. Finding maximum likelihood estimates of patterned covariance matrices by the EM algorithm. **Biometrika**, Oxford, v. 69, n. 3, p. 657–660, Dec. 1982.

SANDVIK, L.; OLSSON, B. A nearly distribution-free test for comparing dispersion in paired samples. **Biometrika**, Oxford, v. 69, n. 2, p. 484–485, 1982.

SAS INSTITUTE INCORPORATED. **SAS/STAT software**: changes and enhancements through release. Cary: SAS Institute Incorporated, 1997. 347 p.

SEARLE, S. R.; CASELLA, G.; MCCULLOCH, C. E. **Variance Components**. New York: John Wiley & Sons, 1992. 535 p.

SEBER, G. A. F. **Multivariate Observations**. New York: Wiley Series in Probability and Statistics, 1984. 686 p.

SHAPIRO, A.; COHEN, A. Testing and estimation of equal variances for correlated variables. **Statistics and Probability Letters**, Amsterdam, v. 10, n. 3, p. 231–234, Aug. 1990.

SMITH, P. L. **Some problems in multivariate analysis**. 1975. Dissertação (Ph.D. of Statistics) — College Station, A&M University, Texas, 1975.

SMITH, P. L.; KSHIRSAGAR, A. M. Testing for the equality of the variance-covariance matrices of two jointly normal vector variables. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 27, n. 5, p. 581–589, 1985.

STEEL, R. G. D.; TORRIE, J. H. **Principles and procedures of statistics: a biometrical approach**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1996. 688 p.

SZATROWSKI, T. H. Explicit solutions, one iteration convergence and averaging in the multivariate normal estimation problem for patterned means and covariances. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, Tokyo, v. 30, n. 1, p. 81–88, 1978.

SZATROWSKI, T. H. Asymptotic nonnull distributions for likelihood ratio statistics in the multivariate normal patterned mean and covariance matrix testing problem. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 7, n. 4, p. 823–837, 1979.

SZATROWSKI, T. H. Necessary and sufficient conditions for explicit solutions in the multivariate normal estimation problem for patterned means and covariances. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 8, n. 4, p. 802–810, 1980.

SZATROWSKI, T. H. Patterned covariances. In: KOTZ, S. I.; JOHNSON, N. L. E. (Ed.). **Encyclopedia of statistical sciences**. volume 6. New York: John Wiley & Sons, 1985. p. 638–641.

TIMM, N. H. **Applied multivariate analysis**. New York: Springer Verlag, 2002. 693 p.

WILCOX, R. R. Comparing the variances of dependent groups. **Psychometrika**, Williamsburg, v. 54, n. 2, p. 305–315, June 1989.

WU, C. F. On the convergence properties of the EM algorithm. **Annals of Statistics**, Hayward, v. 11, n. 1, p. 95–103, Mar. 1983.

ZAR, J. H. **Biostatistical analysis**. 3rd ed. New York: Prentice Hall, 1996. 662 p.

APÊNDICE A - Rotinas R

```
#####
# Algoritmo implementado em R para testar duas matrizes de covariâncias na #
# presença de correlação #
#####

#####
# 1) Função para maximizar rho_UV: recebe S_{11} e S_{22} e retorna #
# o autovalor "lambda_1" #
#####

maxRho <- function(S11, S22, S12)
{
  Gt <- chol(S11+S22)
  GtI <- solve(Gt)
  H <- t(GtI) %*% (S11-S22) %*% GtI
  aVaVe <- eigen(H)
  # início
  a <- matrix(1, nrow(S11),1)
  rho_max <- t(a)%*%(S11-S22)%*%a
  d1 <- t(a)%*%(S11+S22+2*S12)%*%a
  d2 <- t(a)%*%(S11+S22-2*S12)%*%a
  rho_max <- as.numeric(rho_max / (d1 * d2)^0.5)
  # fim
  return(rho_max)
}

#####
# Função para obtenção da estatística t do teste: recebe Rho_max e n, #
# e retorna o t e o valor-p #
#####

tTest.rhomax <- function(Rho_max, n)
{
  tc <- Rho_max*(n-2)^0.5/(1-Rho_max^2)^0.5
  p.value <- 2 * (1 - pt(abs(tc), n - 2))
}
```



```

n <- 50
## sob H0 # Erro tipo I
Sig <- matrix(c(1,0.1,0.2,0.3,0.1,1,0.4,0.5,0.2,0.4,1,0.1,0.3,0.5,0.1,1),4,4)
eigen(Sig)
simMCRhoMax(Sig, n, N)

## sob H1 # Poder do teste
Sig1 <- matrix(c(1,0.1,0.2,0.3,0.1,2,0.4,0.5,0.2,0.4,3,0.6,0.3,0.5,0.6,4),4,4)
eigen(Sig1)
simMCRhoMax(Sig1, n, N)

#####
# 2) Função para maximizar rho_UV, considerando o vetor a como paramétrico:#
# recebe S_{11} e S_{22} e retorna o autovalor "lambda_1" #
#####

maxRho <- function(S11, S22, S12, a)
{
  # início
  rho_max <- t(a)%*(S11-S22)%*a
  d1 <- t(a)%*(S11+S22+2*S12)%*a
  d2 <- t(a)%*(S11+S22-2*S12)%*a
  rho_max <- as.numeric(rho_max / (d1 * d2)^0.5)
  # fim
  return(rho_max)
}

#####
# Função para obtenção da estatística t do teste: recebe Rho_max e n, #
# e retorna o t e o valor-p #
#####

tTest.rhomax <- function(Rho_max, n)
{
  tc <- Rho_max*(n-2)^0.5/(1-Rho_max^2)^0.5
  p.value <- 2 * (1 - pt(abs(tc), n - 2))
  return(list(tc = tc, p.value = p.value))
}

```

```

}

#####
# Função para simular dados e aplicar o teste: recebe a Matriz de      #
# Covariâncias pop., n e N                                           #
# Dependência: library MASS                                           #
#####

library(MASS)
simMCRhoMax <- function(Sig, n = 10, N = 1000)
{
  p <- nrow(Sig) / 2
  ct <- matrix(c(0,0),2,1)
  value <- c("0,05", "0,01")
  rownames(ct) <- value
  Sig11 <- Sig[1:p,1:p]
  Sig22 <- Sig[(p+1):(2*p),(p+1):(2*p)]
  a <- aParametrico(Sig11, Sig22)
  for (i in 1:N)
  {
    X <- mvrnorm(n, rep(0, 2 * p), Sig)
    S <- var(X)
    S11 <- S[1:p,1:p]
    S22 <- S[(p+1):(2*p),(p+1):(2*p)]
    S12 <- S[1:p,(p+1):(2*p)]
    maxRho1 <- maxRho(S11,S22,S12, a)
    tc <- tTest.rhomax(maxRho1, n)
    if (tc$p.value <= 0.05) ct[1,1] <- ct[1,1] + 1/N
    if (tc$p.value <= 0.01) ct[2,1] <- ct[2,1] + 1/N
  }
  return(ct)
}

#####
# Função para simular dados e aplicar o teste: recebe S11 e S22.     #
# Dependência: library MASS                                           #

```

```
#####

library(MASS)
aParametrico <- function(Sig11, Sig22)
{
  Gt      <- chol(Sig11+Sig22)
  GtI     <- solve(Gt)
  H       <- t(GtI) %*% (Sig11-Sig22) %*% GtI
  if (sum(H)<=1e-13) a <- rep(c(1), times=nrow(H)) else
  {
    aVaVe <- eigen(H)
    a <- aVaVe$vectors[,which.max(abs(aVaVe$values))]
  }
  return(a)
}

#####
# Exemplo de Simulação #
#####

N <- 10000
n <- 1000
#sob H0
#Sig <- matrix(c(1,0.1,0.2,0.3,0.1,1,0.4,0.5,0.2,0.4,1,0.1,0.3,0.5,0.1,1),4,4)
#sob H1
Sig1 <- matrix(c(1,0.1,0.2,0.3,0.1,2,0.4,0.5,0.2,0.4,3,0.6,0.3,0.5,0.6,4),4,4)
simMCRhoMax(Sig1, n, N) # Maximização de Rho_(UV)

#####
# 3) Função para maximizar rho_UV, recebe S_{11} e S_{22} e retorna #
# o autovalor "lambda_1" e o vetor a do bootstrap não paramétrico #
#####

maxRhoB <- function(S11, S22)
{
  Gt      <- chol(S11+S22)
  GtI     <- solve(Gt)

```

```

H      <- t(GtI) %*% (S11-S22) %*% GtI
aVaVe  <- eigen(H)
rho_max <- aVaVe$values[1]
return(rho_max)
}

#####
# Função para obtenção da estatística t do teste: recebe a, S11, s12, S22, #
# n e retorna o tb do bootstrap                                     #
#####

tTestb.rhmax <- function(s11, s22, s12, n)
{
  Rho_max <- maxRhob(s11, s22)
  tb      <- Rho_max*(n-2)^0.5/(1-Rho_max^2)^0.5
  return(tb)
}

#####
# Função para trocar X's com Y's: recebe o vetor x (1 x 2p) (linha) #
# a dimensão p (troca os p primeiros com os p's últimos)          #
#####

trocaXY <- function(x, p)
{
  if (runif(1) <= 0.5) {
    y <- x[(p+1):(2*p)]
    y <- c(y, x[1:p])
  } else y <- x
  return(y)
}

#####
# Função para reamostrar a matriz X (n x 2p)                         #
# Retorna: Xb impondo H0, por meio de uma amostragem de uma amostra #
# combinada preservando a covariância - lembrar de retirar a média  #
#####

```

```

bootSample <- function(X)
{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X) %/% 2
  sorteio <- sample(n, replace=TRUE)
  Xb <- t(apply(X[sorteio,], 1, trocaXY, p))
  return(Xb)
}

#####
# Função para executar o teste bootstrap                                     #
#####

bootTest <- function(it, X)
{
  Xb <- bootSample(X)
  S <- var(Xb)
  p <- ncol(Xb) %/% 2
  n <- nrow(Xb)
  S11b <- S[1:p,1:p]
  S22b <- S[(p+1):(2*p), (p+1):(2*p)]
  S12b <- S[1:p, (p+1):(2*p)]
  tcb <- tTestb.rhomax(S11b, S22b, S12b, n)
  tcb
  return(tcb)
}

#####
# Função para aplicar o teste bootstrap                                     #
# Recebe: X (n x 2p), B                                                 #
# Retorna: o valor original tc e o valor-p                               #
#####

TestBootMaxRho <- function(X, B=1000)
{
  S <- var(X)
  p <- ncol(X) %/% 2
  n <- nrow(X)

```

```

S11 <- S[1:p,1:p]
S22 <- S[(p+1):(2*p),(p+1):(2*p)]
S12 <- S[1:p,(p+1):(2*p)]
# cálculo do tc original
tc <- tTestb.rhmax(S11, S22, S12, n)
it <- matrix(1:B, B, 1) # número de bootstrap, usa ao invés do loop,
                        # é o contador do bootSample.
tcb <- apply(it, 1, bootTest, X)

valor.p <- (length(tcb[abs(tcb) >= abs(tc)])+1)/(B+1)
return(list(tc=tc, valor.p=valor.p))
}

#####
# Função para simular dados e aplicar o teste bootstrap #
# Recebe: a Matriz de Covariâncias pop., n e N #
# Dependência: library MASS #
#####

library(MASS)
simMCB <- function(Sig, n = 10, N = 1000)
{
  p <- nrow(Sig) / 2
  ct <- matrix(c(0,0),2,1)
  value <- c("0,05", "0,01")
  rownames(ct) <- value
  for (i in 1:N)
  {
    X <- mvrnorm(2, rep(0, 2 * p), Sig)
    tc <- TestBootMaxRho(X, B)
    if (tc$valor.p <= 0.05) ct[1,1] <- ct[1,1] + 1/N
    if (tc$valor.p <= 0.01) ct[2,1] <- ct[2,1] + 1/N
  }
  return(ct)
}

#####
# Exemplo de Simulação #

```

```
#####  
  
N <- 10000  
n <- 10  
##sob H0 # Erro tipo I - matriz de correlação 8x8  
Sig <- matrix(c(1,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,1,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,  
  0.9,1,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,1,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,1,0.9,  
  0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,1,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,1,0.9,0.9,0.9,  
  0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,1),8,8)  
eigen(Sig)  
simMCB(Sig, n, N)  
  
##sob H1 # Poder do teste - matriz de covariâncias 8x8  
Vmeio <- diag(c(4,5,2,1,16,20,30,10))  
Sig1 <- Vmeio %*% Sig %*% Vmeio  
simMCB(Sig1, n, N)  
  
#####
```