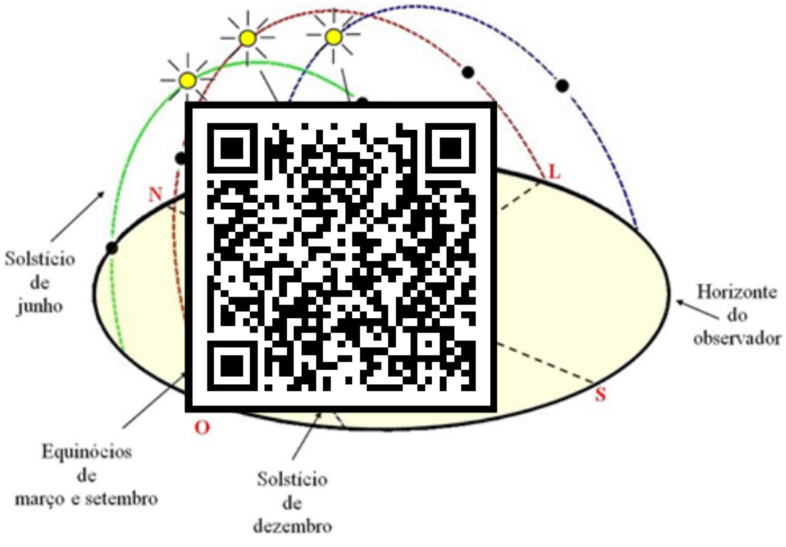
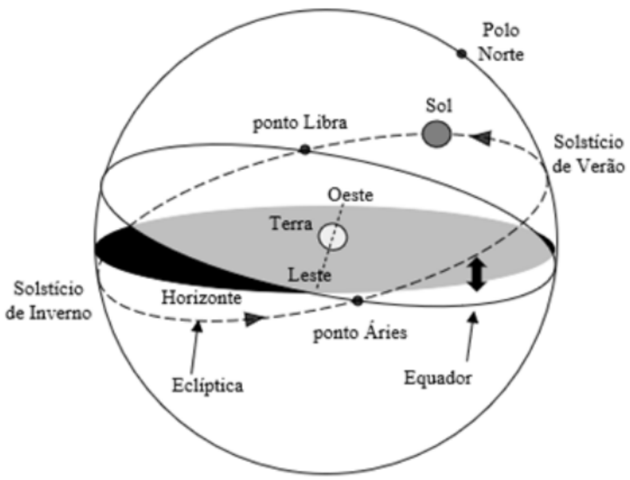
PRODUTO EDUCACIONAL

UNIDADE DIDÁTICA

CONRADO JENSEN TEIXEIRA
JOSÉ ANTÔNIO ARAÚJO ANDRADE

O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA





ppgecem
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UFLA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

ppgecem

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

COLEÇÃO DE E-BOOKS *PRÁTICAS PEDAGÓGICAS E FORMAÇÃO DOCENTE*

O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Conrado Jensen Teixeira
José Antônio Araújo Andrade

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Desenvolvimento do Acervo da Biblioteca Universitária da UFLA

Teixeira, Conrado Jensen
O desenvolvimento da trigonometria / Conrado Jensen Teixeira, José Antônio Araújo Andrade. – Lavras: PPGECEM/UFLA, 2022. (Práticas pedagógicas e formação docente)
67 p. : il.

Bibliografia.
ISBN: 978-65-998258-5-9

1. Formação de professores. 2. Ensino de matemática. 3. Prática de ensino. I. Andrade, José Antônio Araújo. II. Título. III. Série.

CDD – 374

Ficha elaborada por Rafael Chaves Alem Martins (CRB 6/3590)

Coordenador da Coleção de e-books *Práticas Pedagógicas e Formação Docente*:
José Antônio Araújo Andrade

Editor responsável:
José Antônio Araújo Andrade

Revisão:
Luiz Regis da Costa Junior

Capa:
Conrado Jensen Teixeira e José Antônio Araújo Andrade

Diagramação:
José Antônio Araújo Andrade

Coleção de e-books Práticas Pedagógicas e Formação Docente

José Antônio Araújo Andrade

Marianna Meirelles Junqueira

Iraziet da Cunha Charret

SUMÁRIO

1

APRESENTAÇÃO

Estimada professora e estimado professor, é uma honra tê-los como leitores deste trabalho! Este Produto Educacional foi concebido com a intenção de ser um material de apoio à prática pedagógica de professores de Matemática, para o desenvolvimento do campo de conceitos da Trigonometria. Trata-se de uma Unidade Didática, constituída por um conjunto de Situações Desencadeadores de Aprendizagem (SDA), inserida no âmbito de pesquisa intitulada *A organização do ensino de Trigonometria a partir da essência do objeto da Atividade de Estudo*, desenvolvida junto ao curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Federal de Lavras (UFLA). Esta Unidade Didática tem como objetivo principal apoiar a prática didático-pedagógica do professor e ser um dos instrumentos que possibilita ao estudante desenvolver o pensamento teórico em Trigonometria. Destacamos que para a eficácia do objetivo proposto, há a compreensão da atuação docente como organizador de ensino e mediador do processo de aprendizagem.

Compreendemos que as relações entre diferentes sujeitos podem produzir múltiplas realidades, por isso recomendamos a plena adaptação deste material aos diversos contextos de salas de aula. A própria Unidade Didática é uma sugestão para o professor, todavia entendemos que qualquer outra proposta que vise a apropriação do campo conceitual da Trigonometria em sua plenitude precisa preservar a estrutura do Esquema 1.

Esperamos que este produto educacional satisfaça você, professor, em sua busca de um modo prazeroso e eficaz para os estudantes se apropriarem do campo conceitual da Trigonometria. Gostaríamos de expressar nossa gratidão pela leitura e possível uso deste produto, em parte ou no todo, em suas aulas.

Conrado Jensen Teixeira e *José Antônio Araújo Andrade*

2

VISÃO GERAL DA UNIDADE DIDÁTICA

Esta Unidade Didática (UD) se divide em quatro partes, cada uma de uma cor para melhor organização: Ângulo (em vermelho), Técnicas de Medições (em roxo), Tábuas Trigonométricas (em azul) e a Matemática por ela mesma (em verde). Cada parte da UD denominamos de Momentos Didáticos (MD). Esses Momentos Didáticos objetivam a apropriação de um conceito ou técnica que carregam consigo uma relação de inseparabilidade e constituição do todo, no caso, a Trigonometria. Por sua vez, os Momentos Didáticos se dividem em sub momentos que visam - em sua unidade - incitar a manifestação do conceito ou técnica historicamente desenvolvidos e propostos para a apropriação do aprendiz.

Cada Momento Didático pretendem produzir Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) que, por sua vez, objetivam mobilizar o estudante a entrar no processo que chamamos de Atividade de Aprendizagem. Espera-se que o aluno em Atividade de Aprendizagem sinta a necessidade e o desejo de buscar a apropriação do conceito ou técnica sugerida. O fim do MD se apresenta na percepção do professor sobre a apropriação do conceito ou das técnicas por parte dos estudantes, ou seja, na satisfação da necessidade gerada inicialmente.

Além disso, esta Unidade Didática contém textos suportes. Esses textos surgem como uma forma de tornar a intenção, em cada sugestão de desenvolvimento dos sub momentos, mais compreensíveis para o leitor e é uma tentativa de aproximar o idealizado pelos autores com a apreensão e ação docente. Cada texto suporte tem sua existência única, ou seja, não há uma continuidade em seu formato fenomênico, apenas na essência; na relação histórica no campo conceitual da Trigonometria. Dito isso, será possível verificar que o primeiro texto suporte – *No berço da civilização* – tem forma de texto literário, divergindo dos demais.

2.1 Organização da obra

Apresentamos na Tabela 1 a organização da obra. Na sequência, dissertaremos sobre as ideias gerais de cada Momento Didático.

Tabela 1 – Organização da obra

Momento Didático	Situação Desencadeadora de Aprendizagem	Momentos Intermediários
Ângulos	SDA 1: Fracionando o dia	(i) Percepção das regularidades naturais. (ii) Apropriação das regularidades.
Técnicas de Medições	SDA 2: O raio da Terra	(i) Produções elementares. (ii) O que se pode fazer com ângulos?
Tábuas Trigonométricas	SDA 4: Situando a Terra no modelo Ptolomaico SDA 5: Construindo um relógio de Sol	(i) Tábuas de cordas. (ii) Jyā – as tábuas de Seno e Cosseno. (iii) Cadê a Tangente?
A Matemática por ela mesma	SDA 6: A Matemática pura	(i) A função trigonométrica. (ii) Gráficos trigonométricos.

Fonte: Teixeira (2022)

ÂNGULOS

O foco deste MD é a manifestação/mobilização do conceito de Ângulo e sua apropriação pelos estudantes. É o cerne de toda produção teórica e sensível para a constituição do pensamento teórico no campo conceitual da Trigonometria. A manifestação do conceito de Ângulo depende da ação objetiva dos alunos, isto é, no estudo e contato com os objetos naturais. Também depende da percepção das regularidades da Natureza e do caráter instrumental dessas regularidades ao ser humano para a satisfação de certa necessidade surgida diante de um problema social.

Ao tentar se apropriar dessa grandeza, o ser humano necessitou produzir instrumentos que em suas respectivas evoluções permitiram a apreensão de mais regularidades e de outros conceitos e técnicas. Com isso em vista, espera-se que as mesmas necessidades surjam ao longo do desenvolvimento deste Momento Didático.

TÉCNICAS DE MEDIÇÕES

As Técnicas de Medições são constituídas por conteúdos práticos com suporte teórico, tais como, o Teorema de Pitágoras, a propagação retilínea da luz, o Teorema de Talles, semelhança e congruência de triângulos etc. Essas técnicas, em sua singularidade ou em conjuntos, permitiram ao ser humano uma melhor organização social, entendimento e domínio da natureza. Espera-se que o estudante perceba a relação e interdependência do conceito de Ângulo para o surgimento e desenvolvimento das técnicas propostas.

TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS

Este Momento Didático demarca o ponto central da Unidade Didática, uma vez que é neste momento que a Trigonometria aparece de forma explicita, reunindo e mobilizando todo material teórico e prático anteriormente desenvolvido. Sua forma inicial, *Tábuas de Cordas*, visa mostrar aos aprendizes que o conhecimento humano também depende de maturação para se apresentar na forma mais evoluída. Além disso, intencionamos exibir os motivos das razões trigonométricas serem da maneira como são atualmente.

A MATEMÁTICA POR ELA MESMA

Em *A Matemática por ela mesma*, procuramos fazer com que os estudantes percebam que na evolução histórica da sociedade a própria produção teórica do ser humano produz necessidades que permitem o desenvolvimento de certa disciplina. No caso, planeamos confrontar os mais diversos conteúdos da Matemática para sintetizar o conhecimento das funções trigonométricas e esperamos que eles constatem que a forma pura da Matemática é natural, uma vez que ela irá se desenvolver sobre suas próprias necessidades.

3

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

A elaboração desta Unidade Didática foi fundamentada teórica e metodologicamente pelos conceitos do materialismo histórico-dialético de Karl Marx e Friedrich Engels e por desmembramentos teóricos desse estudo: Teoria Histórico-Cultural de Levy Vigotski, Teoria da Atividade de Alexis Leontiev e a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Vasili Davidov. Nesta Seção, apresentaremos, de forma breve, alguns conceitos que nortearam nosso pensamento e prática, além de explicitar o Esquema 1, um fruto das reflexões teóricas e a espinha dorsal desta Unidade Didática.

3.1 O estrato teórico

A elaboração da Unidade Didática contou com um estudo sobre materiais históricos disponíveis, houve um cuidado para que a análise e a síntese do material histórico pudessem manifestar em sua essência os conceitos do materialismo histórico-dialético, pois

> a essência do conceito filosófico-psicológico materialista dialético da atividade está em que ele reflete a relação entre o sujeito humano como ser social e a realidade externa – uma relação mediatizada pelo processo de transformação e modificação desta realidade externa. A forma inicial e universal desta relação são as transformações e mudanças instrumentais dirigidas a uma finalidade, realizadas pelo sujeito social, sobre a realidade sensorial e corporal ou sobre a prática humana material produtiva. Ela constitui a atividade laboral criativa realizada pelos seres humanos que, através da história da sociedade, tem propiciado a base sobre a qual surgem e se desenvolvem as diferentes formas da atividade espiritual humana (cognitiva, artística, religiosa, etc). Entretanto, todas estas formas derivadas da atividade estão invariavelmente ligadas com a transformação, pelo sujeito, de um ou outro objeto que tem forma ideal (sob a forma ideal). O sujeito individual, por meio da apropriação, reproduz em si mesmo as formas histórico-sociais da atividade. O tipo geneticamente inicial da apropriação é a participação do indivíduo na realização coletiva, socialmente significativa, da atividade, organizada de forma objetal externa. Graças ao processo de interiorização a realização desta atividade se converte em individual e os meios de sua organização, em internos. Uma particularidade importante da atividade humana externa e interna é seu caráter objetal, já que durante o

> processo de satisfazer suas necessidades, o sujeito coletivo e individual da atividade transforma a esfera objetal da sua vida. A atividade humana tem uma estrutura complexa que inclui componentes como: necessidades, motivos, objetivos, tarefas, ações e operações, que estão em permanente estado de interligação e transformação.
> O conceito de atividade está internamente ligado ao conceito de ideal. O ideal é o vir-a-ser do objeto, que se torna real pela atividade do sujeito na forma de necessidades e finalidades, imagens que surgem no sujeito. O plano do ideal existente no homem como ser social, graças aos significados linguísticos e outras formações semióticas e simbólicas, lhe permite prever, predizer e provar as ações possíveis para chegar realmente ao resultado objetal que corresponda a uma necessidade. O procedimento e o caráter destas ações determinam sua finalidade consciente. (DAVYDOV, 1988, p. 13)

A primeira preocupação no desenvolvimento da Unidade Didática e na apresentação textual para professores e estudantes é o caráter do início ativo sobre a realidade. Nesse sentido, ao se entender que o conceito de Ângulo é uma unidade da Trigonometria, buscamos desenvolver a primeira SDA sobre as necessidades históricas e sociais dos povos que perceberam a manifestação dessa grandeza. Em vista disso, sintetizamos que foi a partir da tentativa de domínio das regularidades naturais que o homem sentiu necessidade de se apropriar do conceito de Ângulo.

O desenvolvimento da Unidade Didática respeita o pressuposto de que a história só ocorre por meio das transformações instrumentais dirigidas para uma finalidade. Com isso, em cada SDA proposta, há os momentos didáticos intermediários que objetivam manifestar a necessidade de produção de instrumentos e conhecimentos para a plena apropriação de um determinado objeto. No entanto, o próprio desenvolvimento de instrumentos é aproveitado para uma SDA, no caso, a SDA 2. A *SDA 2: Técnicas de Medições* é uma manifestação do desenvolvimento dos instrumentos possibilitados pela apreensão do conceito de Ângulo.

O gancho, ou seja, o encerramento de uma SDA para o início de outra SDA também ocorre na plena satisfação da necessidade, precursora da busca pelo objeto idealizado, junto da insuficiência dos instrumentos e conhecimentos apropriados em satisfazer novas necessidades humanas. Desse modo surge, por exemplo, a SDA 3; uma vez que as técnicas de medições se mostram insuficientes para alcançar novos objetos do desejo humano.

O processo de ascensão do abstrato ao concreto é uma categoria do materialismo histórico-dialético presente na construção da UD, tanto na formação dos MD quanto na UD no todo.

> O conceito é um conjunto de definições diversas, em seu desenvolvimento vai do abstrato ao concreto [...] para a lógica dialética marxista o método de

> ascensão do abstrato ao concreto é apenas um meio através do qual o pensamento assimila o concreto, o reproduz intelectualmente, mas não o cria. (KOPNIN, 1978, p. 156)

Nos MD a sugestão das ações em direção a um objeto visa inicialmente o engendramento de um objeto abstrato que em sua evolução e na capacidade de generalização e mobilização dos conceitos apropriados torna-se concreto.

> O conceito do abstrato tem várias características: o abstrato é simples, privado de diferenças, não desenvolvido. Estas características designam os aspectos do abstrato real com certa parte autônoma, apartada do todo. Esta parte pode ser, pelo já visto, só o relativamente simples, homogêneo, carente de diferenças qualitativas, não desenvolvido internamente. (DAVYDOV, 1988).

Ao passo que, na apreensão e generalização de cada técnica ou conceito, proposto nos MD o surgimento de um conceito abstrato do todo, ou seja, da Trigonometria.

> No processo de generalização se dá, por um lado, a busca e a designação com a palavra de certo invariante na multiplicidade de objetos e suas propriedades; por outro, o reconhecimento dos objetos da multiplicidade dada com ajuda do invariante separado. Na literatura psico-didática e sobre métodos de ensino, a generalização se caracteriza como a via fundamental para a formação de conceitos nos escolares. (DAVYDOV, 1988, p. 104).

A generalização é conteúdo do pensamento teórico, o pensamento que se objetiva atingir ao final de todo o percurso. Mas para seu alcance precisamos partir da realidade objetiva e explorar o objeto em seu desenvolvimento. “A lógica dialética exige que se tome o objeto em seu desenvolvimento, em seu "automovimento", em mudança” (KOPNIN, 1978, p. 82).

> **No pensamento empírico o objeto é representado no aspecto das suas relações e manifestações exteriores acessíveis à contemplação viva.** A forma lógica do empírico é constituída pelo juízo tomado isoladamente, que constata o fato ou por certo sistema de fatos que descreve um fenômeno. A aplicação prática do conhecimento empírico é restrita, sendo, no sentido científico, um ponto de partida qualquer para a construção da teoria. **O pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste,** cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. Sua forma lógica é constituída pelo sistema de abstrações que explica o objeto. A aplicação prática do conhecimento teórico é quase ilimitada, enquanto no sentido científico a construção da teoria se manifesta como um resultado final, como conclusão do processo de conhecimento. (KOPNIN, 1978, p. 152, grifo nosso)

Nesse sentido, a estrutura da Unidade Didática justifica-se no entendimento de que essa é a marcha do desenvolvimento da Trigonometria; o automovimento da disciplina e que reflete suas relações internas, contradições e leis de constituição. Tudo que foi dissertado nesta Seção pode ser sintetizado como no Esquema 1.

No Esquema 1 há a tentativa de destacar as unidades que compõe o campo conceitual da Trigonometria e o movimento histórico de evolução das unidades, apropriação, além da apreensão dessa disciplina. O caráter das contradições, que permitem o avanço do pensamento, pode ser percebido na passagem de um MD para o outro.

3.2 Rota de Ensino

No Esquema 1, temos a Rota de Ensino. Um esquema que tenta sintetizar a proposta didática apresentada. É possível verificar que esse esquema se divide em quatro principais momentos: ângulo, técnicas de medições, tábuas trigonométricas e funções trigonométricas. Cada momento tem sua subdivisão e todos iniciam por uma SDA, as quais foram elaboradas na tentativa de suscitar a atividade de aprendizagem. Nos próximos parágrafos tentaremos expor os caminhos elucidados pelas setas do esquema.

A primeira SDA (fracionando o dia) carece do pleno desenvolvimento da definição da grandeza ângulo. Historicamente, no instante em que o problema de fracionamento do tempo surge, sua solução é impossível com as ferramentas até então desenvolvidas. Assim, despertam-se as primeiras tentativas em direção à apropriação do conceito. Além disso, essa grandeza exige manifestações em diversas situações da prática cotidiana para seu completo amadurecimento. Por ser uma grandeza, é necessário uma unidade de medida, a qual fica mais precisa à medida em que as ferramentas evoluem. Por conseguinte, no movimento de todo material prático e teórico desenvolvido, tem-se a possibilidade da organização social a partir da solução da primeira SDA. Essa ideia é esquematizada nas conexões em vermelho na Rota de Ensino.

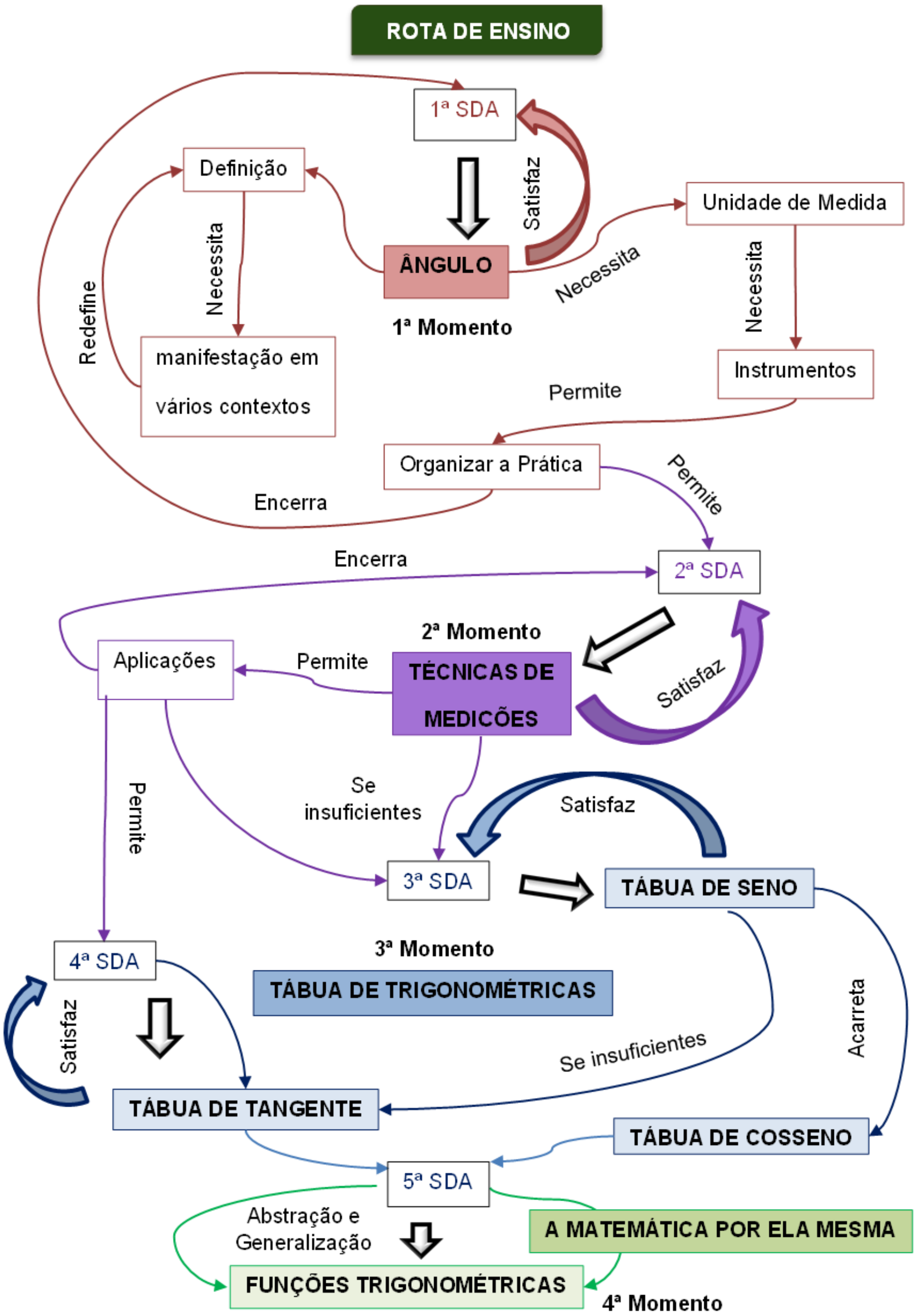
A segunda SDA (técnicas de medições) emerge a partir da continuidade da atividade prática do homem e da grandeza ângulo. O aprendizado dessa grandeza permite o desenvolvimento de instrumentos de medidas, fundamentados em formas geométricas. Consequentemente a capacidade cognitiva também evolui. É no ato de medir e de contextos sociais da época que o homem tem a necessidade de aprimorar os equipamentos disponíveis do período. Em virtude disso que em sala de aula é imprescindível situações em que os alunos precisam medir e que sejam estimulados a refinar as medidas.

É ainda no ato de medir que os instrumentos vão se tornando insuficientes e em certa condição é possível ter a primeiras manifestações do seno e, em outra ocasião, eleva-se a tangente. Assim tem-se a terceira SDA: as tábuas trigonométricas. Para a ampla evolução das tábuas trigonométricas é essencial muito empenho prático e teórico. E esse empenho prático começa a se voltar para dentro dos instrumentos teóricos, os quais produzem suas próprias necessidades.

Em razão dessas necessidades interiores têm-se as condições para a quinta SDA: as funções trigonométricas. O movimento de maturação das funções trigonométricas percorre por todo campo teórico e prático desenvolvido pelas SDA anteriores, além de outros conteúdos da Matemática. Devido à SDA estar condicionada aos problemas da própria disciplina, ao contrário das anteriores que foram incitadas a partir de assuntos de interesse massivamente social, a quinta SDA também recebe a alcunha de “a Matemática por ela mesma”.

Portanto, a Rota de Ensino é uma tentativa de tornar mais próximo e acessível o objeto pensado e materializado nesta unidade didática para os potenciais sujeitos que se servirão dela. Assim se espera, pois foi a partir da sua elaboração que todo texto da UD ocorreu. Apenas com a Rota de Ensino pronta, da maneira como se apresenta no Esquema 1, foi possível a organização do pensamento do autor e, como consequência, o processo de dissertação da UD.

Esquema 1 – A constituição da Trigonometria.



Fonte: Do autor (2020).

4

UNIDADE DIDÁTICA: O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

UNIDADE DIDÁTICA O DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA	
Disciplina: Matemática **Interdisciplinaridade:** Língua Portuguesa, História, Geografia, Física, Filosofia, Astronomia.	
Público alvo: professores	**Tempo previsto:** 4 momentos didáticos

Objetivos de aprendizagem (estudante):

- Compreender os aspectos que transformam a Trigonometria em uma disciplina.
- Ser capaz de mobilizar os principais conceitos e relações em variados contextos.
- Apropriação do campo conceitual da Trigonometria.

Objetivos de ensino (professor):

- Suscitar a Atividade dos estudantes.
- Gerar processos de significação dos conceitos construídos.
- Organizar e mediar o processo de aprendizagem a possibilitar o aluno a atingir os objetivos de estudo.
- Desenvolver o espírito de equipe, a colaboração, o sentido de pertencimento e a criatividade.

Objetivos da Unidade Didática:

- Mobilizar os nexos conceituais do campo conceitual da Trigonometria;
- Instrumentar o professor na organização de sua Atividade de Ensino;
- Possibilitar a viabilização do conhecimento teórico;
- Apresentar uma proposta que integra as unidades do conhecimento matemático, que desenvolve e mobiliza as competências matemáticas expressas na BNCC;
- Interrelacionar as diversas disciplinas ao ensino de Matemática.

MOMENTO DIDÁTICO 1: ÂNGULOS

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">MOMENTO DIDÁTICO 1
ÂNGULOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tempo previsto: 100 min (2 aulas)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo: desenvolver o pensamento teórico do conceito de Ângulo</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">MOMENTOS INTERMEDIÁRIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento Intermediário 1: Percepção das regularidades naturais.
Momento Intermediário 2: Apropriação das regularidades.
Momento Intermediário 3: O que se pode fazer com ângulos?</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Situações Desencadeadoras de Aprendizagem
FRACIONANDO O DIA</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Momento Intermediário 1
PERCEPÇÃO DAS REGULARIDADES NATURAIS</td></tr>
<tr><td>Objetivos Específicos:
▪ Suscitar a Atividade de Estudos a partir da primeira Situação Desencadeadora de Aprendizagem.
▪ Perceber a manifestação da grandeza ângulo em diversos contextos.</td><td>Instrumento Mediador:
▪ Gnômon.</td></tr>
<tr><td colspan="2"> DESENVOLVIMENTO O início do Momento Didático 1 se dá com uma roda de conversa. O professor poderá iniciar uma história dos primórdios sociais onde, ao dominar e enriquecer seus instrumentos, a humanidade consegue se estabelecer numa formação sedentária. Dessa formação surgem necessidades de apropriar-se das regularidades dos aspectos humanos, de animais e de floração dos variados tipos de cultivares. Uma vez que a grandeza Tempo se revela na coincidência de acontecimentos de dois ou mais eventos distintos, é importante revelar que as regularidades supracitadas acontecem de forma quase sincrônica a padrões dos movimentos dos corpos celestes e de eventos do céu. O tempo desperto do humano coincide com o nascer e o pôr do Sol, as fases da Lua </td></tr>
</table>

se assemelha ao período menstrual e o mais importante, de início, o tempo de floração ocorre de forma simultânea ao equinócio de primavera.

Após esse início, há a oportunidade de se fazer a pergunta que possibilita engendrar a primeira SDA:

SDA 1 – De que maneira os antigos podiam construir um calendário?

Diante das diversas possibilidades de respostas, é importante lembrar os estudantes da falta de instrumentos dos povos antigos para se ter um tipo complexo de solução. Nesse sentido, os estudantes necessitarão produzir instrumentos de caráter sensível e conceituais para se apropriar do objeto que satisfaz a necessidade.

ESTRATÉGIAS DE ENSINO

- Use o texto suporte, *No berço da civilização*, como uma alternativa para o início da história ou da Unidade Didática.
- Incite a quebra do problema em outro menor: construção de um relógio (esse problema só será possível solucionar ao fim do momento intermediário 2).
- Verificar que o passeio do Sol é circular – isso pode ser feito apenas apontando o braço para um ponto que ele nasce e conduzi-lo até o local que ele se põe.
- Use o Gnômon para capturar esse passeio em sua projeção (sombra) na Terra.
- Divida o passeio completo (arco de meia volta) em dois arcos (ângulo reto).
- Mostre o enorme potencial do ângulo reto nas construções.
- Use o Gnômon para construir as direções Norte-Sul, Leste-Oeste.
- Apresente a grandeza ângulo em diversos contextos (polígonos, ângulo de visão, na relação entre retas, inclinação etc.
- Sistematize o conceito.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático 1.

Momento Intermediário 2
APROPRIAÇÃO DAS REGULARIDADES

Objetivos Específicos:	**Instrumentos Mediadores:**
▪ Identificar que a elaboração e apropriação do conceito de tempo contribui para a organização social. ▪ Investigar a regularidade dos movimentos naturais e sua íntima relação com tempo.	▪ Gnômon. ▪ Software Stellarium[1]. ▪ Aplicativo Sun Locator[2] e SkySafari[3]. ▪ Sulfite A4. ▪ Lápis colorido.

DESENVOLVIMENTO

O desenvolvimento do conceito de ângulo exige a definição de unidade e de instrumentos por se tratar de uma grandeza. Nesse sentido, o uso do *software* livre *Stellarium* e de aplicativos para celulares, tais como o *Sun Locator* e o SkySafari serão fundamentais para investigar a regularidade das estrelas. Além de tudo, surgirá a necessidade de se entender algumas nomenclaturas do céu e de conceitos do modelo ptolomaico. Explore o céu com os *softwares*.

Divida o passeio do Sol em ângulos menores que 90º ou maiores que 90º, de forma a sistematizar a organização social em torno de 24h e suscitar a criação de instrumentos para isso. Para essa tarefa é possível dividir com régua e compasso e também construir um esquadro com dobraduras.

ESTRATÉGIAS

- Use o *Stellarium*, *Sun Locator* e *SkySafari* como instrumentos de investigação das regularidades celestes.

---

[1]*Stellarium* é um planetário de código aberto para computador. Ele mostra um céu realista em três dimensões igual ao que se vê a olho nu, com binóculos ou telescópio. Disponível em: https://stellarium.org/pt

[2]*Sun Locator* é um aplicativo disponível para *Android* que permite verificar a posição do Sol e da Lua a qualquer hora do dia.

[3]*SkySafari* é um planetário para smartphones disponível para *Android* e *iOS* que possibilita a localização de planetas, constelações, satélites, estrelas e objetos diversos do céu.

- Faça com que os alunos percebam que a estrelas retornam a mesma posição em torno de 365 dias.
- Aproveite o sentido do Sol para dar o sentido positivo da circunferência trigonométrica.
- Aproveite a regularidade das estrelas para definir a unidade grau.
- Incite a percepção de o Sol percorre um arco diário, mas que sua posição também não é fixa no céu. Dentro de um ano ele percorre um arco nomeado de Eclíptica (Figura 1).
- Faça um estudo do céu no modelo ptolomaico (Figura 2).
- Explore o surgimento de constelações e estrelas para separar as estações.
- Provoque a necessidade de se produzir instrumentos para medir um ângulo.
- Construa ângulos com dobraduras.

  Ângulos notáveis com dobraduras

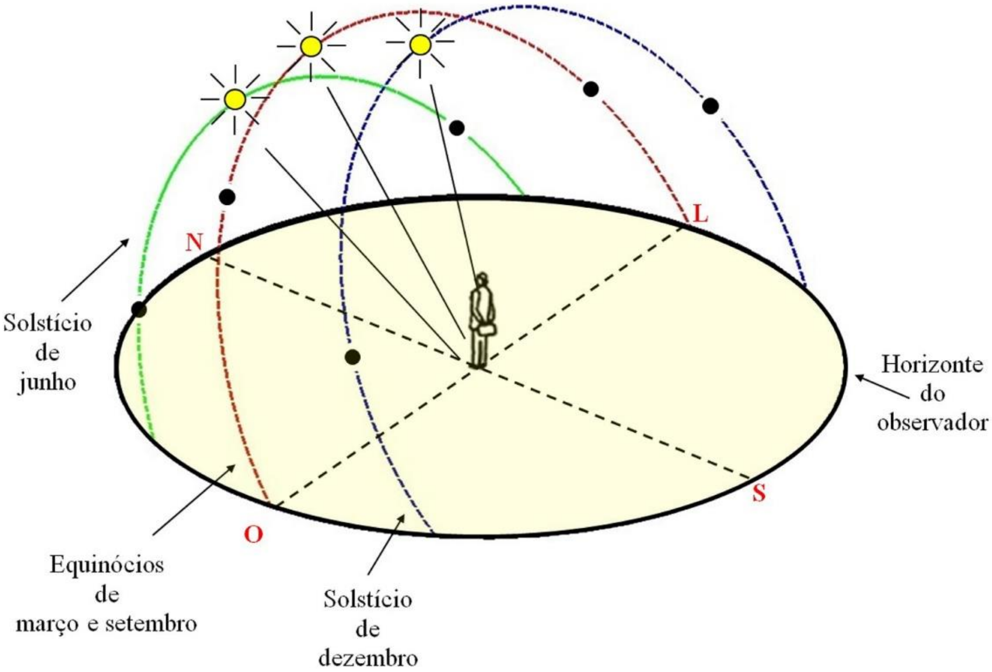
- Produza um esquadro caseiro

  Construindo Esquadros Caseiros

Momento Didático 1
ENCERRAMENTO

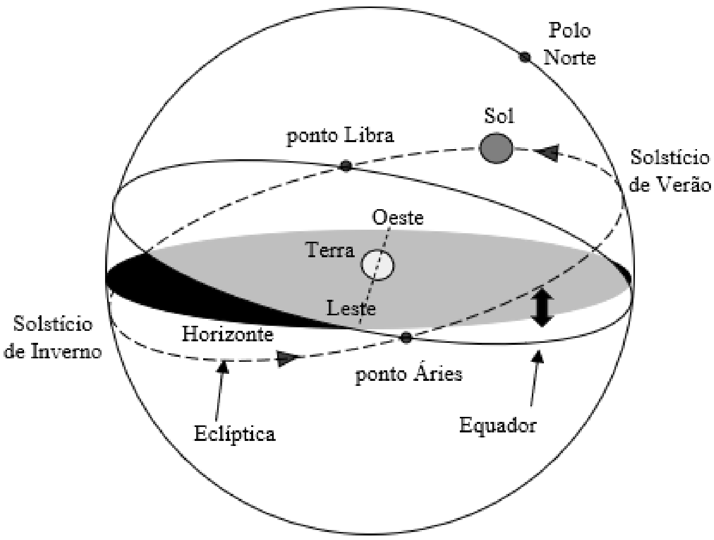
Após a construção e o uso do transferidor e esquadros caseiros, faz-se uma síntese coletiva da sequência. Recomendamos voltar a primeira pergunta egípcia, destacar os principais resultados alcançados e apontar como o conceito Ângulo desencadeou toda a produção técnica e teórica; além do seu pleno desenvolvimento satisfazer a pergunta em sua totalidade.

Figura 1 – O trajeto do Sol ao longo do ano



Fonte: https://www.scielo.br/img/revistas/rbef/v40n1//1806-1117-rbef-40-01-e1501-gf03.jpg. Acesso em 17 de agosto de 2020.

Figura 2 – Modelo do Universo pelo antigos povos.



Fonte: Teixeira (2022).

MOMENTO DIDÁTICO 2: TÉCNICAS DE MEDIÇÕES

MOMENTO DIDÁTICO 2 TÉCNICAS DE MEDIÇÕES	
Tempo previsto: 200 min (4 aulas).	
Objetivo: desenvolver instrumentos que possibilitam o avanço da disciplina, do pensamento e social.	
MOMENTOS INTERMEDIÁRIOS	
Momento Intermediário 1: Produções elementares. Momento Intermediário 2: O que se pode fazer com ângulos?	
Situação Desencadeadora de Aprendizagem **O RAIO DA TERRA**	
Momento Intermediário 1 **PRODUÇÕES ELEMENTARES**	
Objetivos Específicos: ▪ Produzir instrumentos para reorganização social e do pensamento.	**Instrumentos Mediadores:** ▪ GeoGebra[4].

DESENVOLVIMENTO

Neste momento, pode-se continuar com a história da humanidade e destacar que – a partir de problemas advindos de construções civis, da agricultura e/ou de questões supersticiosas/religiosas – a necessidade de se aprimorar o calendário, determinar de forma precisa posições dos corpos celestes e produzir ferramentas que verificam as inclinações foram tornando-se cada vez mais emergentes. Além disso, em várias sociedades se desenvolviam conhecimentos cada vez mais úteis e que se tornavam base para uma exploração posterior.

Dentre os conhecimentos úteis houve: a determinação do irracional π, assim como a tentativa de determinar valores para ele; a construção de um triângulo retângulo com lados

[4]O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Está disponível em aplicativos para Android, iOS ou https://www.geogebra.org/

3, 4 e 5 (Triângulo Egípcio), assim como a tripla pitagórica; um cálculo aproximado para o comprimento da circunferência; reconhecimento de diversos polígonos regulares, etc. Por esse motivo, é importante retomar alguns resultados básicos da Geometria que já foram vistos pelos alunos ao longo da vida escolar e utilizá-los de forma prática em sala de aula, além de explorar um pouco mais sobre ângulos. O intuito é deixá-los em zonas de possibilidades para a solução de problemas que estão por vir.

ESTRATÉGIAS

O quê?	Por quê?	
Círculo	O círculo é a figura referência para o desenvolvimento da Trigonometria.	Esses objetos e resultados podem ser explorados no software GeoGebra[5]. Além disso, use o software para construir ângulos notáveis (substituindo a régua e o compasso) e também para explorar a divisão da circunferência por polígonos regulares.
Figuras Regulares	As figuras regulares serão importantes para desenvolver técnicas de medições e desenvolvimento da Trigonometria	
Triângulos	Os triângulos são as figuras por trás de todas as técnicas de medições.	
Teorema de Tales	Este teorema dará sustentação a proporcionalidade existente entre triângulos e será um dos primeiros teoremas usados para medições além do alcance.	
Semelhança e Congruência de Triângulos	Resultado necessário para as medições terrestres e astronômicas.	
Teorema de Pitágoras	Outro resultado necessário para as medições terrestres e astronômicas.	

[5]Há centenas de materiais prontos e gratuitos disponíveis na página do GeoGebra. Existe também a possibilidade de se criar os conteúdos baseados no objetivo.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Intermediário 2

O QUE SE PODE FAZER COM ÂNGULOS?

Objetivos Específicos:	**Instrumentos Mediadores:**
▪ Suscitar a segunda Situação Desencadeadora de Aprendizagem	▪ GeoGebra. ▪ Lanterna.

DESENVOLVIMENTO

Com a organização social tornando-se mais complexa, o ser humano começa a querer fazer obras mais perfeitas e explorar o seu local de residência com mais profundidade; em busca de recursos, riquezas, locais mais favoráveis para o plantio e criação de animais e até mesmo por uma questão de expansão territorial. Porém, descobrir como fazer as obras faraônicas de forma mais perfeita ou saber o tamanho do mundo passa pela perfeita junção de diversos conhecimentos culturalmente acumulados.

Além disso, alguns fatos são requeridos, tal como ter consciência de que o planeta que habitamos se assemelha em sua forma com a Lua ou com o astro rei. Para verificar que a Terra é redonda, bastava verificar a sombra que ela fazia na Lua durante os eclipses. Por sinal, determinar as datas dos eclipses era uma necessidade da sociedade antigas por razões místicas e religiosas.

SDA 2 – Qual é o tamanho da Terra?

Para determinar o tamanho da Terra é preciso saber seu raio. Além disso, algumas técnicas precisam ser desenvolvidas e saberes revelados, tal como a propagação retilínea da luz e que toda reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

ESTRATÉGIAS

- Primeiro, explique sobre a trajetória retilínea da Luz.
  - Pegue um objeto opaco e que tenha uma boa altura; por exemplo, um caderno em pé. Ligue a câmera do seu celular e percorra o seu caderno segundo um caminho

circular, ou seja, vá de um lado para o outro, passando por cima do caderno. Analise o tamanho da sombra durante o percurso e conclua sobre a trajetória retilínea da luz.

- Incite a determinação do tamanho da pirâmide.
  - Veja as versões de Hicrônimos e Plutarco nos textos suportes.
  - É possível encontrar materiais no GeoGebra que auxiliam na visualização dinâmica das versões.
- Aproveitando que se mediu o que não se pode alcançar, provoque a tentativa de determinação da distância de um navio no horizonte.
  - Veja o texto suporte *Navio no horizonte*.
- Volte ao problema da determinação do raio da Terra e utilize informações do texto suporte *O raio da Terra* como apoio na mediação.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Didático 2
ENCERRAMENTO

Quando calculado o raio da Terra, volte ao problema da distância de um navio no horizonte, desse modo encerra-se o Momento Didático 2. Recomendamos fazer uma síntese do que foi feito de forma a se obter uma visão panorama dos resultados e da potencialidade dos ângulos e de conhecimentos obtidos da análise direta de fenômenos naturais e cotidianos.

MOMENTO DIDÁTICO 3: TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS

MOMENTO DIDÁTICO 3 TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS	
Tempo previsto: 300 min (5 aulas).	
Objetivo: desenvolver as tábuas que permitem a sistematização da disciplina.	
Momentos Intermediários	
Momento Intermediário 1: Tábuas de Cordas. Momento Intermediário 2: Jyā – as Tábuas de Seno e Cosseno. Momento Intermediário 3: O que se pode fazer com o seno e o cosseno. Momento Intermediário 4: Cadê a Tangente?	
Situação Desencadeadora de Aprendizagem **SITUANDO A TERRA NO MODELO PTOLOMAICO**	
Momento Intermediário 1 **TÁBUAS DE CORDAS**	
Objetivos Específicos: ▪ Suscitar a produção e negociação de significados a partir da terceira Situação Desencadeadora de Aprendizagem.	**Instrumentos Mediadores:** ▪ Vídeos. ▪ *GeoGebra.* ▪ *Sky Safari.* ▪ Lápis, caneta etc.

DESENVOLVIMENTO

Conhecer com precisão a posição dos corpos celestes se revelou muito importante para a determinação do calendário, para a orientação em viagens e para a sistematização de um modelo cosmológico. O astrônomo Claudio Ptolomeu, próximo ao ano 150, propôs uma maneira de como entender o movimento dos corpos celestes, baseada na Física Aristotélica e nos estudos de Hiparco de Niceia. Suas hipóteses permaneceram por vários séculos e só começaram a ser superadas em 1543, por Nicolau Copérnico. Muito do que Ptolomeu teorizou pode ser considerado uma formalização do senso comum, por isto é importante explorar o céu a olho nu e entender as razões para o seu surgimento, bem como a contradições que conduzem a sua superação.

Neste ponto, levando em consideração a necessidade de sistematizar um modelo cosmológico, de determinar com mais precisão a posição das estrelas e ainda de melhorar o calendário, surge a 3ª SDA:

SDA 3 – Onde se situa o Sol na geometria celeste?

ESTRATÉGIAS

- Apresente os principais modelos cosmológicos

  Cláudio Ptolomeu, O matemático e astrônomo do Geocentrismo

- Explore:

  O modelo ptolomaico

- Mostre que o problema da localização do Sol exige determinar sua excentricidade, o que acarreta a produção de instrumentos.
- Use o GeoGebra como recurso para demonstrar a relação intrínseca entre o ângulo e os lados de um triângulo.
- Faça com que os alunos tentem reproduzir as tabelas de cordas para arcos notáveis.
- Se necessário, apresente a tabelas com outros arcos.
  - Devido a impossibilidade da trissecção de um ângulo, o cálculo do arco de 1º só é possível por aproximações numéricas.
  - Fica a cargo do professor explorar esse problema ou apresentar a Tabela 2 da Seção 4 deste Produto Educacional.
- Resolva o problema da excentricidade.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Intermediário 2

JYA - TÁBUAS DE SENOS E COSSENOS

Objetivos Específicos:

- Simplificar as tábuas de cordas.
- Estabelecer a relação biunívoca entre a razão de lados de um triângulo e ângulo.
- Perceber que as tábuas desenvolvidas podem ser desenvolvidas apenas com triângulos.
- Desenvolver as tabelas trigonométricas.

Instrumentos Mediadores:

- *GeoGebra*.
- Tábua de cordas.

DESENVOLVIMENTO

O desenvolvimento das tábuas de seno e cosseno surgem no entendimento que seria suficiente tomar metade da corda, seu aprimoramento se dá pela fixação do raio da circunferência trigonométrica.

ESTRATÉGIAS

- Faça os alunos explorarem os lados opostos de um triângulo inscrito para diferentes raios da circunferência (use o GeoGebra).
- Faça-os produzirem tabelas com diferentes raios se desejar.
- Peça-os para reproduzir as tabelas das cordas dos arcos notáveis para a função seno e seu complementar (cosseno).

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Intermediário 3
O QUE SE PODE FAZER COM O SENO E O COSSENO?

Objetivos Específicos:	**Instrumentos Mediadores:**
▪ Mobilizar os conhecimentos de seno e cosseno.	▪ *GeoGebra*. ▪ Tábua de cordas.

DESENVOLVIMENTO

No problema de medir o que não se alcança, pode-se desafiar os estudantes a medirem a distância e o raio da Lua, dessa forma possibilita a dimensão da distância dos corpos celestes e se fixa de vez no firmamento a Lua.

ESTRATÉGIAS

- Peça para medirem a distância até a Lua.
- Peça para medirem o raio da Lua.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Intermediário 4
CADÊ A TANGENTE?

Objetivos Específicos:	**Instrumentos Mediadores:**
▪ Suscitar a quarta Situação Desencadeadora de Aprendizagem. ▪ Integrar a Tangente na Trigonometria.	▪ GeoGebra.

Situação Desencadeadora de Aprendizagem
CONSTRUINDO UM RELÓGIO DE SOL

DESENVOLVIMENTO

Enuncie sobre os relógios de Sol no antigo Egito e desenvolva algumas razões de sombra.

ESTRATÉGIAS

- Use o GeoGebra e o texto suporte.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Didático 3
ENCERRAMENTO

Após a construção da tabela da Tangente, pode-se retomar a SDA 3 e fazer uma análise de todos os conhecimentos apropriados.

MOMENTO DIDÁTICO 4: A MATEMÁTICA POR ELA MESMA

Momento Didático 4
A MATEMÁTICA POR ELA MESMA

Tempo previsto: 100 min (2 aulas).

Objetivo: desenvolver instrumentos que possibilitam o avanço mental e social.

MOMENTOS INTERMEDIÁRIOS

Momento Intermediário 1: A função Trigonométrica.
Momento Intermediário 2: Gráficos Trigonométricos.

Situação Desencadeadora de Aprendizagem
A MATEMÁTICA PURA

Momento Intermediário 1
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos Específicos:	**Instrumentos Mediadores:**
▪ Suscitar a quinta Situação Desencadeadora de Aprendizagem.	▪ Tabelas produzidas. ▪ *GeoGebra*.

DESENVOLVIMENTO

Relembre conceito de funções.

SDA 5: As relações das tabelas produzidas estabelecem uma relação de função?

Incite a exploração das tabelas produzidas.

Faça a apresentação da unidade de medida em radianos, peça para atualizar as tabelas com relação à nova unidade e sugira uma nova exploração.

ESTRATÉGIAS

- Use o *GeoGebra* para definir o radiano.
- Estabeleça a relação de função para o seno, cosseno e a tangente.
- Apresente particularidade das funções, tal como domínio etc.
- Apresente um contexto prático das funções.

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Intermediário 2
GRÁFICOS TRIGONOMÉTRICOS

Objetivos Específicos:	**Instrumentos Mediadores:**
▪ Suscitar a quinta Situação Desencadeadora de Aprendizagem	▪ GeoGebra. ▪ Ciclo trigonométrico

DESENVOLVIMENTO

Faça com que os estudantes construam os gráficos das funções e depois explorem algumas propriedades.

ESTRATÉGIAS

- Peça para tentarem construir os gráficos.
- Use o GeoGebra para explorar particularidades de cada gráfico.
- Faça-os fazer um paralelo com o ciclo trigonométrico.
- Apresente contextos práticos das funções.
- Use recursos tradicionais para construções das tabelas (músicas e o método da mão).

AVALIAÇÃO

- Tem-se na participação individual e coletiva os definidores avaliativos desse Momento Didático.

Momento Didático I
ENCERRAMENTO

Após a construção da tabela é importante destacar que, em certo ponto, a Matemática se desenvolve a partir de suas próprias necessidades, uma vez que se tem os materiais disponíveis para se explorar certas produções e teorizar sobre outras. Perceba que no caso da exploração das funções trigonométricas, o conceito de função e o modo de construir gráficos devem ser previamente conhecidos a partir da exploração de funções mais básicas, tais como a função afim e a função quadrática.

Desse modo, se produz uma matemática de forma pura (interna a ela) e só depois se busca o contexto do mundo sensível.

5

TEXTOS SUPORTES

5.1 Texto suporte do Momento Intermediário 1 do MD 1

No berço da civilização

Olá, querido estudante!

Você foi convidado a acompanhar a viagem da desbravadora do tempo, Cecília Jensen. Cecília é uma menina de 16 anos, curiosa por natureza, audaz, cheia de energia e que sempre está acompanhada do seu fiel escudeiro, um cachorro chamado Titico. Quando ela tinha 12 anos ganhou uma máquina do tempo do seu avô, o nada ortodoxo, Lauro Jensen. Desde então Cecília faz incríveis viagens pelo espaço-tempo.

A máquina do tempo é incrível! Tem um formato de um balão de coração e permite ao viajante voltar a qualquer data no tempo, te torna invisível durante a visita e funciona igual o YouTube. Sim, você não leu errado! É igual ao YouTube pois ela tem a função de acelerar a cena, dessa forma podemos dar saltos no tempo ou ver fatos históricos mais rápido que o normal.

Claro que o velho Lauro Jensen pensou em vários outros detalhes, como o problema com as diversas línguas que o viajante vai encontrar no percurso. Por esse motivo, o avô cientista também desenvolveu um chip que quando fixo na pele faz com que o sujeito entenda qualquer tipo de língua. Surpreendente! E você pode estar se perguntando: “Como a máquina faz para voltar no tempo?”. Bom! Lauro descobriu que as estrelas detêm o passado, então criou um mecanismo que reconhece o que você pretende buscar no passado por meio de um escâner e depois disso o balão aponta para a estrela correta e conduz o passageiro até o corpo celeste.

A viagem é feita em milésimos de segundos, todos os passageiros devem estar tocando o cordão do balão no momento. O balão viaja em um movimento circular acima da velocidade da luz. A viagem só é possível pois todos os corpos se desintegram em moléculas e se recompõem na chegada. Extraordinário esse tal de Lauro Jensen! Cecília teve grande sorte de ganhar esse presentão do avô, sendo uma menina que ama aprender, pode agora conferir uma história muito mais rica da humanidade, que vai além de qualquer livro.

No Berço da Civilização

A primeira viagem de Cecília Jensen será ajustada em, aproximadamente, oito mil anos no passado, vamos deportar em uma região conhecida como Saara, no norte da África. Neste local, uma população humana nômade, caçadora e coletora encontrou abundância em recursos naturais e uma bela paisagem composta por savanas, pampas e alguns bosques. Diversos animais estavam presentes: hipopótamos, crocodilos, antílopes, girafas, elefantes e muitos outros, o que favorecia a arte da caça. A presença de diversos corpos de água, entre eles o extenso rio Nilo, forneciam aos grupos humanos – organizados em aldeias – peixes e água em abundância. A tranquilidade e os recursos do local fizeram alguns povos se assentarem ali por um longo período, o que pode ter permitido ao ser humano ocupar-se com outros fatores além da eterna busca por um bom local que o fornecia comida e água.

Um dos fatos que chamou atenção do ser humano nesse tempo eram eventos que se repetiam simultaneamente, por exemplo, a ascensão helíaca da estrela Sirius que anunciava a inundação do Nilo, além de ser o dia mais longo do ano – atualmente conhecido como solstício de Verão. Em tempos mais amenos e úmidos, plantas floresciam e alguns animais desovavam, talvez para proteger seus filhotes de virem ao mundo num calor escaldante. O ciclo menstrual da mulher parecia ser congruente com a Lua Nova, fase em que a Lua desaparece no céu. Possivelmente, o caso mais elementar dentre as ocorrências coincidentes seja nosso período desperto e também produtivo com alvorecer e o anoitecer. A esses eventos simultâneos o ser humano chamou de Tempo.

Quatro ou cinco mil anos atrás, a região do Saara começou a dessecar, devido um período seco de quase 1000 anos, e o intenso albedo do local. Com isso muitos povos começaram a se concentrar no vale do Nilo que, devido às proteções naturais (deserto e um extenso rio), puderam erguer e desenvolver a civilização Egípcia. Em vista da sazonalidade do Nilo, era possível ter três períodos distintos: inundação ou cheia, plantio e colheita. Junta-se a isso o grande deserto que havia se formado, a agricultura tornava-se uma arte árdua e que carecia da precisão da grandeza Tempo. Além de tudo, é evidente que fracionar os eventos simultâneos permitiria ao homem melhor organização social, ajudando-o em outras tarefas e fenômenos e, o mais importante, o faria deixar de vez de ser nômade e estabelecer soberania sobre a natureza.

Então, foi a partir dos fenômenos do céu que o homem se organizou na Terra. O surgimento da estrela Sirius foi um grande auxiliar para a tarefa de aferir o Tempo. Ao se efetuar a contagem de quantas vezes o Sol se erguia no horizonte até se conseguir ver novamente a estrela Sirius pouco antes do arrebol, os egípcios estabeleceram a duração do ano em 365 dias. As estações do ano podiam ser estabelecidas por constelações que se viam logo após o pôr do Sol e também contar o número de luas entre estações secas e chuvosas. Mas executar as tarefas diárias apenas com a referência do nascer e do pôr do nosso astro rei não era o ideal, por isso os astrônomos egípcios começaram a investigar o céu com mais cuidado. Observou-se, assim, um aspecto curioso e determinante, o Sol surge e esvaece no céu formando um caminho de meio arco de circunferência.

Hora de Testar (1): Para confirmar o fato do deslocamento circular do Sol, aponte um braço próximo ao local onde o Sol nasce e o movimente o outro acompanhando o deslocamento do Sol no céu até o ponto em que ele se põe.

Radamés[6] é um dentre vários cientistas egípcios que buscam determinar a distância entre o nascer do Sol e o momento em que ele se estabelece bem acima de nossas cabeças, o qual denominamos de zênite solar. Ele acreditava que esse momento era a metade do trajeto e que a partir disso poderia estabelecer demais frações. Radamés estava aborrecido por não saber como

[6] Personagem fictício.

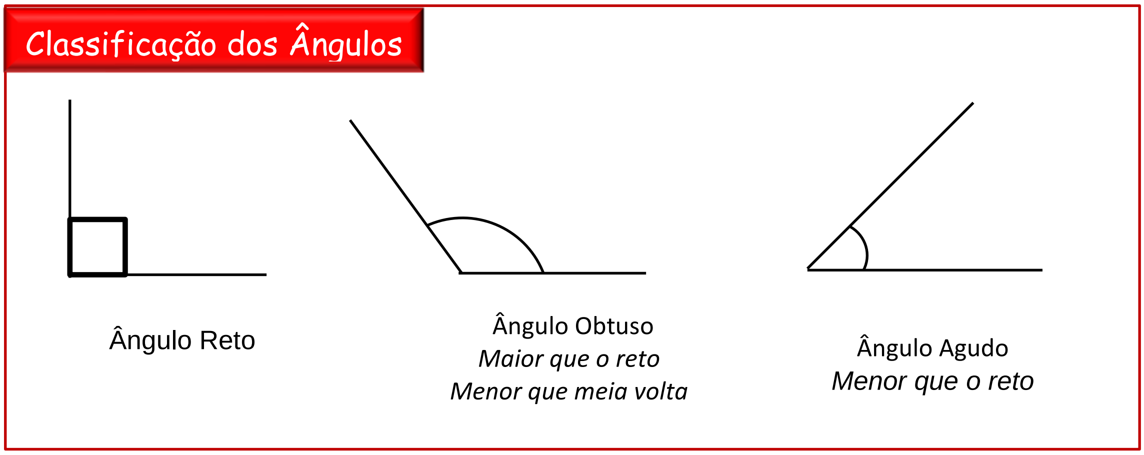
executar essa tarefa, e num passeio que dava às margens do Nilo, se deparou com Cecília conversando com outros locais. Ao perceber que ela era muito curiosa, pois questionava a todo momento sobre as realizações egípcias, e ficar vislumbrado com a inteligência que a menina possuía, Radamés resolveu delegar essa incrível tarefa para Cecília Jensen.

Que conhecimentos Cecília necessitava para medir a distância entre o nascer do Sol e o seu zênite e ajudar Radamés? E como fazer isto?

Radamés agradeceu a Cecília pela grande ajuda e ficou extremamente feliz ao perceber que esse novo conhecimento estava por trás de várias outras situações. Antes de voltar ao problema astronômico, o velho egípcio resolveu contar aos demais sobre o novo conhecimento e explorar um pouco mais do conceito. Ao examinar os ângulos nas construções, os cientistas perceberam que havia um certo ângulo em que as edificações e objetos em geral respeitavam um alinhamento em que eles consideravam perfeito. Perceberam que o chão e a parede de um prédio quando relacionados por esse ângulo, fazia com que a água não escorresse horizontalmente e se colocassem um objeto pesado suspenso por um fio (chamado de prumo) ele não tocava a parede.

Construindo um Fio de Prumo	
Material	Como fazer
▪ 1 garrafa pet com tampa ▪ Barbante ▪ Palito de picolé ▪ Parafuso (ou algo pesado)	▪ Encha a garrafa com água ▪ Dê quatro furos na tampa para amarrar o palito nela ▪ Amarre uma extremidade do palito na tampa e na outra amarre o barbante ▪ Coloque a tampa na garrafa e corte o barbante de acordo com a altura da garrafa ▪ Amarre o parafuso na extremidade do barbante para mantê-lo esticado

Tendo este ângulo como referência, o qual foi chamado de **ângulo reto**, Radamés e seus colegas resolveram definir a primeira noção para medir espaços com ângulo. O ângulo menor que o ângulo reto foi chamado de **ângulo agudo**. O ângulo maior que o reto, chamaram de **ângulo obtuso**. Como inicialmente o interesse era nos ângulos de construções, resolveram delimitar o ângulo obtuso entre o ângulo reto e a metade da circunferência.



Entender a relação dos demais ângulos com o ângulo reto foi um passo muito importante aos egípcios para conseguir executar construções melhores, porém não resolvia a questão proposta, visto que sairiam de uma divisão de nascer - pôr do Sol, para a relação nascer – ponto alto – pôr do Sol. Além disso, diversas tarefas diárias não podiam ficar dependentes da classificação: ângulo reto, agudo ou obtuso. Mas antes mesmo de sair desse problema, havia ainda um mais básico: estabelecer exatamente o zênite solar.

Radamés e seus colegas cientistas sabiam que ao comparar pontos das montanhas, ou outro elemento terrestre, com o momento exato do amanhecer e anoitecer já se chegava perto de lograr dois pontos notáveis. Mas o ponto alto nenhum corpo terrestre ajudava de imediato. Pensando sobre essas questões que Ozires[7], outra cientista do Egito, em um momento filosófico; percebe que o Sol se contrasta com a Lua, que na ausência do Sol também há ausência de luz. Que apesar de luz e escuro serem contrários eles se complementam para a percepção humana; é necessário existir um para se definir o outro.

Ozires dessa forma, resolveu investigar a relação da sombra dos objetos e o movimento do Sol. Para essa tarefa a cientista fincou um bastão de madeira

[7]Personagem fictício.

ao chão, posicionando-o sob um ângulo reto e analisou a sombra do bastão ao longo do dia; ela nomeou o bastão de **gnômon**. A jovem cientista percebeu que a sombra ao longo do dia varia de tamanho e que seu curso no chão se assemelhava a meio arco de circunferência, além da luz caminhar sob uma trajetória retilínea.

Ozires apresentou os fatos analisados para os demais; chegaram ao consenso de que deveriam avaliar durante mais dias o comportamento da sombra. Desse modo ao comparar as menores silhuetas do objeto, identificaram que ela também variava. Em dois dias específicos do ano, a sombra atingia seu comprimento máximo (solstícios de Verão e Inverno). Noutros dois, seu menor valor; que a depender da localização geográfica inexistia (equinócio vernal e outonal). A direção que a sombra aponta quando atinge o menor valor, foi socialmente determinada como direção Norte-Sul, já a alvorada e o ocaso estabeleceram o sentido Leste e Oeste, respectivamente. O Norte foi firmado para o sentido em que a menor sombra apontava[8]; já seu local exato foi estipulado a partir do dia em que a sombra do gnômon atingia seu menor comprimento no ano.

Hora de Testar (2): para confirmar o fato visto por Ozires, pegue um objeto opaco e que tenha uma boa altura; por exemplo, um caderno em pé. Ligue a câmera do seu celular e percorra o seu caderno segundo um caminho circular, ou seja, vá de um lado para o outro, passando por cima do caderno. Analise o tamanho da sombra durante o percurso e conclua sobre a trajetória retilínea da luz.

Vamos pensar 1

O Sol nasce sempre no mesmo local? Como você faria para determinar o exato local do ponto cardeal Sul?

[8]Para quem vive no hemisfério Sul da Terra, a sombra menor apontará para o Sul.

Hora de Testar (3): para comparar o local de nascimento do Sol ao longo do ano, vamos utilizar um programa chamado *Stellarium.*

Confiantes devido aos diversos conhecimentos fornecidos pela exploração do céu, a equipe de Ozires sentiu que já era hora de determinar as frações diárias que organizariam melhor a vida dos egípcios. O passeio diário do Sol foi divido em vinte e quatro partes iguais, de forma que doze representariam o dia e outras doze a noite. Assim sendo, a parte da manhã - entre o nascer do Sol e o ponto em que atinge o zênite - ficou dividida em seis parte iguais; por sua vez a parte da tarde – entre o zênite e o anoitecer – ficou com outras seis partes. Deste modo, nascem as horas do dia. Para melhor controle das horas do dia, construíram a partir do gnômon o **relógio de sol.**

Hora de Testar (4): vamos construir um relógio de Sol aproveitando do gnômon.

- Faça uma circunferência de raio do tamanho do gnômon em uso.
- Escolha um ponto e dívida a circunferência com o tamanho desse raio.
- Divida na metade cada arco encontrado.
- Divida novamente cada arco encontrado.

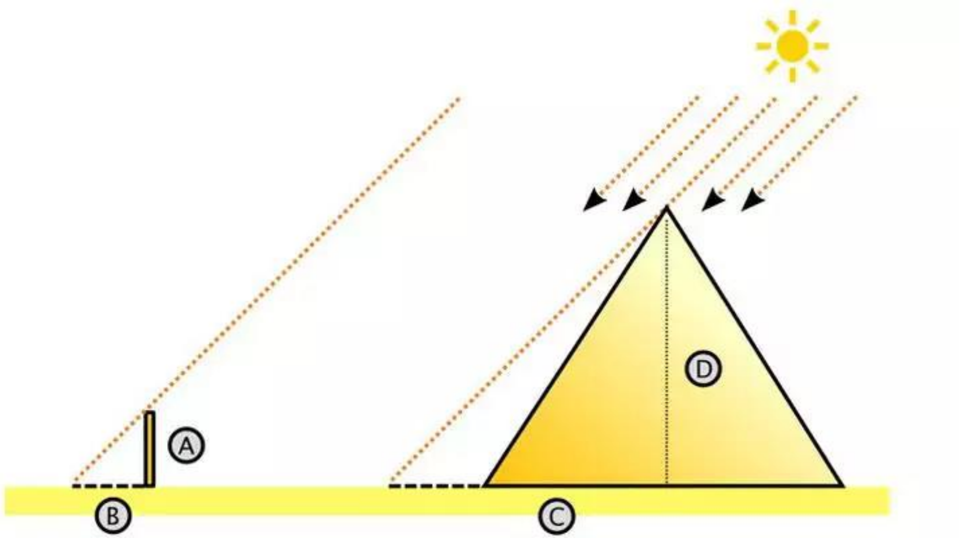
Ao final teremos 24 pontos sobre a circunferência, em que 12 serão as doze divisões do dia e outras 12 da noite. Ajuste esta circunferência em torno do gnômon.

5.2 Textos suportes do Momento Intermediário 3 do MD 2

Versão de Hicrônimos

Para aferir o comprimento da altura da pirâmide finca-se o gnômon no chão em certa proximidade com a construção histórica, aguarda-se até que o comprimento e a sombra do instrumento tenham o mesmo comprimento. Dessa forma a linha imaginária que liga o topo do objeto com o fim de sua sombra nos fornece um triângulo isósceles, consequentemente, pelo paralelismo dos raios solares, conclui-se que nesse momento a altura da pirâmide é do tamanho da sua sombra, confira a Figura 3.

Figura 3 – O cálculo da altura da pirâmide pela versão de Hicrônimos.

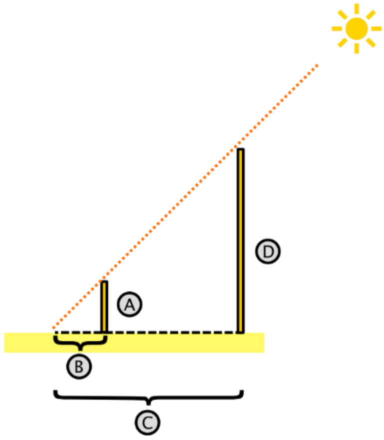


Fonte: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/teorema-de-tales>. Acesso em 10 de dez. de 2019.

Versão de Plutarco

Nessa versão, a estimativa do comprimento da altura dessa edificação ocorre enterrando uma das pontas do gnômon no extremo da sombra da pirâmide. Destarte, a linha imaginária que une o topo da pirâmide à ponta do apetrecho, bem como a sombra desses objetos, corta dois segmentos paralelos entre si: a altura da construção e do bastão. Portanto, é possível utilizar do atual Teorema de Tales para solucionar a problemática pela proporção $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$, obtida pelo esquema da Figura 4.

Figura 4 – O cálculo da altura da pirâmide pela versão de Plutarco.



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Thales_theorem_7.png>.
Acesso em 10 de dez. de 2019.

Navio no horizonte

Na Figura 5 tem-se que a linha tangente ao arco é um segmento de reta, dado que a luz obedece ao princípio de propagação retilínea. Sabe-se ainda que esse segmento é perpendicular ao raio com extremo no ponto de tangência. Pode-se inclusive notar que a reta suporte do conjunto observador-base - com tamanho H - tem o centro da Terra como elemento, desse modo existe um segmento de reta que une o centro da Terra ao comprimento do conjunto mencionado cujo tamanho é H+R, em que *R* é o raio do globo terrestre. Portanto, há um triângulo retângulo com hipotenusa H+R, catetos de tamanho D e R. Logo,

$$(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{R})^2 = \boldsymbol{D}^2 + \boldsymbol{R}^2$$
$$\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{H}^2 + 2\boldsymbol{H}\boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{H} + 2\boldsymbol{R})$$

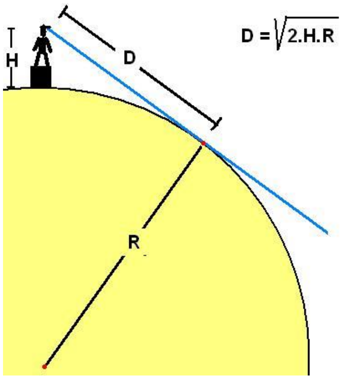
Dado que o tamanho H é deveras insignificante próximo ao dobro do raio da circunferência do nosso planeta, podemos fazer uma igualdade grosseira H+2R = 2R. Então,

$$\boldsymbol{D}^2 = 2\boldsymbol{H}\boldsymbol{R}$$

Vê-se dessa forma que o único valor conhecido é H, carecendo da determinação de R para se determinar a distância dos objetos no horizonte do globo.

Historicamente o primeiro a estabelecer esse valor foi um bibliotecário e matemático alexandrino, Eratóstenes (276 - 194 a.C.).

Figura 5 – Distância da visada do observador ao horizonte.



Fonte: <https://www.if.ufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=distancia-ao-horizonte-navio-afundado>. Acesso em 11 de dez. de 2019.

O raio da Terra

> A medição da terra, por Eratóstenes, liga as regras da geometria à geografia e à astronomia. O que de mais extraordinário existe nesta empresa é a sua simplicidade. Não exige outros conhecimentos matemáticos, a não ser quatro considerações elementares: (a) Os raios de luz pro vindos de grandes distâncias parecem paralelos, experiência familiar na existência de antanho [...] (b) Qualquer reta que corte duas paralelas, forma com elas ângulos correspondentes equivalentes; (c) Quando um corpo celeste se encontra exatamente sobre a cabeça do observador (isto é, no Zenith), a reta que une o observador passa necessariamente pelo centro da Terra; (d) Ao meio-dia, o sol está sempre em um ponto meridiano de longitude do observador. (HOGBEN, 1950, p. 247)

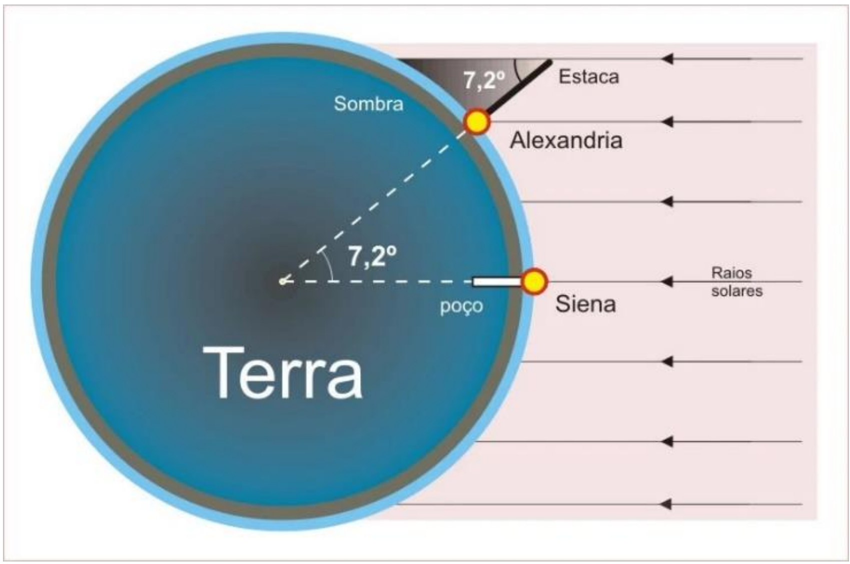
Eratóstenes obteve a informação, por meio de um livro, de que no solstício de verão, na cidade de Siena, ao meio-dia, o Sol ficava quase exatamente no zênite, fato que era facilmente verificado ao observar o reflexo do Sol em um poço e perceber que não havia sombra projetada pelas paredes. Contudo, em Alexandria - aproximadamente 800 km de distância ao norte de Siena - na mesma data e hora, o Sol encontrava-se a 7,2º ou 1/50 da circunferência completa (confira a Figura 6). Dessa maneira, o comprimento da Terra é cerca de 50 vezes 800 quilômetros, ou seja, 40.000 quilômetros.

Ao se utilizar da aproximação fracionária $3\frac{1}{7}$ realizada por Arquimedes para o número irracional e o fato de que o comprimento de uma circunferência é 2 vezes maior que seu raio; fica simples precisar o raio da Terra. De modo que, sendo R o valor para o raio

$$40\,000 = 2 \times 3\frac{1}{7} \times R$$
$$R = \frac{7 \times 40\,000}{22 \times 2} = \frac{280\,000}{44}$$
$$R = 6400\ km$$

Com esses dados em sua posse o homem conseguiu determinar com mais precisão a distância de um navio à costa e também estimar o quanto de terra havia para se descobrir.

Figura 6 – Representação do arco terrestre determinado por Eratóstenes.



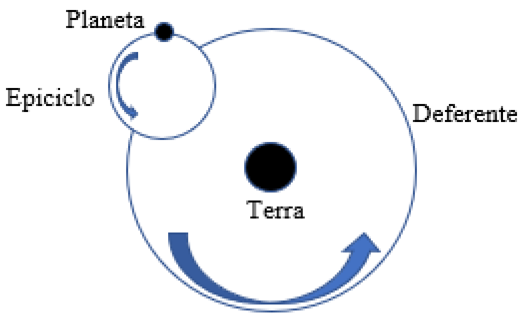
Fonte: <https://astrociencianet.wordpress.com/2016/05/17/httpastrociencianet-worpress-compostagenscienciasexatas/>. Acesso em 11 de dez. de 2019.

5.3 Textos suportes para o Momento Intermediário 1 do MD 3

Modelo Ptolomaico

Antes de Hiparco surgiram alguns modelos para determinar a configuração das posições e movimentos dos astros. Eudoxo de Cnido (quarto século a.C.) apresentou uma proposta na qual o movimento dos planetas se davam em um sistema de esferas aninhadas, também chamada de esferas homocêntricas. Seu modelo conseguiu prever qualitativamente os movimentos complexos dos planetas, tais como movimentos retrógrados, porém não quantitativamente. Apolônio de Perga, congominado “o grande geomêtra”, no final do século III a.C., é o primeiro autor que conhecemos a discutir a simples teoria dos epiciclos, como afirmam Hogben (1950), O’Connor e Robertson (2000) e Van Brumellen (2009). Na Figura 7, que representa o plano que contém a eclíptica, o centro de um pequeno círculo (o epiciclo) viaja a uma taxa uniforme em torno da borda de um círculo grande (o deferente). Ao mesmo tempo, o planeta viaja uniformemente ao redor do epiciclo. Variando os tamanhos dos círculos e as proporções das duas velocidades adequadamente, pode produzir acelerações, desacelerações ou movimentos retrógrados, conforme desejado.

Figura 7 – Modelo epiciclo.



Fonte: Teixeira (2022).

Apolônio de Perga, até onde se sabe, não tentou ajustar o modelo às observações quantificando os parâmetros, assim conservou seus epiciclos aos modelos geométricos; isso poderia ter fornecido à astronomia sua primeira teoria precisa (VAN BRUMMELEN, 2009). Hiparco possivelmente percebeu algumas inconstâncias que esse modelo reproduz, por exemplo, os movimentos retrógrados dos planetas; cada movimento retrógado percorria arcos de mesmo tamanho, discordando do que se percebia. No entanto, o astrônomo se limitou aos movimentos aparente do Sol e da Lua, com isso pode ter reunido a aritmética babilônica e a geometria grega disponíveis à época (VAN BRUMMELEN, 2009).

O modelo epicíclico é idêntico ao modelo excêntrico, onde o Sol gira uniformemente em um círculo não centrado na Terra. Saber exatamente onde posicionar a Terra dentro deste círculo, com intuito de corresponder às mudanças percebidas na velocidade do Sol, foi um dos principais objetivos de Hiparco (VAN BRUMMELEN, 2009). Esse problema pode ser resolvido a partir dos dados que o astrônomo fornece: os comprimentos da primavera e do verão ($94\ \frac{1}{2}$ e $92\ \frac{1}{2}$ dias, respectivamente) e a duração do ano (365 $\frac{1}{4}$ dias). A solução de Hiparco está perdida, contudo existe uma solução no livro Almagesto de Ptolomeu.

Excentricidade da Órbita do Sol

Segundo Ptolomeu, o resultado da excentricidade do Sol foi resolvido com muito esmero por Hiparco (PTOLEMY; TOOMER, 1984, p. 153). Vamos reproduzir, com adaptações, a conjectura da excentricidade da órbita do Sol, o qual encontra-se em (PTOLEMY; TOOMER, 1984, p. 155). Para simplificar esta demonstração matemática, tomaremos como referência a Figura 8. Destacamos que a demonstração é realizada sobre o sistema sexagesimal. Os astrônomos gregos o adotaram por entenderem que o sistema de numeração babilônico facilita operar frações, números extensos e realizar cálculos (PTOLEMY; TOOMER, 1984, p. 6). Assim, os números[9] são representantos como o exemplo a seguir:

$$8,3;5,12,10 = 8 \cdot 60 + 3 + \frac{5}{60} + \frac{12}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Considere na Figura 8 os pontos *P*, *O*, *V*, *I* os equinócios de Primavera e de Outono, e os solstícios de Verão e Inverno; respectivamente. Além disso, considere o ponto *C* o centro da órbita solar deslocado por uma distância *e* do ponto *T,* o centro da Terra. O objetivo é encontrar o valor de *e.*

Agora, seja o raio R = 60^P, em que o expoente P indica partes, e denote por Crd a função corda. Considere os segmentos BP, FC e VI paralelos entre si, e perperdiculares aos segmentos DV, AH e PO. Hiparco supõe que o Sol se move com velocidade constante pelo arco $PVOI$, assim temos que o astro gastará $94\frac{1}{2}$ dias em $\widehat{PV}$ e $92\frac{1}{2}$ dias em $\widehat{VO}$. Sabendo que o arco de uma volta é igual a 360^0, temos que $94\frac{1}{2}$ dias equivale a aproximadamente $93^0 9'$, por sua vez $92\frac{1}{2}$ dias é cerca de $91^0 11'$. Portanto,

$$\widehat{PVO} = 184^0 20'.$$

---

[9]Ao longo do capítulo podemos apresentar a parte inteira do número no formato decimal.

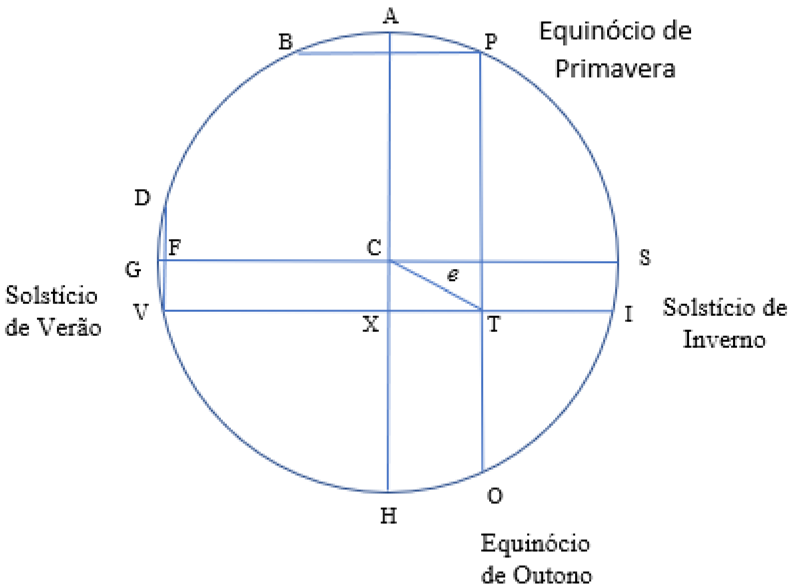
Então, $\widehat{PVO} - \widehat{AVH} = 184^0 20' - 180^0 = 4^0 20'$. Desse modo, $\widehat{PA} + \widehat{HO} = 4^0 20'$. Utilizando de suas tabelas de cordas, Hiparco obteve o resultado a seguir

$$\widehat{PB} = 2\widehat{PA} = 4^0 20'.$$

Logo, $PB = Crd\,\widehat{PAB} \approx 4;32^P$. Similarmente, $VFD = Crd\,\widehat{VGD} = 2;4^P$. Sabendo que $CX = VFD\,/\,2$, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo CXT para se obter a excentricidade da órbita do Sol: $e \approx 2;29\frac{1}{2}^P$. Arredondando para $2;30^P$, temos o equivalente a $\frac{1}{24}$ do raio do círculo excêntrico.

Note que Hiparco pode ter enfrentado a tarefa de encontrar os comprimentos das cordas $\widehat{PAB}$ e $\widehat{VGD}$ em função dos ângulos obtidos e isso pode ter sido o primeiro problema realmente trigonométrico da humanidade (VAN BRUMMELEN, 2020). Como os arcos obtidos são resultados de observações reais do resultado prático do homem em relação ao mundo, seus valores não são agradáveis para o sistema de numeração babilônico. Por essa razão Hiparco teve que superar os valores de cordas que correspondiam aos lados de polígonos regulares de Aristarco, os quais concedem valores de fácil uso para o sistema de base 60; isso fez com que Hiparco tabulasse comprimentos de cordas para arcos arbitrários (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 41).

Figura 8 – Excentricidade da órbita do Sol



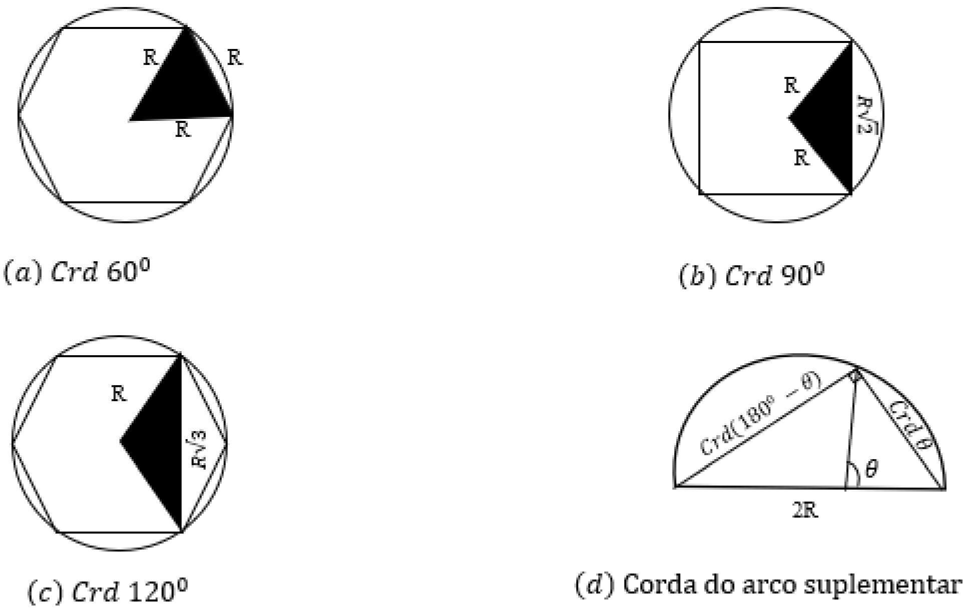
Fonte: Teixeira (2022).

Tábua de Cordas

Para reproduzir a maneira primitiva de se confeccionar uma tábua de cordas, podemos consultar o Almagesto. A trigonometria primitiva baseada em cordas do círculo foi um importante instrumento para Ptolomeu alcançar seus objetivos. Com isso o cientista grego nos fornece no primeiro livro do Almagesto todas as instruções necessárias para desenvolver uma tábua de cordas a partir de um círculo dividido em 360 partes cujo diâmetro é fixado em 120 partes.

Apresentaremos a construção da tábua de cordas em dois momentos. No primeiro momento construiremos a tábua de cordas cujos intervalos[10] são $7\frac{1}{2}^{0}$, atribuída a Hiparco (HOGBEN 1959; VAN BRUMMELEN, 2009). No segundo momento desenvolveremos a tábua de cordas para cada ângulo de $\frac{1}{2}^{0}$, realizada por Ptolomeu.

Figura 9 – Relações de cordas elementares



Fonte: Teixeira (2022).

[10]Não há certeza dos parâmetros estabelecidos na tábua de cordas desenvolvida por Hiparco, tais como intervalos de arcos, sistema de numeração, arredondamento de números e etc. Alguns cientistas sugerem que a tábua de Ptolomeu é muito similar à de Hiparco e serviu como fonte para a tábua de seno na Índia (VAN BRUMMELEN, 2009).

Utilizando a Figura 9 como referência, verificamos que por meio de um hexágono regular inscrito no círculo de raio 60, obtemos $Crd\,60^0 = R = 60$ e $Crd\,120^0 = R\sqrt{3} \approx 103;55{,}23^P$.[11] Fazendo um quadrado inscrito logramos $Crd\,90^0$ = $2\sqrt{2} \approx 84;51{,}10^P$. Pelo Teorema de Pitágoras é possível calcular a corda do arco suplementar

$$Crd(180^0 - \theta) = \sqrt{(2R)^2 - (Crd\,\theta)^2} \tag{1}$$

O último teorema necessário para completar a tábua de Hiparco é o cálculo da corda da metade de um arco (equivalente ao seno do arco metade). Em seu livro “Medida do Círculo”, Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) ao utilizar o método da exaustão encontrou o resultado: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Para isso, Arquimedes inscreve e circunscreve hexágonos em um círculo, divide os lados sucessivamente e cálcula seus comprimentos; faz o mesmo para outros polígonos: dodecágonos, polígonos de 24, 48 e 96 lados. Os polígonos se aproximam cada vez mais do formato do círculo, o que permite à Arquimedes aproximar o valor π. Este mesmo método, dividir os lados dos polígonos, permitiu a Hiparco calcular a corda da metade de um arco conhecido (VAN BRUMMELEN, 2009).

Da Figura 10 temos que $BD = DC = Crd\,\frac{\theta}{2}$, então $B\hat{A}D = D\hat{A}C$. Construindo *AB* = *AE*, obtemos $\Delta ABD \sim \Delta AED$ (visto que *AD* é um lado comum); implicando em *BD* = *DE* = *DC*. Dessa forma, ΔEDC é isósceles. Fazendo $DF \perp EC$, então

$$CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB) \tag{2}$$

Mas $\Delta ACD \sim \Delta DCF$, uma vez que ambos são retângulos e tem o ângulo em *C* e o lado *DC* comum entre si. Com efeito $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF}$ e

$$CD^2 = AC \cdot CF \tag{3}$$

Da equação (2) e (3) segue que $CD^2 = AC \cdot \frac{1}{2}(AC - AB)$. Como $AC = 2R$, $AB = Crd(180^0 - \theta)$ e $CD = Crd\left(\frac{\theta}{2}\right)$; a corda da metade do arco é dada por

[11] $103;55{,}23 = 103 + \frac{55}{60} + \frac{23}{60^2} \approx 103{,}923$

$$Crd\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{R\big(2R - Crd(180^0 - \theta)\big)} \qquad (4)$$

A fórmula (4) pode ser equivalentemente expressa pela função seno, desde que consideremos as seguintes igualdades

$$Crd\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2Rsen\left(\frac{\theta}{4}\right) \text{ e } Crd(180^0 - \theta) = 2Rcos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

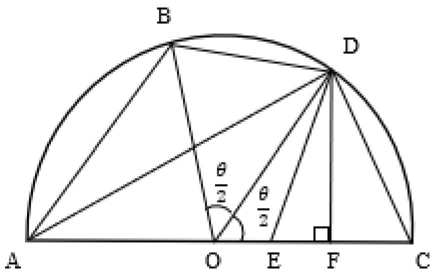
Desse modo,

$$\left[2Rsen\left(\frac{\theta}{4}\right)\right]^2 = R\left(2R - 2Rcos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow sen^2\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

fazendo $\alpha = 2\theta$, segue que

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - cos\ \alpha).$$

Figura 10 – Cálculo da meia corda de Arquimedes.



Fonte: Teixeira (2022)..

A partir do que foi desenvolvido é possível desenvolver uma tábua de cordas parecida com a que comumente se atribui a Hiparco.

Tabela 1 – Tábua de cordas com intervalos de $7\frac{1}{2}^0$.

Arco	Corda	Arco	Corda
0	0	$82\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	4533
$7\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	450	90^0	$\vdots$
15^0	897	$97\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	5169
$22\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	1341	$\vdots$	$\vdots$
30^0	1780	120^0	5954
$37\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	2210	$\vdots$	$\vdots$
45^0	2631	135^0	6352
$52\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	3041	$\vdots$	$\vdots$
60^0	3438	165^0	6817
$67\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	3820	$172\,{}^{1}/_{2}{}^{0}$	6861
75^0	4186	180^0	6875

Fonte: adaptado de (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 44).

Fórmulas para Corda da Diferença e da Soma

Tendo a necessidade de encontrar mais valores de cordas, Ptolomeu desenvolveu um método que o permitia extrair cordas a partir de quantidades já conhecidas. Para isso precisou do seguinte teorema:

Teorema de Ptolomeu: em um quadrilátero $ABCD$ inscrito em círculo, o produto das diagonais $(AC \cdot BD)$ é igual à soma dos produtos dos lados opostos $(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.

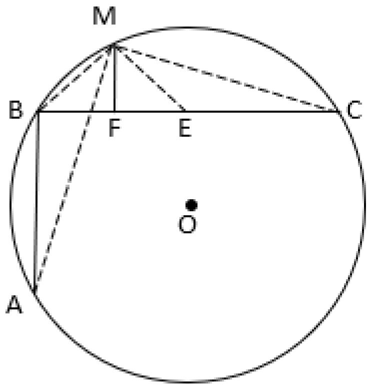
Para enunciar o teorema anterior é bem provável que Ptolomeu tenha utilizado de outro conhecido teorema, o qual o matemático muçulmano *Abu Rayhan al-Biruni (973 – 1048 d.C.)* em "Um tratado sobre desenhos de cordas em um círculo"[12] atribui o desenvolvimento ao grego Arquimedes; o Teorema da Corda Quebrada (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 31).

Teorema da Corda Quebrada[13]: Se *AB* e *BC* formam uma corda quebrada *ABC* (figura 7), onde $BC > AB$ e M é o ponto médio do arco $A\hat{B}C$, então o pé da

[12] Uma versão em Árabe está disponível em: https://www.wdl.org/pt/item/7469/view/1/1/
[13] Uma demonstração pode ser vista em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/78/8.html

perpendicular *F* de *M* sobre *BC* é o ponto médio da corda quebrada, ou seja, FC = FB + AB.

Figura 7 – A corda quebrada.



Fonte: Teixeira (2022).

Com este teorema, a corda da diferença de dois arcos é obtida naturalmente. Considere AD o diâmetro do círculo na Figura 11. Assuma $\alpha = \widehat{AC}$ e $\beta = \widehat{AB}$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu juntamente com algumas manipulações, obtemos:

$$Crd(\alpha - \beta) = \frac{Crd\,\alpha \cdot Crd(180^0 - \beta) - Crd\,\beta \cdot Crd(180^0 - \alpha)}{2R} \qquad (5)$$

A equação (5) é equivalente ao seno da diferença de arcos:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - sen\beta \cdot cos\alpha.$$

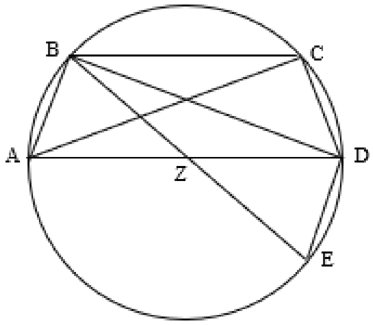
Agora considere o segmento *BE* na figura 8. Se Z é o centro do círculo, então teremos $\alpha = \widehat{AB} = \widehat{DE}$. Fixando $\beta = BC$, o Teorema de Ptolomeu nos fornecerá

$$Crd\big(180^0 - (\alpha + \beta)\big) = \frac{Crd(180^0 - \alpha) \cdot Crd(180^0 - \beta) - Crd\,\alpha \cdot Crd\,\beta}{2R}. \qquad (6)$$

Dessa maneira conseguimos $Crd(\alpha + \beta)$ utilizando da fórmula do suplementar de um arco; equação (1). A equação (5) é equivalente ao cosseno da soma de arcos:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot sen\beta - sen\alpha \cdot sen\beta.$$

Figura 11 – Círculo para a corda da diferença e da soma.



Fonte: Teixeira (2022).

Tabela 2 – Tábua de cordas com intervalos de $\frac{1}{2}^0$.

Arco	Corda	Arco	Corda
${}^1/_2{}^0$	0;31,25	60^0	60;0,0
1^0	1;2,50	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
3^0	3;8,28	90^0	84;51,10
⋮	⋮	⋮	⋮
12^0	12;32,36	120^0	103;55,23
⋮	⋮	⋮	⋮
24^0	24;56,58	179^0	119;59,44
⋮	⋮	$179\,{}^1/_2{}^0$	119;59,56
36^0	37;34,47	180^0	120;0,0

Fonte: adaptado de (PTOLEMY; TOOMER, 1984, p. 57).

5.4 Textos suportes do Momento Intermediário 2 do MD 3

O seno

Em 499 d.C., o matemático hindu Ariabata I (476 – 550 d.C.) publicou o seu livro “Aryabhatiya”, um livro referência na história da matemática e astronomia indiana (CLARK, 1930). Em 575 d.C., o astrólogo indiano Varāhamihira divulgou “Pañcasiddhāntikā”, seu mais importante trabalho, que além de um tratado sobre matemática na astronomia também é um importante recurso para a história da astronomia hindu antes de “Aryabhatiya” (O'CONNOR; ROBERTSON, 2000). Estes trabalhos contribuíram para os astrônomos indianos estabelecerem todo conhecimento grego em seu país (VAN BRUMELLEN, 2009). Os tópicos de interesses astronômicos dos trabalhos indianos se assemelhavam muito aos dos gregos: determinar as posições do Sol, da Lua e de planetas, prever eclipses, converter coordenadas celestiais, encontrar o comprimento da sombra de um gnômon e assim por diante (VAN BRUMMELEN, 2009).

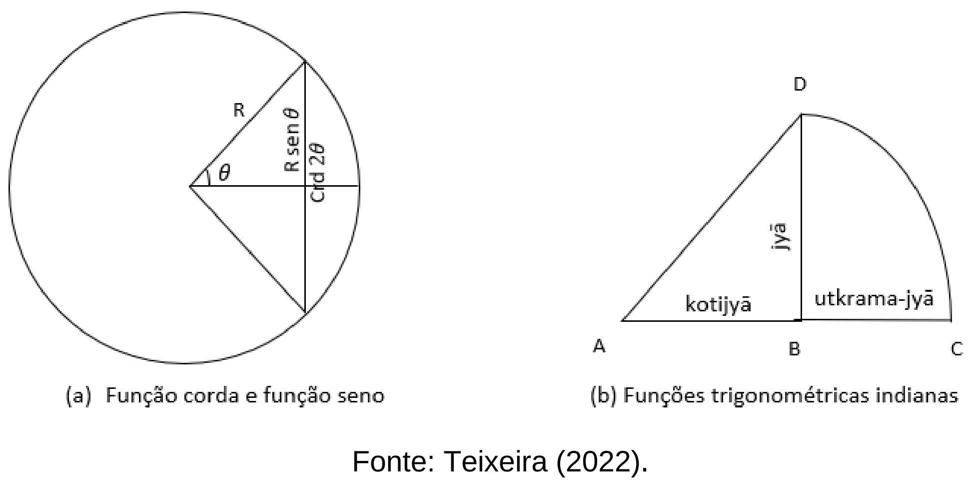
Pela cultura de difundir o conhecimento por versos, usual na Índia naquele tempo, os enunciados dispensavam as demonstrações ou maiores detalhes. Por esse motivo não se sabe quando a função corda tornou-se a função seno (VAN BRUMMELEN, 2009). Muito embora, dada a relação entre essas funções - veja a Figura 12 (a) - não fica difícil conjecturar que isso pode ter sido um processo natural. Assim como feito no cálculo da excentricidade do Sol, em que a corda de $\widehat{PAB}$ foi encontrada e dividida pela metade, astrônomos indianos ao calcularem valores de cordas podem ter percebido que havia uma maneira mais simplista para a relação comprimento e ângulo; donde surgiu a jyā-ardha (ou ardha-jyā, sânscrito para meia corda), mais tarde abreviada para jyā (VAN BRUMMELEN, 2009).

A relação entre a função *jyā* e a função seno moderna é dada pela igualdade:

$$jy\bar{a}(\theta) = \mathrm{Rsen}\theta,$$

em que R é o raio do círculo base. No século V d.C., outras funções apareceram. A *kotijyā,* ou cosseno, que representa o comprimento *AB* na Figura 12 (b), além da utkrama-*jyā,* algo como o seno reverso, uma função não usada atualmente que fornece o tamanho da flecha de um arco (comprimento *BC*). Todas as funções indianas são *R* vezes maiores que as funções trigonométricas modernas.

Figura 12 – O seno e sua forma na Índia antiga



(a) Função corda e função seno (b) Funções trigonométricas indianas

Fonte: Teixeira (2022).

Os astrônomos indianos variavam o valor de R, no entanto alguns valores eram mais comuns que outros. É possível inferir no Pañcasiddhāntikā que o valor estabelecido para o raio por Varāhamihira foi de 120 (NEUGEBAUER e PINGREE, 1970). Muitas tábuas de senos da Índia usaram o valor de R igual a 3438 (BRUMMELEN, 2009, p. 97), como por exemplo a tábua de Ariabata I. Varāhamihira e Aribata I forneceram o cálculo de 24 senos em intervalos de 3º45’. Na tabela 3 reproduzimos valores dos senos de alguns arcos calculados por Varāhamihira (NEUGEBAUER e PINGREE, 1971, p. 38) e Aribata I (CLARK, 1930, p. 48).

Tabela 3 – Tábua de seno de Varāhamihira e Ariabata I.

Arco (em graus)	Varāhamihira	Ariabata I
3;45	7;51	225
7;30	15;40	449
11;15	23;25	671
15	31;4	890
⋮	⋮	⋮
30	1,0;0	1719
⋮	⋮	⋮
60	1,43;55	2978
⋮	⋮	⋮
75	1,55;55	3321
⋮	⋮	⋮
86;15	1,59;44	3431
90	2,0;0	3438

Fonte: Teixeira (2022).

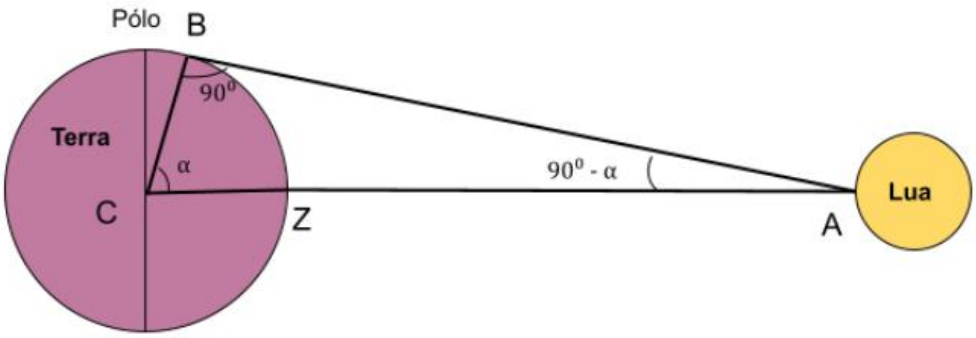
5.5 Textos suportes do Momento Intermediário 3 (MD 3)

Alcançando a Lua

Outra contribuição de grande relevância para a Trigonometria foi dada pelo matemático e astrônomo Alexandrino, Hiparco (190 - 120 a.C.); ele foi pioneiro na construção da tabela trigonométrica. Por meio da aproximação já obtida para seno e cosseno dos ângulos notáveis, bem como a definição dessas razões para os ângulos 0º e 90º. Hiparco, em suma, desenvolveu a tabela encontrando a razão trigonométrica para arcos metade e com isso permitiu com que a humanidade obtivesse diversas vantagens. “Para começar, tornamos possíveis a cartografia e a agrimensura numa escala adequada aos grandes trabalhos geográficos” (HOGBEN, 1950, p. 258).

Além disso, Hiparco estimou a distância do centro da Terra à lua em 402.500 quilômetros. Basicamente, para tal feito, suponha que em certo ponto *Z* do planeta você consiga visualizar a lua no zênite e nesse mesmo momento sob a mesma latitude (mesmo meridiano) e a graus de longitude de *Z* encontra-se outro observador, o qual está situado em um ponto *B* que assiste o surgir do luar. Essa descrição pode ser vista na Figura 13.

Figura 13 – Esquema para se medir a distância à lua.



Fonte: Teixeira (2022).

Dessa maneira, obtemos um triângulo que é retângulo em *B.* Como o tamanho $\overline{CZ}$ e $\overline{CB}$ é dado pelo raio da terra, é natural a maneira de se encontrar o ângulo uma vez conhecida a distância entre B e Z. Consequentemente, podemos escrever

$$sen(90^0 - \alpha) = \frac{raio\ da\ Terra}{distância\ \text{à}\ Lua}$$

$$cos\ \alpha = \frac{raio\ da\ Terra}{distância\ \text{à}\ Lua}$$

Nessa situação, considerando o ângulo próximo de 84,3º, temos para $\overline{CA}$um valor próximo do que Hiparco encontrou, ou seja, com um erro em torno de 5% do que se aceita atualmente

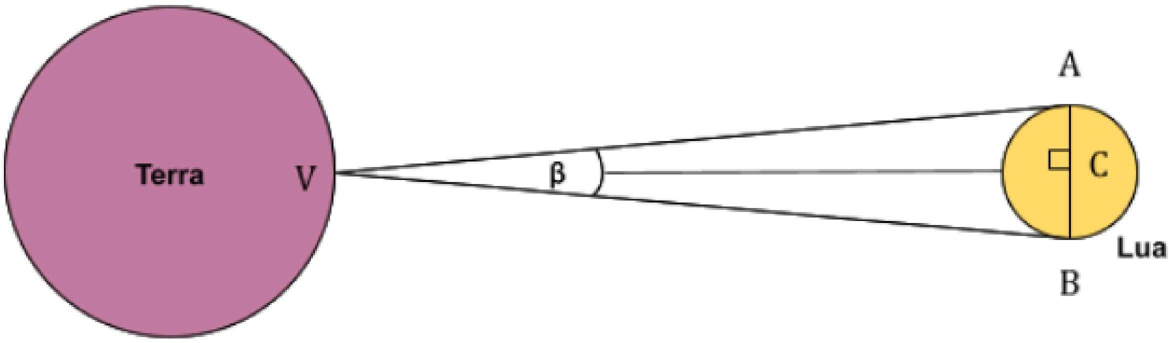
$$cos 84{,}3^0 = \frac{6400}{distância\ \text{à}\ Lua}$$

$$distância\ \text{à}\ Lua\ = \frac{6400}{cos 84{,}3^0}$$

$$distância\ \text{à}\ Lua\ = 402\ 739{,}88$$

Com esse valor estimado é quase um corolário o cômputo do raio do satélite natural terrestre, assim como seu comprimento. Para isso mede-se o ângulo entre duas visadas tangentes ao círculo lunar em sua fase cheia. O segmento $\overline{VC}$ = d - R + r, em que d é a distância entre o planeta à lua, R é o raio da terra e *r* é raio da lua, que por sua vez tem mesmo comprimento que o segmento $\overline{AC}$. Assim, podemos fixar $\overline{AC}$=r.

Figura14 – Esquema para se medir o raio da lua.



Fonte: Teixeira (2022).

Assim, fixando d - R = 396 340 e $\beta = 0{,}5^0$ temos:

$$\text{tg}(0{,}25^0) = \frac{r}{396\,340 + r}$$
$$r = tg(0{,}25^0)(396340 + r)$$
$$r = 1729{,}37 + 0{,}0044r$$
$$r = \frac{1729{,}37}{0{,}9956}$$
$$r = 1737$$

Portanto, o raio da lua conjecturado por Hiparco tem em torno de 1737 quilômetros. Utilizando do método para se calcular o comprimento de uma circunferência, com π aproximado em $3\frac{1}{7}$, logra-se a dimensão desse astro.

$$c = 2 \times 3\frac{1}{7} \times 1737$$
$$c = 10\,918{,}30$$

5.6 Texto suporte para o Momento Intermediário 4 do MD 3

Tábuas de sombras

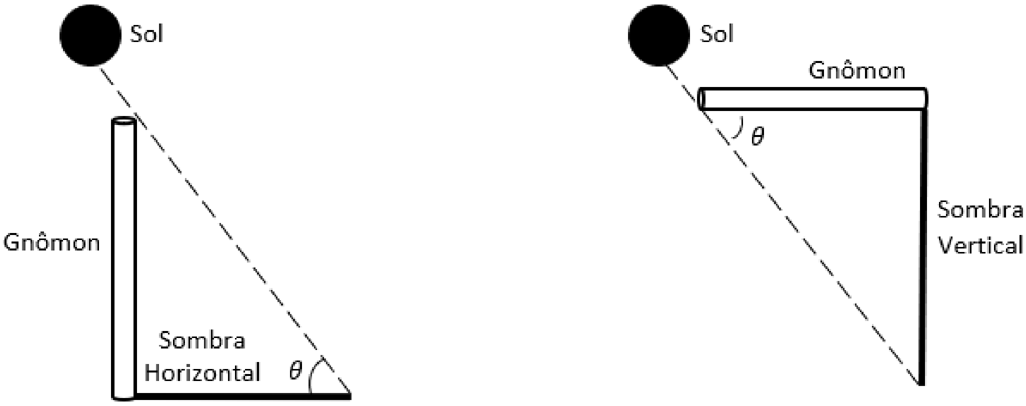
O interesse principal pelas sombras descende do estudo dos relógios de sol, usados no Egito já em 1500 a.C. (KENNEDY, 1992; VAN BRUMMELEN, 2009). “A ideia básica era de que uma elevação maior do Sol produzia uma sombra menor (essencialmente o conceito de cotagente)” (KENNEDY, 1992, p. 42). As tabelas de cotangente, conhecidas como função sombra, são encontradas em antigos zījes[14], muitas das vezes omitindo a importância dos arcos; o Zīj do matemático persa Al-Khwārizmi (750 – 850 d.C.) contém um dos primeiros exemplos de funções sombras (VAN BRUMMELEN, 2009).

Na Figura 15 , considerando o argumento θ, o tamanho da “sombra direta” representa a cotangente enquanto que a hipotenusa a secante. Por sua vez, a segunda parte da Figura 15, tem-se a hipotenusa da “sombra reversa” como cosecante e o comprimento da sombra como a tangente. O tamanho do gnômon para o cálculo de tábuas de sombra variou muito com o tempo. O comprimento de 12, que também fora escolhido por Al-Khwārizmi, foi o mais comum. Valores como $6\frac{1}{2}$ e 7 (que estabelece a razão da altura de uma pessoa pelo comprimento do seu pé), o valor de 60 por volta de 830 d.C., pelo matemático Habash al-Hāsib e, cerca de cinquenta anos depois, o valor de 1, pelos matemáticos Abū’l-Wafā e al-Bīrūnī (KENNEDY, 1992, p. 42; VAN BRUMMELEN, 2009, p. 151).

Abū’l-Wafā em seu Almagesto, trouxe a função tangente, cotangente, secante e cossecante para além de problemas gnômonicos. Essas funções, junto das funções seno e cosseno, permitiriam ao astrônomo resolver problemas da astronomia de forma bem mais eficiente. Foi o matemátrico Rheticus (1514 – 1574 d.C.) em 1551 responsável por definir a função tangente e cotagente como razões (KENNEDY, 1992, p. 42).

[14] Um zīj é um livro islâmico que tabula parâmetros astrônomicos.

Figura 15 – Projeções das sombras de um gnômon.



Fonte: Teixeira (2022).

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Querido professor, querida professora,

Agradecemos mais uma vez pela leitura deste material e o possível uso como instrumento didático-pedagógico. Temos compreensão que esta Unidade Didática ainda está inacabada, mas é um produto de nossa Atividade. É um produto que se aproxima do objeto idealizado, que por sua vez foi compreendido como o objeto de satisfação de uma necessidade engendrada em nossa práxis.

Estaremos em busca da revisão e aperfeiçoamento desta Unidade Didática, todavia é na colaboração de nossos pares (os colegas professores) que impulsionaremos nosso trabalho e teremos um produto que mais se acerca de cobrir as necessidades do professor em Atividade de Ensino e do estudante em Atividade de Aprendizagem. Somente em sua forma prática, na orientação didático-pedagógico é que as imperfeições se revelarão de forma mais evidente. Por isso, estamos abertos a ouvir, ler e analisar as críticas e contribuições que você, professor, possa nos oferecer.

Gratidão,

Conrado Jensen Teixeira e *José Antônio Andrade Araújo*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CLARK, W. E. **The Aryabhatiya of Aryabhata**. Chicago: University of Chicago Press, 1930. Disponivel em: <https://www.wilbourhall.org/pdfs/aryabhatiyaEnglish.pdf>.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental:** a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução de J. C. LIBÂNEO e R. A. M. M. FREITAS. MOSCÚ: Progresso, 1988.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática:** Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos. 2ª. ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1950.

KENNEDY, E. S. **Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula:** Trigonometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, v. 5, 1992.

NEUGEBAUER, O.; PINGREE, D. **The Pañcasiddhantika of Varahamihira**. Copenhage: Munksgaard, 1970.

NEUGEBAUER, O.; PINGREE, D. **The Pañcasiddhantika of Varahamihira**. Copenhage: Munksgaard, v. 2, 1971.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Mac Tutor: Varahamihira. **MacTutor History of Mathematics Archive**, Novembro 2000. Disponivel em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Varahamihira/>. Acesso em: 8 Julho 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Mac Tutor: Varahamihira. **MacTutor History of Mathematics Archive**, Novembro 2000. Disponivel em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Varahamihira/>. Acesso em: 8 Julho 2020.

PTOLEMY, C.; TOOMER, G. J. **Ptolemy's Almagest:** Translated and Annotated by G. J. Toomer. Londres: Gerald Duckworth, 1984. 693 p.

TEIXEIRA, C. J. **A organização de uma unidade didática em Trigonometria a partir da essência do objeto da Atividade de Ensino**. Lavras: Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Lavras, 2022.

VAN BRUMELLEN, G. **The Mathematics of the Heavens and the Earth:** The Early History of Trigonometry. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.

VAN BRUMMELEN, G. **Trigonometry:** A Very Short Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2020.

A RESPEITO DOS AUTORES

Conrado Jensen Teixeira

Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) na Universidade Federal de Lavras (UFLA). É membro do grupo de pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (PPTHC - DGP/CNPq). Atua como docente de Matemática em escolas públicas de Pouso Alegre – MG. É produtor de conteúdo do curso de Licenciatura em Matemática e Pós-Graduação em Matemática da Faculdade FaSouza. É especialista em Gestão Estratégica de Pessoas pelo SENAC – MG. É graduado em Licenciatura em Matemática pela UFLA com período sanduíche de 1 ano e 6 meses na Arizona State University no Estados Unidos.

José Antônio Araújo Andrade

Doutor em Educação na Universidade Federal de São Carlos (2012), Mestre em Educação pela Universidade São Francisco (2004) e Licenciado em Matemática pela Universidade São Francisco (2000). Há 16 anos é professor-pesquisador da Universidade Federal de Lavras (UFLA), vinculado atualmente ao Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática (DFM) do Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas (ICET). Atua como docente e pesquisador permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE), ambos na Universidade Federal de Lavras (UFLA). Atualmente está atuando como coordenador do PPGECEM/UFLA. É líder do grupo de pesquisa Práticas Pedagógicas orientadas pela Teoria Histórico-Cultural (PPTHC - DGP/CNPq). Está na coordenação institucional do Programa de Residência Pedagógica da UFLA. Atuou como docente permanente do Mestrado Nacional em Ensino de Física (2013-2017) e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Ambiental (2018-2022), ambos da UFLA. Atuou como diretor de apoio e desenvolvimento pedagógico (2012-2016) e como diretor de Avaliação e Desenvolvimento do Ensino (2016-2017), ambos na Pró-Reitoria de Graduação da UFLA, atuou ainda como coordenador do curso de Licenciatura em Matemática da UFLA (2011-2012) e foi membro e presidente da Comissão Própria de Avaliação da UFLA (2012-2014). Tem experiência na área de Matemática e Educação Matemática, com ênfase no Ensino de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Teoria Histórico-Cultural da Atividade; Modelagem na Educação Matemática, História das Ciências, Educação Matemática Mediada por Tecnologias Digitais e Formação de Professores.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS

9 786599 825859