



**LEONARDO ALVES VIEIRA**

**ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO CANAL VERTICAL  
EM SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL VIA  
INTEGRAÇÃO BAROMÉTRICA**

**LAVRAS – MG**

**2021**

**LEONARDO ALVES VIEIRA**

**ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO CANAL VERTICAL EM SISTEMAS DE  
NAVEGAÇÃO INERCIAL VIA INTEGRAÇÃO BAROMÉTRICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva  
Orientador

**LAVRAS – MG**

**2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo próprio autor.**

Vieira, Leonardo Alves

Estratégias de estabilização do canal vertical em sistemas de navegação inercial via integração barométrica / Leonardo Alves Vieira. – Lavras : UFLA, 2021.

119 p. :

Dissertação (Mestrado Acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2021.

Orientador: Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva.

Bibliografia.

1. Sistemas de Navegação. 2. Canal Vertical. 3. Índices de Desempenho. I. Silva, Felipe Oliveira. II. Título.

**LEONARDO ALVES VIEIRA**

**ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO CANAL VERTICAL EM SISTEMAS DE  
NAVEGAÇÃO INERCIAL VIA INTEGRAÇÃO BAROMÉTRICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 20 de Agosto de 2021.

Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva	UFLA
Prof. DSc. Danilo Alves de Lima	UFLA
Prof. DSc. Luís Henrique de Carvalho Ferreira	UNIFEI

Prof. DSc. Felipe Oliveira e Silva  
Orientador

**LAVRAS – MG  
2021**

*A minha família, amigos e equipe do projeto.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e pela sabedoria a mim depositada.

Agradeço aos meus pais, Afonso e Lourdes, pelo imenso amor e suporte para trilhar esse caminho, e aos meus irmãos, Marcos e Juliana, pelo apoio incondicional.

Agradeço a minha namorada Jéssica, pela paciência e por me apoiar em todos os momentos no decorrer dessa jornada.

Agradeço, principalmente, ao meu orientador Felipe, pelos ensinamentos, paciência e suporte na realização desse projeto. Obrigado por ter acreditado em mim e foi uma honra desenvolver o trabalho sob sua tutela.

Agradeço aos meus amigos da UFLA, principalmente ao Rogério, Lucas e Fidelis, pelo apoio mútuo no desenvolvimento dos nossos projetos.

*Na vida, você pode ser o que você quiser, basta acreditar e correr atrás de seus sonhos.  
Nunca desista! Pois somente quem continua tentando conseguirá, em alguma tentativa, atingir  
seu objetivo.  
(Autor Desconhecido)*

## RESUMO

Sistemas de Navegação Inercial (INS) são sistemas de navegação compostos por acelerômetros e girômetros. A partir de medições desses sensores, e do conhecimento de suas condições iniciais, é possível obter valores de posição, velocidade e atitude. Após sua inicialização, um INS não necessita de sinais externos para continuidade de sua operação, sendo a solução de navegação calculada unicamente a partir de dados obtidos dos sensores inerciais e de um modelo gravitacional. No entanto, no longo prazo, o canal vertical de um INS, isto é, onde se encontram sua altitude e velocidade vertical, se mostra instável, acumulando grandes erros em um intervalo de tempo relativamente curto. Para resolver esse problema, a integração do INS com um barômetro é bastante utilizada, pois este sensor fornece uma solução de altitude não divergente no longo prazo. Este trabalho investiga o problema da instabilidade do canal vertical em INS e apresenta diferentes métodos de integração do barômetro com o INS para a estabilização desse canal. Como principal contribuição do trabalho, comparações são estabelecidas entre métodos de integração (referidos como mecanizações), tradicionalmente empregados na literatura (em sua maioria baseados em sintonias empíricas de malhas de controle), e novas estratégias de integração baseadas em controle ótimo e na minimização de índices de desempenho a saber: o Regulador Quadrático Linear (LQR), e os critérios Integral do Erro Absoluto (IAE), Integral do Erro Quadrático (ISE), Integral do Erro Absoluto multiplicado pelo Tempo (ITAE), e Integral do Erro Quadrático multiplicado pelo Tempo (ITSE). Resultados simulados e experimentais são apresentados, evidenciando o desempenho dos métodos de integração investigados. Como principais conclusões, verifica-se que as mecanizações sintonizadas via técnicas de controle ótimo apresentaram resultados mais estáveis, com menores oscilações. Em particular, a sintonia obtida via minimização do critério ITAE apresentou o melhor resultado, com solução mais estável e com menores valores da Raiz dos Erros Médios Quadráticos (RMSE) em altitude e velocidade vertical.

**Palavras-chave:** Sistemas de Navegação. INS. Canal Vertical. Barômetro. Índices de Desempenho. LQR



## ABSTRACT

Inertial Navigation Systems (INS) are navigation systems composed of accelerometers and rate-gyros. From these sensors' measurements, the knowledge of initial conditions, one is able to obtain values of position, velocity, and attitude. After its initialization, an INS has the advantage of being independent on external signals for its continuous operation, as well as having its navigation solution uniquely determined from inertial sensors data, and from a gravity model. However, in the long term, the INS vertical channel, that is, its altitude and vertical velocity, is unstable, accumulating large errors in a relatively short time period. To solve this problem, the integration of the INS with a barometer has been widely used, since the latter presents a non-drifty altitude solution in the long term. This work investigates the INS vertical channel instability issue, and presents different methods of integrating the barometer with the INS aiming at stabilizing this channel. As the main contribution of the work, comparisons are established between integration methods (referred to as mechanizations) traditionally used in the literature (mostly based on empirical tuning of control loops), and new integration strategies based on optimal control and minimization of performance indices, namely, the Linear Quadratic Regulator (LQR), and the Integral Absolute Error (IAE), Integral Squared Error (ISE), Integral of Time Multiplied Absolute Error (ITAE), and Integral of Time Multiplied Squared Error (ITSE) criteria. Simulated and experimental results are presented to highlight the performance of the investigated integration methods. As main conclusions, one verifies that the optimal control-tuned mechanizations presented more stable results, with smaller oscillations. In particular, the tuning obtained via minimization of ITAE criterion presented the best result, with the most stable solution and with the smallest values of Root Mean Square Errors (RMSE) in altitude and vertical velocity.

**Keywords:** Navigation Systems. INS. Vertical Channel. Barometer. Performance Indices. LQR.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esquema básico de um INS. . . . .	24
Figura 2.2 – Forças atuando sobre um acelerômetro. . . . .	25
Figura 2.3 – Eixos de orientação de um corpo. . . . .	25
Figura 2.4 – Acelerômetro simples. . . . .	27
Figura 2.5 – Princípio de funcionamento de um girômetro vibratório. . . . .	28
Figura 2.6 – Gráfico da entrada <i>versus</i> saída do sensor com erro de <i>bias</i> . . . . .	30
Figura 2.7 – Gráfico da entrada <i>versus</i> saída do sensor com erro de fator de escala. . . . .	31
Figura 2.8 – Desalinhamento dos eixos sensíveis do acelerômetro e girômetro em relação ao sistema de coordenadas do corpo. . . . .	32
Figura 2.9 – Orientação do sistema de coordenadas do corpo com relação ao de navegação no plano horizontal. . . . .	36
Figura 2.10 – Diagrama de blocos das equações de navegação. . . . .	37
Figura 2.11 – Crescimento do erro de posição linear por eixo de um INS para diferentes fontes de erro, no curto prazo. . . . .	44
Figura 2.12 – Erro de aceleração devido ao erro de atitude. . . . .	45
Figura 2.13 – Estimativa da gravidade quando de um erro de posição horizontal. . . . .	47
Figura 2.14 – Crescimento do erro de posição horizontal de um INS no médio/longo prazo. . . . .	48
Figura 2.15 – Crescimento do erro de posição vertical de um INS no médio/longo prazo. . . . .	49
Figura 3.1 – Variação da pressão atmosférica com a altitude. . . . .	50
Figura 3.2 – Modelo elipsoidal de representação da Terra. . . . .	51
Figura 3.3 – Comparação das geometrias de um geoide e de um elipsoide. . . . .	52
Figura 3.4 – Comparação entre as superfícies da Terra, do geoide e do elipsoide. . . . .	52
Figura 3.5 – Esquema da obtenção da altitude ortométrica em relação à superfície da Terra. . . . .	53
Figura 4.1 – Diagrama simplificado do modelo de erro do canal vertical de um INS. . . . .	58
Figura 4.2 – Mecanização do canal vertical de segunda ordem com <i>loop</i> amortecido. . . . .	59
Figura 4.3 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem com <i>loop</i> amortecido. . . . .	61
Figura 4.4 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem com <i>loop</i> amortecido e quatro ganhos. . . . .	64
Figura 4.5 – Diagrama de blocos do regulador ótimo. . . . .	67
Figura 4.6 – Mecanização do canal vertical de segunda ordem via LQR. . . . .	69
Figura 4.7 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem via LQR. . . . .	72

Figura 4.8 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem com quatro ganhos via LQR.	75
Figura 5.1 – Simulação da trajetória da aeronave. . . . .	82
Figura 5.2 – Erro em altitude das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	83
Figura 5.3 – Erro em velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	83
Figura 5.4 – Erro em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	84
Figura 5.5 – Erro em velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	85
Figura 5.6 – Erro em altitude das mecanizações sintonizadas via LQR. . . . .	87
Figura 5.7 – Erro em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via LQR. . . . .	88
Figura 5.8 – Erro em altitude das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.	90
Figura 5.9 – Erro em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho. . . . .	91
Figura 5.10 – Resposta ao degrau das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	93
Figura 5.11 – Resposta ao degrau das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	93
Figura 5.12 – Resposta ao degrau das mecanizações sintonizadas via LQR. . . . .	94
Figura 5.13 – Resposta ao degrau das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho. . . . .	94
Figura 5.14 – Lugar das raízes das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	96
Figura 5.15 – Lugar das raízes das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	96
Figura 5.16 – Lugar das raízes das mecanizações sintonizadas via LQR. . . . .	97
Figura 5.17 – Lugar das raízes das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.	97
Figura 6.1 – Aeronave utilizada para o teste. . . . .	100
Figura 6.2 – Módulos XSens MTi-G-710 utilizados para a obtenção dos dados. . . . .	101
Figura 6.3 – Trajetória bi-dimensional da aeronave (voo completo). . . . .	103
Figura 6.4 – Trajetória tri-dimensional da aeronave (voo completo). . . . .	104

Figura 6.5 – Erros em altitude das mecanizações de segunda ordem - voo completo. . . . .	105
Figura 6.6 – Erros em velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem (voo completo). . . . .	105
Figura 6.7 – Erros em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente - voo completo. . . . .	106
Figura 6.8 – Erros em velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas via controle ótimo - voo completo. . . . .	107
Figura 6.9 – Erros em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas via controle ótimo - voo completo. . . . .	108
Figura 6.10 – Erros em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas por controle ótimo (voo completo). . . . .	108

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Classificação de acelerômetros e girômetros, conforme magnitude típica dos <i>biases</i> . . . . .	31
Tabela 2.2 – Crescimento do erro de posição horizontal de um INS no médio/longo prazo (mais de 4 horas). . . . .	48
Tabela 5.1 – Erros dos acelerômetros considerados na simulação. . . . .	80
Tabela 5.2 – Erros dos girômetros considerados na simulação. . . . .	81
Tabela 5.3 – Erros dos barômetros considerados na simulação. . . . .	81
Tabela 5.4 – Erros de inicialização considerados na simulação. . . . .	82
Tabela 5.5 – Ganhos das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	82
Tabela 5.6 – Ganhos das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente. . . . .	84
Tabela 5.7 – Raiz dos erros médios quadráticos em altitude e velocidade vertical das mecanizações sintonizadas empiricamente. . . . .	86
Tabela 5.8 – Parâmetros para escolha de $Q$ , $R$ e $G_4$ no LQR. . . . .	86
Tabela 5.9 – Ganhos das mecanizações sintonizadas via LQR. . . . .	88
Tabela 5.10 – Valores RMSE em altitude e em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via LQR. . . . .	88
Tabela 5.11 – Faixa de ganhos buscados para sintonia via índices de desempenho. . . . .	89
Tabela 5.12 – Ganhos calculados via minimização dos índices de desempenho. . . . .	90
Tabela 5.13 – Valores RMSE em altitude e em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho. . . . .	91
Tabela 5.14 – Parâmetros da resposta ao degrau das mecanizações sintonizadas empiricamente. . . . .	95
Tabela 5.15 – Parâmetros de resposta ao degrau unitário para as mecanizações sintonizadas via controle ótimo. . . . .	95
Tabela 6.1 – Especificações técnicas do girômetro. . . . .	101
Tabela 6.2 – Especificações técnicas do acelerômetro. . . . .	101
Tabela 6.3 – Especificações técnicas do barômetro. . . . .	102
Tabela 6.4 – Desempenho da fusão dos sensores inerciais que compõem o MTi-G-710. . . . .	102
Tabela 6.5 – Trajetória do voo completo. . . . .	104
Tabela 6.6 – Valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem (voo completo). . . . .	106

Tabela 6.7 – Valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente (voo completo). . . . .	107
Tabela 6.8 – Valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente (voo completo). . . . .	109
Tabela 6.9 – Valores RMSE em altitude das melhores sintonias em cada trecho do voo. .	111
Tabela 6.10 – Valores RMSE em velocidade vertical das melhores sintonias em cada trecho do voo. . . . .	112

## **LISTA DE SIGLAS**

<b>ABS</b>	Sistema de Freios Antitravamento
<b>ECEF</b>	Sistema de Coordenadas Centrado na Terra e Fixo na Terra
<b>ECI</b>	Sistema de Coordenadas Inercial Centrado na Terra
<b>EKF</b>	Filtro de Kalman Estendido
<b>FT</b>	Função de Transferência
<b>GNSS</b>	Sistema de Navegação Global por Satélites
<b>GPS</b>	Sistema de Posicionamento Global
<b>IAE</b>	Integral do Erro Absoluto
<b>IMU</b>	Unidade de Medição Inercial
<b>INS</b>	Sistema de Navegação Inercial
<b>INU</b>	Unidade de Navegação Inercial
<b>ISE</b>	Integral do Erro Quadrático
<b>ITAE</b>	Integral do Erro Absoluto mutiplicado pelo Tempo
<b>ITSE</b>	Integral do Erro Quadrático mutiplicado pelo Tempo
<b>LQR</b>	Regulador Quadrático Linear
<b>MEMS</b>	Sistemas Microeletromecânicos
<b>MISO</b>	Múltiplas Entradas e Uma Saída
<b>MOEMS</b>	Sistema Micro-Ótico-Eletromecânico
<b>PSD</b>	Densidade Espectral de Potência
<b>RMSE</b>	Raiz dos Erros Médios Quadráticos
<b>SI</b>	Sistema Internacional
<b>VANT</b>	Veículo Aéreo Não-Tripulado
<b>WGS84</b>	Sistema Geodésico Global de 1984

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_i$	matriz dinâmica do processo de ordem $i$ da equação de espaço estado
$B_i$	matriz de acoplamento das entradas de controle de ordem $i$ da equação de espaço estado
$C_i$	matriz de acoplamento das entradas de referência de ordem $i$ da equação de espaço estado
$C_{\alpha}^{\beta}$	matriz de transformação entre os sistemas de coordenadas $\alpha$ e $\beta$
$D_i$	matriz de acoplamento das entradas de controle com as de referência de ordem $i$ da equação de espaço estado
$G_i$	ganho $i$ de controle do canal vertical
$H_b$	altitude ortométrica
$J$	função-custo
$K$	matriz de ganhos da equação de espaço estado
$L_b$	latitude geodésica
$M_{ci}$	matriz de controlabilidade de rank $i$ da equação em espaço estado
$N$	separação geoidal
$Q$	matriz positiva semi-definida de ponderação dos estados
$R$	matriz positiva semi-definida de ponderação das entradas
$R_g$	constante universal dos gases ( $R = 287,1 \text{ J}/(\text{kgK})$ )
$R_0$	raio equatorial (de acordo com o WGS84, $R_0 = 6378,127 \text{ km}$ )
$R_E$	raio de curvatura transversal
$R_N$	raio de curvatura meridiano
$R_P$	raio polar (de acordo com o WGS84, $R_P = 6356,752 \text{ km}$ )
$T_s$	temperatura média na superfície da Terra (288,15 K)
$F$	força atuando sobre um corpo
$G_g$	<i>bias</i> dependente da gravidade de um triedro de girômetros
$I_i$	matriz identidade de dimensão $i \times i$
$M_a$	erros de fator de escala e acoplamento cruzado do acelerômetro
$M_g$	erros de fator de escala e acoplamento cruzado do girômetro
$P$	força peso



$\mathbf{a}_{\alpha\beta}^{\gamma}$	aceleração do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ representada nos eixos do $\gamma$
$\mathbf{b}_a$	erro de <i>bias</i> do acelerômetro de uma IMU
$\mathbf{b}_b$	erro de <i>bias</i> do barômetro
$\mathbf{b}_g$	erro de <i>bias</i> do girômetro de uma IMU
$\mathbf{f}_{\alpha\beta}^{\gamma}$	força específica do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ representada nos eixos do $\gamma$
$\mathbf{r}_{\alpha\beta}^{\gamma}$	posição cartesiana do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ , representada nos eixos $\gamma$
$\mathbf{s}_b$	erro de fator de escala do barômetro
$\mathbf{s}_a$	erro de fator de escala do acelerômetro de uma IMU
$\mathbf{s}_g$	erro de fator de escala do girômetro de uma IMU
$\mathbf{u}$	vetor das entradas de controle da equação de espaço estado
$\mathbf{v}_{\alpha\beta}^{\gamma}$	velocidade do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ representada nos eixos do $\gamma$
$\mathbf{w}_a$	ruído aleatório do acelerômetro de uma IMU
$\mathbf{w}_d$	ruído Gaussiano branco com média zero e variância $\sigma_d$
$\mathbf{w}_g$	ruído aleatório do girômetro de uma IMU
$\mathbf{x}$	vetor de estado da equação de espaço estado
$b$	sistema de coordenadas do corpo
$e$	excentricidade da Terra (de acordo com o WGS84, $e = 0,08182$ )
$e_x$	semi-eixo x do elipsoide
$e_y$	semi-eixo y do elipsoide
$e_z$	semi-eixo z do elipsoide
$er$	erro de rastreamento
$f$	achatamento (de acordo com o WGS84, $f = 1/298,25722$ )
$g$	magnitude da aceleração devido à gravidade
$g$	magnitude da aceleração devido à gravidade
$g_0$	aceleração média da gravidade ao nível do mar ( $g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2$ )
$g_{\alpha,D}^{\gamma}$	componente vertical da aceleração devido à gravidade do sistema de coordenadas $\alpha$ representada nos eixos do $\gamma$
$h_B$	altitude geodésica obtida pelo barômetro

$h_b$	altitude geodésica
$h_s$	altitude de referência
$k_T$	gradiente da temperatura atmosférica ( $k_T = 6,5 \times 10^{-3}$ K/m)
$m$	massa de prova
$m_{a,\alpha\beta}$	coeficiente de acoplamento cruzado da força específica sensível do eixo $\beta$ em relação ao eixo $\alpha$ do acelerômetro
$m_{g,\alpha\beta}$	coeficiente de acoplamento cruzado da taxa angular sensível do eixo $\beta$ em relação ao eixo $\alpha$ do girômetro
$n$	sistema de coordenadas de navegação local
$p$	sistema de coordenadas de navegação (fixo na Terra)
$p_b$	pressão atmosférica obtida pelo barômetro
$p_s$	pressão na superfície da Terra ( $p_s = 101,325$ kPa)
$r_i(t)$	matriz de referência da mecanização de ordem $i$ da equação de espaço estado
$r_{eS}^e$	raio geocêntrico da Terra
$t$	instante de tempo
$t_0$	tempo inicial
$v_v$	velocidade do vento

## LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS

$\Omega_{\alpha\beta}^{\gamma}$	matriz anti-simétrica do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ representada nos eixos do $\gamma$
$\alpha$	sistema de coordenadas objeto genérico
$\beta$	sistema de coordenadas de referência genérico
$\delta$	erro de medição
$\varepsilon_d$	erro de deriva do barômetro
$\varepsilon_e$	erros de distúrbios externos do barômetro
$\varepsilon_p$	erro principal do barômetro
$\gamma$	sistema de coordenadas de representação genérico
$\lambda_b$	longitude geodésica
$\omega_{\alpha\beta}^{\gamma}$	taxa angular do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ representada nos eixos do $\gamma$
$\mathbf{w}_b$	ruído aleatório Gaussiano e branco do barômetro
$\mu$	constante gravitacional da Terra (de acordo com WGS84, $\mu = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^{-2}$ )
$\omega_n$	frequência natural para as raízes complexas
$\omega_s$	taxa angular da oscilação de Schuler
$\omega_{ie}$	magnitude da rotação da Terra ( $\omega_{ie} = 7,292115 \times 10^{-5}$ )
$\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma}$	ângulo de guinada do sistema de coordenadas $\alpha$ com relação ao $\beta$ representada nos eixos do $\gamma$
$\rho$	densidade do ar padrão ( $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ )
$\sim$	valor medido
$\tau$	constante de tempo
$\tau_i$	tempo final do ciclo de processamento
$\tau_s$	período de Schuler
$\tau_{mi}$	tempo de correlação do processo estocástico
$\tilde{\omega}_{ib}^b$	vetor da taxa angular na saída da IMU
$\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b$	medição da força específica na saída da IMU
$\zeta$	coeficiente de amortecimento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	Objetivos	22
1.2	Contribuições	22
1.3	Organização do Trabalho	23
<b>2</b>	<b>SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL</b>	<b>24</b>
2.1	Força Específica e Taxa Angular	25
2.2	Sensores Inerciais	26
2.2.1	Acelerômetros	27
2.2.2	Girômetros	28
2.2.3	Erros Característicos	29
2.2.3.1	<i>Biases</i>	30
2.2.3.2	Erros de Fator de Escala e Acoplamento Cruzado	31
2.2.3.3	Ruido Aleatório	33
2.2.3.4	Modelos de Erros	33
2.3	Navegador Inercial	34
2.3.1	Atualização da Atitude	38
2.3.2	Transformação de Coordenadas do Vetor Força Específica	39
2.3.3	Atualização da Velocidade	40
2.3.4	Atualização da Posição	41
2.4	Propagação de Erros em INS	42
2.4.1	Curto Prazo	44
2.4.2	Médio e Longo Prazo	46
<b>3</b>	<b>BARÔMETROS</b>	<b>50</b>
3.1	Separação Geoidal	51
3.2	Erros Característicos	53
3.2.1	Erro Principal	54
3.2.2	Erro de Deriva	54
3.2.3	Erros de Distúrbios Externos	55
<b>4</b>	<b>ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO CANAL VERTICAL</b>	<b>56</b>
4.1	Canal Vertical	57
4.2	Integrações Baro-Inercial	58

4.2.1	Mecanização de Segunda Ordem . . . . .	58
4.2.2	Mecanização de Terceira Ordem com Três Ganhos . . . . .	61
4.2.3	Mecanização de Terceira Ordem com Quatro Ganhos . . . . .	64
4.3	Controle Ótimo . . . . .	66
4.3.1	LQR . . . . .	67
4.3.2	Canal Vertical em Espaço de Estados . . . . .	68
4.3.3	Mecanização de Segunda Ordem via LQR . . . . .	69
4.3.4	Mecanização de Terceira Ordem com Três Ganhos via LQR . . . . .	72
4.3.5	Mecanização de Terceira Ordem com Quatro Ganhos via LQR . . . . .	74
4.3.6	Índices de Desempenho . . . . .	78
5	<b>RESULTADOS SIMULADOS . . . . .</b>	80
5.1	Sintonias Empíricas . . . . .	81
5.2	Sintonia via LQR . . . . .	85
5.3	Sintonia via Índices de Desempenho . . . . .	89
5.4	Resposta ao Degrau . . . . .	92
5.5	Lugar das Raízes . . . . .	95
6	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS . . . . .</b>	100
6.1	Mecanizações de Segunda Ordem . . . . .	103
6.2	Mecanizações de Terceira Ordem: Sintonias Empíricas . . . . .	105
6.3	Mecanizações de Terceira Ordem: Sintonias Ótimas . . . . .	107
6.4	Análise por Trecho . . . . .	110
7	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	113
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	115

## 1 INTRODUÇÃO

Um Sistema de Navegação é composto por um ou mais dispositivos que são utilizados para localização em diversos ambientes. De acordo com Rogers (2003), sistemas de navegação são usados em aplicações terrestres, marítimas, aéreas e espaciais e são compostos por sensores conectados a um computador. Essa configuração permite operações independentes, com pouca ou nenhuma assistência de fontes externas ao veículo, e é capaz de fornecer uma solução de navegação relativamente estável e precisa. Britting (1971), por outro lado, define navegação como sendo a determinação da posição física de um corpo, e sua velocidade relativa a algum sistema de coordenadas de referência, o que se traduz em latitude, longitude, altitude e coordenadas esféricas. Dessa forma, com um sistema de navegação é possível se localizar e se posicionar de diversas maneiras, seja de carro, de navio, de avião ou até, mesmo, à pé.

Uma tecnologia de navegação bastante utilizada são os Sistemas de Navegação Global por Satélites (do inglês *Global Navigation Satellite System*, GNSS). Segundo Kayton e Fried (1997), o GNSS é um sistema de posicionamento passivo, robusto e contínuo que fornece a qualquer usuário, adequadamente equipado, informações de posição, velocidade e tempo com alta precisão e em qualquer lugar na Terra ou próximo a ela. De acordo com Groves (2013), um GNSS produz uma solução de quatro dimensões, sendo três relativas à posição, e uma ao tempo. Dessa forma, para uma solução GNSS completa, é necessária a recepção de sinais de pelo menos quatro satélites diferentes.

Outra tecnologia de navegação largamente usada são os Sistemas de Navegação Inercial (do inglês *Inertial Navigation System*, INS). Savage (2007) define um INS como um grupo de acelerômetros capazes de sentir as componentes do vetor de aceleração não gravitacional (força específica), e um computador digital responsável por realizar operações de integração numérica. O autor ainda afirma que a orientação dos acelerômetros é determinada usando um grupo de instrumentos que medem as suas taxas angulares e que são fisicamente acoplados aos acelerômetros. Britting (1971) define um INS como sendo a utilização das propriedades inerciais de sensores acoplados a um veículo para executar as funções de navegação, as quais são obtidas via medição da força específica e da velocidade angular inercial. Segundo Britting (1971), depois de inicializado, um INS não necessita de informações externas para a continuidade de sua operação.

Como observado por Siouris (1993), em INS puros, a velocidade e posição verticais são obtidos pela integração da aceleração na direção vertical, cujo comportamento é instável.

Kayton e Fried (1997) afirmam, por exemplo, que um erro de altitude inicial conduzirá a um crescimento exponencial da altitude computada. Devido a essa instabilidade, Siouris (1993) explica que é comumente utilizada uma referência de altitude, como por exemplo um barômetro, para estabilizar o canal vertical de um INS. Kayton e Fried (1997) também afirmam que a integração baro-inercial é uma das melhores ferramentas para a estabilização do canal vertical, pois o barômetro fornece uma solução estável por longos períodos.

Sabatini e Genovese (2014) desenvolveram um método de fusão sensorial para a estabilização do canal vertical utilizando a combinação das leituras de uma Unidade de Medição Inercial (do inglês *Inertial Measurement Unit*, IMU) com os valores de pressão obtidos pelo barômetro, utilizando o Filtro de Kalman Estendido (do inglês, *Extended Kalman Filter*, EKF). Testes experimentais de validações foram realizados em diferentes condições: estacionário em cima de uma mesa; queda livre de 1,53 m; movimento circular forçado por um motor de corrente contínua; e agachamentos realizados por um voluntário. O valor da Raiz dos Erros Médios Quadráticos (do inglês *Root Mean Square Error*, RMSE) em velocidade vertical permaneceu entre 0,04 a 0,24 m/s, e o RMSE em altitude, entre 5 a 68 cm.

Tanigawa et al. (2008) demonstraram que a combinação de sensores inerciais do tipo Sistema Microeletromecânico (do inglês *Micro-Electro-Mechanical System*, MEMS) com o altímetro barométrico tem o potencial de estabilizar a altitude estimada. Zhang et al. (2012) também apresentaram um sistema de rastreamento integrado que combina uma IMU baseada em MEMS, um sistema de rádio de Banda Ultra-Larga (do inglês *Ultra-wideband*, UWB) e um barômetro. Esse sistema, juntamente com características complementares de tecnologia, fornecem uma estimativa robusta de posição e orientação.

Alguns autores realizaram estudos combinando mais de dois sensores com o intuito de obter soluções mais precisas. Chambers et al. (2014) desenvolveram um trabalho que realiza a fusão do GPS, odômetro visual, sensores inerciais e do barômetro para a navegação de um veículo aéreo. Na fusão dos sensores, utilizou-se o Filtro de Kalman *Unscented* para criar um estado estimado amortecido. Sokolovic, Dikic e Stancic (2013) também analisaram a integração de vários sensores, o INS, GPS, magnetômetro e barômetro, para melhorar a precisão de navegação. O Filtro de Kalman Estendido foi utilizado para a integração/fusão dos sensores e o sistema foi testado somente com dados simulados no *software* Matlab.

Os principais estudos de fusão baro-inercial datam de períodos anteriores aos anos 2000 e se valem de uma técnica de estabilização do canal vertical baseada em malhas de controle

realimentadas, referidas como "mecanizações". Um dos fatores primordiais para esse fato se deve à chamada disponibilidade seletiva do Sistema de Posicionamento Global (do inglês *Global Positioning System*, GPS). Segundo Silva, Silva e Freitas (2000) e Lago, Ferreira e Krueger (2002), antes do dia 1º de maio de 2000, o Departamento de Defesa dos Estados Unidos adicionava erros dos sinais do GPS de forma proposital, limitando os receptores de navegação a erros em torno de 100 metros. Após essa data, o governo americano desligou a disponibilidade seletiva, fazendo com que os receptores de navegação se tornassem aproximadamente 10 vezes mais precisos. Com isso, estudos usando essa tecnologia na fusão com INS começaram a ser explorados para fins de estabilização do canal vertical, em detrimento dos barômetros.

Lawrence (1998) explica que a combinação do GPS com os sensores inerciais fornece uma solução precisa e barata para a estabilização do canal vertical, pois o GPS limita os erros do navegador inercial e este continua navegando mesmo que os sinais de satélites estejam temporariamente bloqueados por montanhas, túneis, prédios, dentre outros tipos de bloqueios. Autores como Asanovic et al. (2011), Bistrov e Kluga (2011), Cannon et al. (2001), Lima (2005), Magnusson e Odenman (2012), Oliveira (2012) e Zhang et al. (2005) também defendem a ideia de fusão desses sensores com o intuito de obter um sistema mais robusto, contendo os benefícios de ambos os sensores. Todos esses autores utilizam o filtro de Kalman para fazer a fusão do INS com o GPS.

Como citado anteriormente, o canal vertical (altitude e velocidade vertical) dos INSs puros apresenta solução instável no longo prazo, não sendo confiável, portanto, para fins de navegação. Por isso, há a necessidade de estudos de fusão do INS com outros sensores. Na literatura recente, as originais técnicas de integração do INS com o barômetro utilizando mecanizações não têm sido exploradas, em detrimento das integrações baseadas em filtros de Kalman e utilizando GPS. É sabido, contudo, que as técnicas de controle evoluíram grandemente do final da década de 90 até a atualidade, especialmente com o surgimento dos chamados controle ótimo, moderno e robusto. Diante disso, esse trabalho investiga a efetividade de tais avanços, em especial, o uso do Regulador Linear Quadrático (do inglês *Linear Quadratic Regulator*, LQR) e de alguns índices de desempenho, na fusão baro-inercial. Um modelo inovador, em espaço de estados, é proposto para as mecanizações investigadas e resultados comparativos são fornecidos (com relação as sintonias empíricas tradicionalmente propostas na literatura), indicando melhoria de desempenho da integração baro-inercial.



## 1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é investigar as tradicionais mecanizações de fusão sensorial entre barômetros e INSs com vistas à estabilização do canal vertical, bem como propor novas estratégias baseadas em técnicas de controle ótimo. Como objetivos específicos, tem-se:

- Investigar sintonias empíricas tradicionalmente propostas para as mecanizações de fusão/integração do barômetro com o INS;
- Desenvolver novas estratégias de fusão baro-inercial utilizando controle ótimo (LQR e índices de desempenho);
- Testar as sintonias estudadas/desenvolvidas com dados simulados em ambiente Matlab;
- Validar a implementação das sintonias com dados reais, também em ambiente Matlab;
- Discutir os resultados e propor técnicas aprimoradas de fusão/integração do barômetro com o INS.

## 1.2 Contribuições

Como principal contribuição deste trabalho destaca-se a investigação de novos métodos de fusão/integração do barômetro com sensores inerciais, baseadas em técnicas de controle ótimo, a saber, o LQR e via minimização de índices de desempenho (IAE, ISE, ITAE e ITSE).

Como contribuições adicionais, um novo modelo em espaço de estados é proposto para as mecanizações investigadas e comparações são estabelecidas entre os métodos investigados e sintonias empíricas tradicionalmente propostas na literatura. Resultados parciais deste trabalho estão publicados no 17<sup>o</sup> IEEE *Latin American Robotics Symposium (LARS)*, realizado em novembro 2020, artigo intitulado "Performance Indices-based Tuning for Barometer-aided Inertial Navigation Systems"(VIEIRA et al., 2020).

Adicionalmente, este trabalho contribui para a concepção de um sistema de navegação robusto e de baixo custo, voltado às mais diversas aplicações, como, por exemplo, agricultura de precisão, veículos autônomos, mapeamento de terrenos, dentre outras.

### 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos. No Capítulo 1 é apresentada uma contextualização do problema a ser investigado, bem como as principais contribuições da dissertação, e sua organização.

O Capítulo 2 discorre sobre Sistemas de Navegação Inercial, apresentando os sensores inerciais, o navegador inercial e a propagação de erros no mesmo. No primeiro sub-tópico são abordados os principais tipos de sensores inerciais e seus erros característicos. Em seguida, são apresentadas as equações para determinação da atitude, velocidade e posição. Por fim, discorre-se sobre a propagação dos erros no curto, médio e longo prazo.

O Capítulo 3 introduz o barômetro como sensor para navegação, detalhando como é feito o cálculo da altitude a partir da medição de pressão, bem como sua integração com o sistema inercial. Adicionalmente, são apresentados os principais erros característicos do sensor.

O Capítulo 4 aborda as estratégias de estabilização (também referidas como mecanizações) do canal vertical tradicionalmente empregadas na literatura. Além disso, são discutidas técnicas de sintonia das malhas de controle usadas para que o canal tenha uma resposta estável em malha fechada. Técnicas de estabilização/sintonia baseadas em controle ótimo (LQR e índices de desempenho) também são apresentadas nesse capítulo.

O Capítulo 5 discorre sobre os resultados simulados obtidos, apresentando a simulação de cada mecanização investigada para o canal vertical e os somatórios dos erros quadráticos a cada segundo. Além disso, é feita uma análise de cada mecanização a partir da resposta ao degrau unitário e lugar das raízes.

O Capítulo 6 apresenta os resultados de desempenho de cada mecanização investigada com dados reais obtidos pela empresa Xsens no voo de uma aeronave. Para fins de análise e discussão, são calculados os erros em velocidade vertical e em altitude de cada mecanização estudada neste trabalho.

Por fim, o Capítulo 7 evidencia as conclusões deste trabalho, fazendo uma análise sobre os desempenhos das mecanizações testadas, com dados simulados e experimentais, e finaliza com sugestões para trabalhos futuros a respeito do tema.

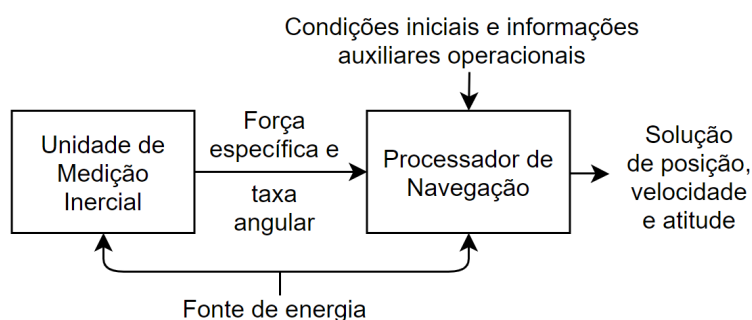
## 2 SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Segundo Ausman et al. (1962), navegação inercial é o processo de identificar os movimentos de um veículo de um ponto para outro, baseado na detecção da sua aceleração inercial em uma direção espacial conhecida. Essa detecção é feita por instrumentos que mecanizam as leis newtonianas do movimento, sendo seguida de uma integração numérica a qual determina a velocidade e posição do veículo. Uma IMU é utilizada para fazer a aquisição desses dados e, após a inicialização, a navegação pode ser feita de forma independente das informações do ambiente, pois o INS é autônomo.

Além das vantagens apresentadas acima, Kayton e Fried (1997) também citam outros benefícios do INS. Um deles é que as indicações de posição e velocidade são instantâneas e praticamente contínuas, independente do tipo de movimento do veículo. Outro benefício citado pelos autores é que as informações de navegação são obtidas em todas as latitudes e condições climáticas, sem a necessidade de estações terrestres.

Na Figura 2.1 é mostrado o esquema básico de um sistema de navegação inercial. Pela imagem, observa-se que o INS é composto de uma IMU, que mede a aceleração de força específica e a taxa angular (conceitos que serão explicados na próxima seção) utilizando acelerômetros e girômetros, respectivamente, e um processador de navegação. Esse último é responsável por processar os dados oriundos da IMU, as condições iniciais e outras informações, e determinar uma solução de posição, velocidade e atitude.

Figura 2.1 – Esquema básico de um INS.



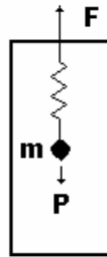
Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Neste capítulo, são abordados os sensores inerciais que compõem a IMU, o navegador inercial e a propagação de erros em um INS. Além disso, dentro do primeiro tópico, são descritos os erros característicos que tipicamente corrompem os sensores inerciais. No último tópico, também é discutida a propagação desses erros no curto, médio e longo prazo.

## 2.1 Força Específica e Taxa Angular

Um conceito importante relacionado às medições dos sensores inerciais é o de aceleração de força específica. Na Figura 2.2 é apresentada as forças que atuam sobre um acelerômetro simples, onde uma força peso  $\mathbf{P}$  atua sobre a massa de prova  $m$  do sensor e uma força  $\mathbf{F}$  atua sobre sua carcaça, produzindo um deslocamento.

Figura 2.2 – Forças atuando sobre um acelerômetro.



Fonte: Adaptado de Santana (2011).

Aplicando a Segunda Lei de Newton sobre o sistema,

$$\sum \text{Forças} = \mathbf{F} + \mathbf{P} = m\mathbf{a}_{ib} \quad (2.1)$$

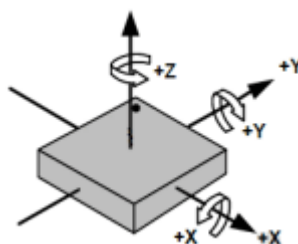
A aceleração inercial  $\mathbf{a}_{ib}$  é obtida por,

$$\mathbf{a}_{ib} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{f}_{ib} + \mathbf{g}_b \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{f}_{ib}$  representa a aceleração de força específica e  $\mathbf{g}_b$  a aceleração da gravidade. Dessa forma, a aceleração de força específica mede todas as acelerações de um corpo, exceto a aceleração da gravidade.

Outro conceito bastante importante é o de taxa angular. Na Figura 2.3 é ilustrado um corpo definido por um sistema de coordenadas tri-dimensional.

Figura 2.3 – Eixos de orientação de um corpo.



Fonte: Adaptado de Santos, Vieira e Jr (2016).

A taxa angular representa a rotação angular de um corpo em torno de um de seus eixos coordenados. Por exemplo, se o corpo rotacionar, conforme Figura 2.3, em  $90^\circ$  em torno do eixo X, isso significa que o eixo Y estará apontando para cima e o eixo Z apontando para a esquerda. A taxa angular é de fundamental importância para indicar a atitude do corpo, ou seja, a orientação do movimento angular do corpo.

## 2.2 Sensores Inerciais

Ausman et al. (1962) afirmam que os acelerômetros e os girômetros são os componentes fundamentais da navegação inercial. Os primeiros medem a chamada aceleração de força específica, enquanto os segundos, taxa angular, ambos com relação a um sistema de coordenadas inercial. Esses sensores fazem suas medições ao longo (em torno) de um único eixo sensível. Dessa forma, uma IMU faz a combinação de múltiplos acelerômetros e giros, normalmente 3 de cada, montados em posições ortogonais, para produzir uma medição tri-dimensional de força específica e taxa angular.

De acordo com Kempe (2011), os sensores inerciais atuais estão sendo desenvolvidos, em sua maioria, com base na tecnologia MEMS. Essa tecnologia possibilita a fabricação de sensores pequenos e leves, que são produzidos em massa e a baixo custo. Karnick et al. (2004) afirmam que os MEMS possuem uma tolerância muito maior a choques em comparação com a tolerância oferecida por outros projetos mecânicos e ópticos convencionais. No entanto, Norgia e Donati (2001) argumentam que a maioria dos MEMS oferece um desempenho relativamente ruim. Para isso, tem sido desenvolvida a tecnologia baseada em Sistemas Micro-Óptico-Eletromecânicos (do inglês *Micro-optical-electromechanical Systems*, MOEMS) que substitui o ponteiro capacitivo dos MEMS por um leitor óptico, melhorando o desempenho do sistema.

Para Groves (2013), os sensores inerciais, as INSs e IMUs, podem ser classificados em cinco categorias: marítimos, de aviação, intermediários, táticos e automotivos. A primeira delas, marítima, é a que possui o melhor desempenho (erro, em geral, menor que 1,8 km por dia). Ela é bastante utilizada em navios militares, submarinos, algumas espaçonaves e mísseis. A segunda, de aviação, deve atender normas aeronáuticas específicas, garantindo um erro na posição horizontal de no máximo 1,5 km na primeira hora de operação. Ela é usada em aeronaves militares ao redor do mundo e em aviões comerciais. A terceira, intermediária, possui uma ordem de magnitude inferior em termos de desempenho. Ela é bastante utilizada em aeronaves pequenas e helicópteros. Uma IMU tática, por outro lado, fornece uma solução de navegação

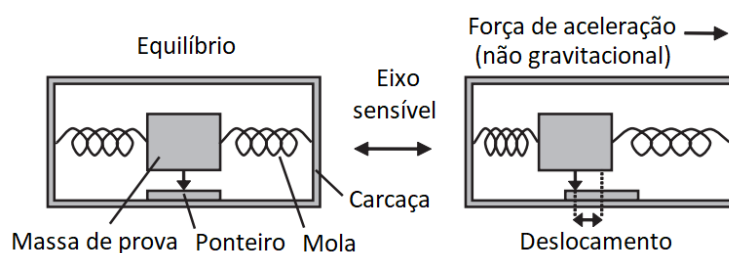
inercial precisa somente por alguns minutos. No entanto, ela pode ser integrada a outros sensores de navegação, melhorando seu desempenho. Ela é tipicamente usada em armas guiadas e em Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANTs). A última delas, automotiva, não possui, em geral, desempenho satisfatório para navegação inercial, mesmo quando integrada com outros sistemas. Ela é utilizada em pedômetros, Sistemas de Freios Antitravamento (do inglês *Anti-lock Braking System*, ABSs), suspensão ativa e *airbags*. Cada categoria possui dimensões e custos diferentes. Em geral, quanto melhor a precisão, mais robusto e mais caro é o sistema.

### 2.2.1 Acelerômetros

A aceleração medida pelo acelerômetro não inclui a força gravitacional. A gravidade atua diretamente sobre a massa de prova do sensor, e aplica a mesma aceleração a todos os componentes do acelerômetro, de modo que não há movimento relativo da massa com relação à carcaça. Portanto, os acelerômetros detectam a chamada aceleração de força específica, ou aceleração não gravitacional, e não a aceleração total.

Existem diversos tipos de acelerômetros, como os piezelétricos, piezoresistivos, capacitivos, MEMS, dentre outros. A parte interna desse sensor é composta basicamente de uma massa de prova, um ponteiro e uma mola (pode também ser uma haste ou outro material), como mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Acelerômetro simples.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Conforme ilustrado na Figura 2.4, um acelerômetro pode ser entendido como uma massa de prova livre que se move ao longo de um eixo sensível. O movimento é relativo à carcaça desse sensor e é contido por molas. O ponteiro (*pick-off*) mede o deslocamento da massa com relação à carcaça. Quando uma força não-gravitacional é aplicada na carcaça ao longo do eixo sensível, a massa de prova continuará, inicialmente, com sua velocidade anterior. Imediatamente após a aplicação da força, a carcaça irá se mover em relação à massa, comprimindo uma mola e estendendo a outra. Esse movimento de alongamento e compressão das molas alteram as forças que

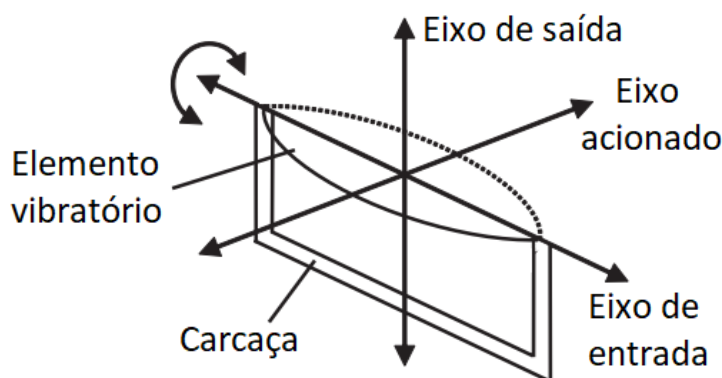
elas transmitem da carcaça do acelerômetro para a massa de prova. Assim, a carcaça se moverá com relação a massa até que a aceleração devido às forças assimétricas exercidas pelas molas, coincida com a aceleração devido à força aplicada externamente. O deslocamento resultante da massa em relação à carcaça é proporcional a aceleração aplicada à mesma. Valendo-se de um ponteiro, uma medida de aceleração é obtida.

No desenvolvimento deste trabalho, o sistema de coordenadas do corpo<sup>1</sup>, coincidente com a carcaça do sensor, é definido como o sistema de coordenadas em cujos eixos são "representadas" as medidas do acelerômetro. Já o sistema de coordenadas de referência das medições do acelerômetro é o sistema de coordenadas Inercial Centrado na Terra (do inglês *Earth-Centered Inertial, ECI*)<sup>2</sup>.

### 2.2.2 Girômetros

Segundo Kayton e Fried (1997), os girômetros são usados como sensores de rotação do veículo com relação às coordenadas de navegação e, no sistema de navegação inercial, compatibilizam as medições dos acelerômetros. Dessa forma, os girômetros são dispositivos capazes de fornecer a orientação por meio da integração numérica da velocidade angular. Existem diversos tipos de girômetro, dentre os quais se destacam os mecânicos, óticos, MEMS e vibratórios, como mostrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Princípio de funcionamento de um girômetro vibratório.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

<sup>1</sup> Sistema de coordenadas cuja origem é definida no centro de massa do veículo, e cujos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  apontam no sentido longitudinal (pra frente) do mesmo, para o lado direito e para baixo, respectivamente.

<sup>2</sup> Sistema de coordenadas cuja origem é definida no centro de massa da Terra e cujo eixo  $x$  aponta para a intercessão no plano equatorial com o meridiano de Greenwich (no momento inicial da navegação), eixo  $z$  é definido ao longo do eixo de rotação da Terra, e o eixo  $y$  completa o sistema de coordenadas dextrógiro.

Um girômetro vibratório é composto por um elemento (garfo, anel, cilindro ou hemisfério) que, quando excitado, executa um movimento harmônico simples. Todos esses elementos operam pelo mesmo princípio a saber, detectam a aceleração de Coriolis sobre o elemento vibratório quando o girômetro é excitado, isto é, rotacionado em torno do eixo de entrada. Esta aceleração provoca outro movimento harmônico simples ao longo do eixo de saída, que é perpendicular tanto à vibração induzida quanto ao vetor de taxa angular no eixo de entrada, sendo que sua amplitude é proporcional à taxa angular. O movimento do elemento vibratório é restringido ao longo de um dos eixos perpendiculares à vibração induzida. Portanto, somente a rotação sobre esse eixo de entrada leva a uma oscilação significativa no eixo de saída, mutuamente perpendicular aos eixos acionados e de entrada.

### 2.2.3 Erros Característicos

Todos os tipos de acelerômetros e girômetros são corrompidos por erros do tipo *biases*, fator de escala e acoplamento cruzado. O ruído aleatório também é um erro que pode acontecer até certo ponto. Outros erros de ordens superiores e de sensibilidade cruzada (força específica-taxa angular) também podem ocorrer, dependendo do tipo do sensor. Além disso, ainda devem ser considerados os erros induzidos por vibração.

De acordo com Groves (2013), erros sistemáticos são erros repetitivos e podem ser previstos a partir de ocorrências anteriores utilizando técnicas de estimação. Cada erro sistemático possui quatro componentes: contribuição fixa, variação dependente da temperatura, variação *run-to-run* e variação *in-run*.

A contribuição fixa é um erro característico do sensor e aparece toda vez que o dispositivo é utilizado. Já a componente dependente da temperatura exibe uma variação de seus erros sistemáticos durante os primeiros minutos de execução, até o sensor atingir a temperatura normal de operação. Esses dois primeiros tipos de erros são geralmente corrigidos pelo processador da IMU, utilizando dados de calibração em laboratório.

A terceira componente, variação *run-to-run*, é uma contribuição do erro total, que leva em consideração cada fonte de erro. Essa contribuição é diferente a cada vez que o sensor é energizado, mas é constante ao longo da operação. Essa componente deve ser calibrada toda vez que a IMU é usada, por meio de algoritmos de alinhamento e/ou integração com outros sensores. O último componente, variação *in-run*, corresponde a pequenas mudanças durante a

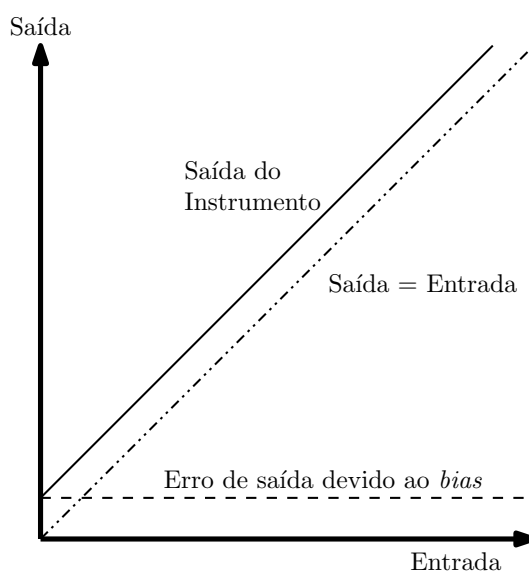


operação do sensor. Essa variação não pode ser corrigida pela IMU previamente. Em teoria, contudo, ela pode ser parcialmente estimada pela integração com outros sensores de navegação.

### 2.2.3.1 Biases

De acordo com Groves (2013), *bias* é um erro predominantemente sistemático exibido por todos acelerômetros e girômetros, o qual é independente da força específica e taxa angular subjacentes. Na Figura 2.6 é mostrado a relação de entrada e saída de um sensor com erro de *bias*. Na maioria dos instrumentos inerciais, o *bias* é o termo dominante no erro global, sendo classificado em componentes estático e dinâmico.

Figura 2.6 – Gráfico da entrada *versus* saída do sensor com erro de *bias*.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

O componente estático, conhecido como *bias* repetibilidade, é composto da variação *run-to-run* do *bias* de cada instrumento somado ao *bias* residual fixo remanescente após a calibração laboratorial do sensor. Ele é constante em todo o período de operação da IMU, mas varia de uma execução para outra. Já o componente dinâmico, conhecido como *bias* instabilidade, varia ao longo de períodos de aproximadamente um minuto e incorpora a variação *in-run* do *bias* e também o *bias* residual dependente da temperatura remanescente após a calibração do sensor. Segundo Groves (2013), o *bias* dinâmico é tipicamente cerca de 10% do *bias* estático.

Os *biases* dos acelerômetros e dos girômetros não são, em geral, quantificados em termos do Sistema Internacional (SI) de medidas. Para o primeiro, é utilizado subdivisões da gravidade padrão  $g$ , como  $mg$  e  $\mu g$ , onde  $1g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ . Já para o segundo, utiliza-se a

medida  $^{\circ}/h$ , onde  $1^{\circ}/h = 4,848 \times 10^{-6}$  rad/s. A Tabela 2.1 apresenta valores característicos de *biases* para diferentes IMUs.

Tabela 2.1 – Classificação de acelerômetros e girômetros, conforme magnitude típica dos *biases*.

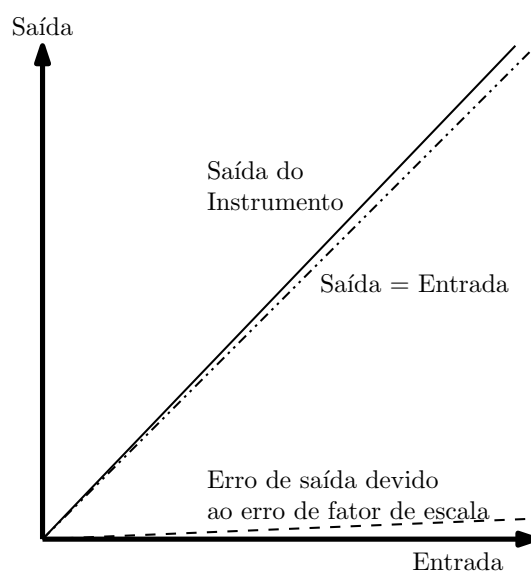
IMU	Bias do Acelerômetro		Bias do Girômetros	
	mg	m/s <sup>2</sup>	$^{\circ}/h$	rad/s
Marítima	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-9}$
Aviação	$3 \times 10^{-2}$ a $10^{-1}$	$3 \times 10^{-4}$ a $10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-8}$
Intermediária	$10^{-2}$ a 1	$10^{-3}$ a $10^{-4}$	$10^{-1}$	$5 \times 10^{-7}$
Tática	1 a 10	$10^{-2}$ a $10^{-1}$	1 a $10^2$	$5 \times 10^{-6}$ a $5 \times 10^{-4}$
Automotiva	> 3	> $3 \times 10^{-2}$	> $10^2$	> $5 \times 10^{-4}$

Fonte: Adaptado de Titterton e Weston (2004).

### 2.2.3.2 Erros de Fator de Escala e Acoplamento Cruzado

De acordo com Groves (2013), o erro do fator de escala é o afastamento da unidade do gradiente de entrada-saída do instrumento após a conversão da unidade pela IMU, como mostrado na Figura 2.7. O erro de saída do acelerômetro e do girômetro devido ao erro do fator de escala é proporcional à força específica e taxa angular verdadeiras, respectivamente, ao longo do eixo sensível.

Figura 2.7 – Gráfico da entrada *versus* saída do sensor com erro de fator de escala.

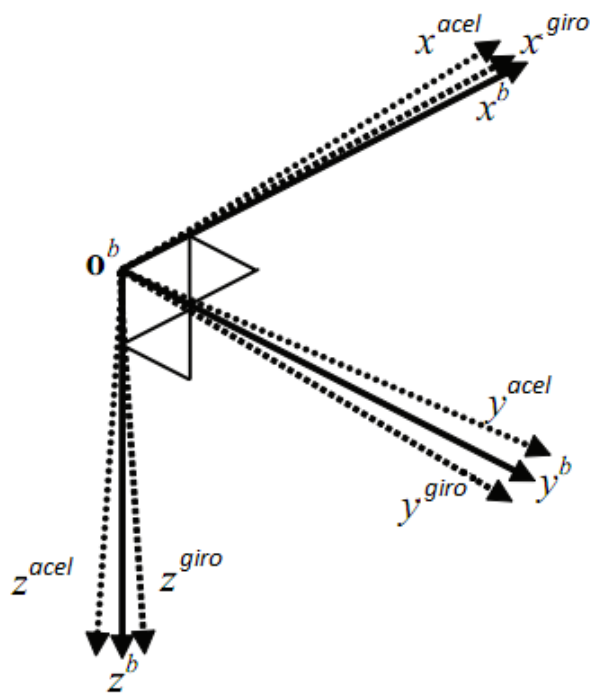


Fonte: Adaptado de Groves (2002).

Em todos os tipos de IMUs, erros de acoplamento cruzado, também conhecidos como erros de desalinhamento, surgem do desalinhamento dos eixos sensíveis dos sensores inerciais

em relação aos eixos ortogonais do sistema de coordenadas do corpo devido às limitações de fabricação, conforme ilustrado na Figura 2.8. Isso torna cada acelerômetro e girômetro sensíveis à força específica e taxa angular, respectivamente, ao longo dos eixos ortogonais ao seu eixo sensível. O desalinhamento dos eixos também produz erros de fator de escala adicionais, mas esses são normalmente duas a quatro ordens de magnitude menores do que os erros de acoplamento cruzado.

Figura 2.8 – Desalinhamento dos eixos sensíveis do acelerômetro e girômetro em relação ao sistema de coordenadas do corpo.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Erros em fator de escala e acoplamento cruzado de acelerômetros e girômetros montados ortogonalmente podem ser modelados como:

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} s_{a,x} & m_{a,xy} & m_{a,xz} \\ m_{a,yx} & s_{a,y} & m_{a,yz} \\ m_{a,zx} & m_{a,zy} & s_{a,z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} s_{g,x} & m_{g,xy} & m_{g,xz} \\ m_{g,yx} & s_{g,y} & m_{g,yz} \\ m_{g,zx} & m_{g,zy} & s_{g,z} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{s}_a = (s_{a,x}, s_{a,y}, s_{a,z})$  representa os erros de fator de escala dos acelerômetros de uma IMU,  $\mathbf{s}_g = (s_{g,x}, s_{g,y}, s_{g,z})$  os erros de fator de escala dos girômetros de uma IMU,  $m_{a,\alpha\beta}$  o erro de acoplamento cruzado da força específica sensível do eixo  $\beta$  em relação ao eixo  $\alpha$  do acelerômetro

e  $m_{g,\alpha\beta}$  o erro de acoplamento cruzado da taxa angular sensível do eixo  $\beta$  em relação ao eixo  $\alpha$  do girômetro.

Erros de fator de escala e acoplamento cruzado são adimensionais, sendo normalmente expressos em partes por milhão (ppm) ou em porcentagem. Alguns fabricantes especificam os desalinhamentos dos eixos ao invés dos erros de acoplamento cruzado, observando que o último é o seno do primeiro.

### 2.2.3.3 Ruído Aleatório

Ruído aleatório, como o próprio nome diz, é o componente de erro que é introduzido de forma aleatória. Groves (2013) ilustra alguns ruídos aleatórios, como, por exemplo, os ruídos elétricos que limitam a resolução dos sensores inerciais onde a magnitude da medição é pequena. Titterton e Weston (2004), por outro lado, citam ruídos aleatórios devidos à instabilidade mecânica de alguns tipos de acelerômetros. Já Woolven e Reid (1994) analisam modelos de girômetros que podem exibir ressonância em frequências específicas.

Groves (2013) afirma que o espectro do ruído em acelerômetros e girômetros, para frequências inferiores a 1 Hz é aproximadamente branco, ou seja, um sinal discreto cujas amostras são vistas como uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas temporalmente e com média zero e variância finita. Esse tipo de ruído não pode ser calibrado ou compensado, pois não há correlação entre valores passados e futuros.

Um método que ajuda a reduzir o ruído em frequências altas, independentemente da dinâmica, é a aplicação de filtros passa-baixa diretamente no sensor ou nas saídas da IMU. Alguns autores citam técnicas diferentes para melhorar o desempenho da filtragem. Skaloud, Bruton e Schwarz (1999), por exemplo, utilizam o método de filtro para pequenas ondas, enquanto El-Rabbany e El-Diasty (2004) aplicam uma rede neural artificial. No entanto, essas técnicas introduzem atrasos e reduzem a largura da banda efetiva do sensor. Para solucionar esse último problema, Agostino (2008) propõe um filtro que varia a banda passante em tempo real durante o procedimento de alinhamento e navegação.

### 2.2.3.4 Modelos de Erros

A contribuição das principais fontes de erro na saída dos acelerômetros é:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b = \mathbf{b}_a + (\mathbf{I}_3 + \mathbf{M}_a)\mathbf{f}_{ib}^b + \mathbf{w}_a \quad (2.4)$$

onde  $\tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b$  representa o vetor da força específica na saída da IMU,  $\mathbf{b}_a$  os *biases* do acelerômetro de uma IMU,  $\mathbf{I}_3$  é uma matriz identidade de dimensão  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{M}_a$  representa os erros de fator de escala e acoplamento cruzado do acelerômetro,  $\mathbf{f}_{ib}^b$  é a leitura verdadeira do acelerômetro e  $\mathbf{w}_a$ , o ruído aleatório.

Já a contribuição das principais fontes de erro na saída dos girômetros é:

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{b}_g + (\mathbf{I}_3 + \mathbf{M}_g)\omega_{ib}^b + \mathbf{G}_g\mathbf{f}_{ib}^b + \mathbf{w}_g \quad (2.5)$$

onde  $\tilde{\omega}_{ib}^b$  representa o vetor da taxa angular na saída da IMU,  $\mathbf{b}_g$  os erro de *biases* do girômetro de uma IMU,  $\mathbf{M}_g$  os de fator de escala e acoplamento cruzado do girômetro,  $\omega_{ib}^b$  a leitura verdadeira do girômetro,  $\mathbf{G}_g$  é o *bias* dependente da gravidade para um triedro de girômetros e  $\mathbf{w}_g$ , o ruído aleatório.

### 2.3 Navegador Inercial

Um navegador inercial é composto pelos sensores inerciais, descritos na seção 2.2, e um computador de navegação. A partir das informações fornecidas pelos sensores, a saber, força específica e taxa angular, o computador de navegação computa soluções de atitude, velocidade e posição via integração numérica.

Seja, inicialmente, o caso simplificado de um navegador inercial unidimensional. Nesse caso, considere um corpo,  $b$ , movendo-se com relação ao sistema de coordenadas de navegação (fixado na Terra),  $p$ , em uma linha reta perpendicular à direção da gravidade. Os eixos do corpo são fixos em relação ao sistema de coordenadas  $p$ . Dessa forma, seu movimento tem apenas um grau de liberdade. Sua aceleração referenciada na Terra pode ser medida por um único acelerômetro com seu eixo sensitivo alinhado ao longo da direção do movimento (desprezando a força de Coriolis).

Como sugerido por Groves (2013), se a velocidade  $v_{pb}$  é conhecida no tempo inicial,  $t_0$ , a velocidade no instante de tempo,  $t$ , pode ser determinada a partir da integração da aceleração,  $a_{pb}$ , conforme segue:

$$v_{pb}(t) = v_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{pb}(t')dt' \quad (2.6)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para a determinação da posição. Sendo a posição,  $r_{pb}$ , conhecida no tempo  $t_0$ , a posição no instante de tempo  $t$  pode ser obtida a partir da

integração da velocidade  $v_{pb}$ , que por sua vez é a integral da aceleração:

$$r_{pb}(t) = r_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t v_{pb}(t') dt' \quad (2.7)$$

ou:

$$r_{pb}(t) = r_{pb}(t_0) + (t - t_0)v_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} a_{pb}(t'') dt'' dt' \quad (2.8)$$

Seja agora, a generalização de (2.6) e (2.7) para um sistema de coordenadas de duas dimensões. Neste cenário, um corpo se move no plano horizontal definido pelos eixos  $x$  e  $y$  do sistema de coordenadas  $p$ , possuindo portanto, um grau de liberdade angular e dois lineares. As Equações (2.9) e (2.10) ilustram a determinação da velocidade e posição, respectivamente, para um sistema bi-dimensional.

$$\begin{bmatrix} v_{pb,x}^p(t) \\ v_{pb,y}^p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{pb,x}^p(t_0) \\ v_{pb,y}^p(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} a_{pb,x}^p(t') \\ a_{pb,y}^p(t') \end{bmatrix} dt' \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} x_{pb}^p(t) \\ y_{pb}^p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{pb}^p(t_0) \\ y_{pb}^p(t_0) \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} v_{pb,x}^p(t') \\ v_{pb,y}^p(t') \end{bmatrix} dt' \quad (2.10)$$

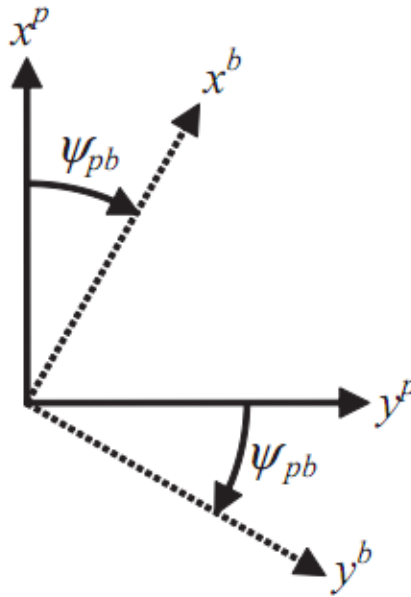
Como o sistema possui dois graus de liberdade lineares, fazem-se necessários dois acelerômetros para medição da aceleração ao longo dos dois eixos ortogonais. Da mesma forma, necessita-se um girômetro pois o modelo descrito possui um grau de liberdade angular. Tal girômetro é usado na determinação da orientação (ângulo de guinada) do sistema de coordenadas do corpo com relação ao sistema terrestre,  $p$ , de forma a se determinar a aceleração ao longo dos eixos de  $p$ . Isso pode ser observado na Figura 2.9 (desprezando-se a rotação da Terra).

Se o ângulo de guinada,  $\psi_{pb}$ , é conhecido no tempo inicial,  $t_0$ , ele pode ser determinado no momento posterior,  $t$ , integrando-se a taxa angular,  $\omega_{pb,z}$ :

$$\psi_{pb}(t) = \psi_{pb}(t_0) + \int_{t_0}^t \omega_{pb,z}(t') dt' \quad (2.11)$$

De acordo com Groves (2013), as medições dos acelerômetros podem ser representadas no sistema de coordenadas de navegação usando uma matriz de transformação de coordenadas

Figura 2.9 – Orientação do sistema de coordenadas do corpo com relação ao de navegação no plano horizontal.



Fonte: (GROVES, 2013).

$2 \times 2$ , como segue:

$$\begin{bmatrix} a_{pb,x}^p(t') \\ a_{pb,y}^p(t') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{pb}(t')) & -\text{sen}(\psi_{pb}(t')) \\ \text{sen}(\psi_{pb}(t')) & \cos(\psi_{pb}(t')) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{pb,x}^b(t') \\ a_{pb,y}^b(t') \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Devido à interdependência entre as equações supracitadas, existe uma ordem no processamento dos dados. Primeiro, é preciso atualizar o valor do ângulo de guinada. Depois, é feita a transformação de coordenadas da aceleração. Em seguida, o valor da velocidade é computado que, por fim, atualiza o valor da posição. Essas etapas se aplicam para um sistema de navegação inercial de qualquer dimensão.

Uma IMU completa (três acelerômetros e três girômetros) produz medições vetoriais de força específica,  $\mathbf{f}_{ib}^b$ , e taxa angular,  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ , do sistema de coordenadas do corpo com relação ao espaço inercial. De acordo com Groves (2013), incrementos de velocidade inercial,  $\mathbf{v}_{ib}^b$ , e incrementos de atitude inercial,  $\boldsymbol{\alpha}_{ib}^b$ , podem ser produzidos alternativamente. Conforme explicado em seções anteriores, nenhum acelerômetro consegue medir a aceleração total do corpo. Portanto, um modelo de gravidade deve ser usado e somado às medições de força específica.

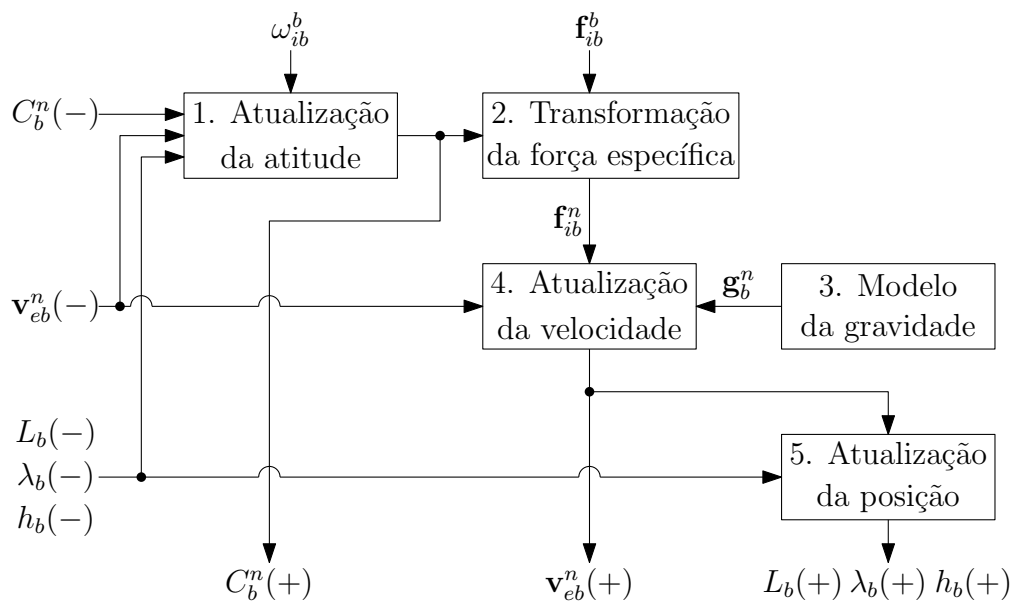
De forma simplificada, as saídas da IMU devem ser integradas para produzir soluções da atitude, velocidade e posição, de acordo com quatro etapas:

1. Atualização da atitude, ou orientação;

2. Transformação da força específica do sistema de coordenadas do corpo para o sistema de coordenadas de navegação;
3. Atualização da velocidade, incluindo a transformação da força específica em aceleração usando um modelo de gravidade.
4. Atualização da posição.

A inter-relação entre essas etapas pode ser visualizada na Figura 2.10 ao longo do intervalo de integração de  $t$  a  $t + \tau_i$ . Os sufixos (-) e (+) são, respectivamente, usados para denotar valores no início do ciclo de processamento das equações de navegação (tempo  $t$ ) e no final do ciclo de processamento (tempo  $t + \tau_i$ ).

Figura 2.10 – Diagrama de blocos das equações de navegação.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Groves (2013) observa que a implementação mais relevante das equações de navegação inercial considera o sistema de coordenadas Centrado na Terra e Fixo na Terra (do inglês *Earth-Centered Earth-Fixed*, ECEF)<sup>3</sup> como sendo o sistema de referência para as soluções de velocidade e posição, e o sistema de navegação local<sup>4</sup> (norte, leste e vertical) como sendo o sistema de representação (resolução) global. Ainda segundo Groves (2013), a atitude é expressa

<sup>3</sup> Sistema de coordenadas cuja origem é definida no centro de massa da Terra e cujo eixo  $x$  aponta para a interseção do plano equatorial com o meridiano de Greenwich (em todos os momentos da navegação), eixo  $z$  é definido ao longo do eixo de rotação da Terra, e o eixo  $y$  completa o sistema de coordenadas dextrógiro.

<sup>4</sup> Sistema de coordenadas cuja origem é definida no centro de massa do veículo e cujos eixos estão orientados para as direções topográficas norte, leste e vertical.



como uma matriz de transformação de coordenadas do corpo para o sistema de coordenadas de navegação  $C_b^n$ , e a velocidade é referenciada na Terra, mas representada nos eixos do sistema de coordenadas de navegação local  $\mathbf{v}_{eb}^n$ . A posição é integrada diretamente a partir da velocidade e é representada em termos de latitude geodésica  $L_b$ , longitude  $\lambda_b$  e altitude geodésica  $h_b$ .

### 2.3.1 Atualização da Atitude

A etapa de atualização de atitude, considerando as equações de navegação representadas no sistema de coordenadas de navegação local, usa a solução de posição e velocidade do instante anterior, bem como a medição de taxa angular proveniente dos girômetros para atualizar a matriz de transformação de coordenadas  $C_b^n$ . Isso é necessário porque a orientação dos eixos norte, leste e vertical muda conforme o sistema de navegação se move em relação à Terra. A derivada temporal da matriz  $C_b^n$  é:

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{ib}^b - (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) C_b^n \quad (2.13)$$

em que  $\Omega_{ib}^b$  é a matriz anti-simétrica (matriz cuja transposta coincide com sua oposta, ou seja,  $A^T = -A$ ) da taxa angular medida na IMU,  $\Omega_{ie}^n$  é a matriz anti-simétrica do vetor de rotação da Terra com relação ao espaço inercial, representado nos eixos do sistema de coordenadas de navegação local, a saber:

$$\Omega_{ie}^n = \omega_{ie} \begin{bmatrix} 0 & \text{sen}(L_b) & 0 \\ -\text{sen}(L_b) & 0 & -\text{cos}(L_b) \\ 0 & \text{cos}(L_b) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde  $\omega_{ie} = 7,292115 \times 10^{-5}$  rad/s representa a magnitude da rotação da Terra.

O termo  $\Omega_{en}^n$  é a matriz anti-simétrica da taxa de transporte, representada por:

$$\Omega_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{en,z}^n & \omega_{en,y}^n \\ \omega_{en,z}^n & 0 & -\omega_{en,x}^n \\ -\omega_{en,y}^n & \omega_{en,x}^n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

em que:

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n}{R_E(L_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n}{R_N(L_b) + h_b} \\ -\frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n \tan(L_b)}{R_E(L_b) + h_b} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde  $R_E$  representa o raio de curvatura transversal, e  $R_N$  o raio de curvatura meridiano da Terra.

O primeiro termo da Equação (2.13) se refere à taxa angular inercialmente referenciada, medida pelos girômetros. Já o segundo, é referente à rotação da Terra em relação ao sistema de coordenadas inercial. O terceiro termo, conhecido como taxa de transporte, surge da rotação dos eixos do sistema de coordenadas de navegação local com relação à Terra. Segundo Groves (2013), quando a atitude do sistema permanece constante, os girômetros detectam a rotação da Terra e a taxa de transporte, que deve ser corrigida para manter a atitude inalterada.

Para se integrar a Equação (2.13), pode-se assumir que a posição e velocidade são constantes durante o intervalo de atualização da atitude. Nesse caso, é desprezada a variação da posição e velocidade e trunca-se a expansão de Taylor da série de potência dos termos de taxa de transporte e rotação da Terra para a primeira ordem, como segue:

$$C_b^n(+)=C_b^n(-)(I_3+\Omega_{ib}^b\tau_i)-[\Omega_{ie}^n(-)+\Omega_{en}^n(-)]C_b^n(-)\tau_i \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Transformação de Coordenadas do Vetor Força Específica

Os acelerômetros de uma IMU medem a força específica ao longo dos eixos do sistema de coordenadas do corpo. No entanto, é preciso que ela seja representada no sistema de coordenadas de navegação local. Para isso, os eixos de resolução são transformados aplicando-se a matriz de transformação de coordenadas recém-computada. Como a medição da força específica é uma média ao longo do tempo  $t$  a  $t + \tau_i$ , também uma média da matriz de transformação de coordenadas deve ser calculada, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{f}_{ib}^n = \frac{1}{2} [C_b^n(-) + C_b^n(+)] \mathbf{f}_{ib}^b \quad (2.18)$$

No entanto, a média de duas matrizes de transformação de coordenadas não produz precisamente a média das duas atitudes. Quanto menos a atitude variar ao longo do intervalo de processamento, menores serão os erros introduzidos por essa aproximação. Quando a IMU

fornece em sua saída incrementos de velocidade inercial, estas são transformadas da mesma maneira, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{v}_{ib}^n = \frac{1}{2} [C_b^n(-) + C_b^n(+)] \mathbf{v}_{ib}^b \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Atualização da Velocidade

Nas equações de navegação representadas no sistema de coordenadas de navegação local, os eixos de resolução da velocidade não são os mesmos que o seu sistema de coordenadas de referência. Tal velocidade é expressa em termos de sua correspondente representação no sistema ECEF, como segue:

$$\mathbf{v}_{eb}^n = C_e^n \mathbf{v}_{eb}^e \quad (2.20)$$

onde  $C_e^n$  é igual a transposta de  $C_n^e$ , que é representada por:

$$C_n^e = \begin{bmatrix} -\text{sen}(L_b)\cos(\lambda_b) & -\text{sen}(\lambda_b) & -\cos(L_b)\cos(\lambda_b) \\ -\text{sen}(L_b)\text{sen}(\lambda_b) & \cos(\lambda_b) & -\cos(L_b)\text{sen}(\lambda_b) \\ \cos(L_b) & 0 & -\text{sen}(L_b) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Groves (2013) explica que, derivando-se a Equação (2.20), haverá a emergência de termos adicionais, associados à taxa de transporte, aceleração centrífuga e força de Coriolis encontrados na atualização de velocidade no sistema de coordenadas ECEF. Isso ocorre devido a rotação dos eixos de resolução. A derivada temporal da velocidade é expressa em termos da força específica, aceleração da gravidade e aceleração centrífuga, conforme:

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{f}_{ib}^n + \mathbf{g}_b^n(L_b, h_b) - (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)\mathbf{v}_{eb}^n \quad (2.22)$$

Imagery e Agency (1997) apresentam um conjunto de fórmulas utilizadas para se estimar a gravidade em função da latitude e altitude, cuja aproximação da variação do componente vertical com a altitude é,

$$g_{b,D}^n(L_b, h_b) \approx g_0(L_b) \left\{ 1 - \frac{2}{R_0} \left[ 1 + f(1 - 2\text{sen}^2 L_b) + \frac{\omega_{ie}^2 R_0^2 R_P}{\mu} \right] h_b + \frac{3}{R_0^2} h_b^2 \right\} \quad (2.23)$$

onde  $g_{b,D}^n$  representa a componente vertical da aceleração devido à gravidade,  $g_0$  a magnitude padrão da gravidade na superfície da Terra,  $R_0$  o raio equatorial (de acordo com o Sistema

Geodésico Global de 1984 (do inglês *World Geodetic System*, WGS84),  $R_0 = 6378,127$  km),  $f$  o achatamento (de acordo com o WGS84,  $f = 1/298,25722$ ),  $R_P$  o raio polar (de acordo com o WGS84,  $R_P = 6356,75231$  km) e  $\mu$  a constante gravitacional da Terra (de acordo com WGS84,  $\mu = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^{-2}$ ).

Imagery e Agency (1997) apresentam uma forma simples de calcular  $g_0$  em função da latitude, a seguir:

$$g_0(L_b) \approx 9,7803253359 \left[ \frac{1 + 0,001931853 \text{sen}^2(L_b)}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2(L_b)}} \right] \quad (2.24)$$

onde  $e$  representa a excentricidade da Terra (de acordo com o WGS84,  $e = 0,08182$ ).

De acordo com Jekeli (2000), a componente leste da gravidade é desprezível, e a componente norte varia com a altitude como:

$$g_{b,N}^n(L_b, h_b) \approx -8,08 \times 10^{-9} h_b \text{sen}(2L_b) \quad (2.25)$$

Como os termos da aceleração de Coriolis e da taxa de transporte são geralmente pequenos em (2.22), Groves (2013) considera que é uma aproximação razoável desprezar suas variações durante o intervalo de integração. Logo:

$$\mathbf{v}_{eb}^n(+) = \mathbf{v}_{eb}^n(-) + \mathbf{v}_{ib}^n + \{ \mathbf{g}_b^n[L_b(-), h_b(-)] - [\Omega_{en}^n(-) + 2\Omega_{ie}^n(-)] \mathbf{v}_{eb}^n(-) \} \tau_i \quad (2.26)$$

### 2.3.4 Atualização da Posição

A latitude, longitude e altitude são funções da velocidade, latitude e longitude, como mostrados na Equação (2.27).

$$\begin{aligned} h_b(+) &= h_b(-) - \int_t^{t+\tau_i} \mathbf{v}_{eb,D}^n(t') dt' \\ L_b(+) &= L_b(-) + \int_t^{t+\tau_i} \frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n(t')}{R_N[L_b(t')] + h_b(t')} dt' \\ \lambda_b(+) &= \lambda_b(-) + \int_t^{t+\tau_i} \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n(t')}{\{R_E[L_b(t')] + h_b(t')\} \cos(L_b(t'))} dt' \end{aligned} \quad (2.27)$$

Groves (2013) afirma que a variação dos raios de curvatura meridiano,  $R_N$ , e transversal,  $R_E$ , com relação à latitude geodésica,  $L_b$ , é pequena. Logo, é aceitável desprezar sua variação durante o intervalo de integração. O autor também assume que a velocidade varia como uma

função linear do tempo durante o intervalo de integração, obtendo a seguinte aproximação para a atualização de posição.

$$\begin{aligned}
 h_b(+) &= h_b(-) - \frac{\tau_i}{2} \left[ \mathbf{v}_{eb,D}^n(-) + \mathbf{v}_{eb,D}^n(+) \right] \\
 L_b(+) &= L_b(-) + \frac{\tau_i}{2} \left\{ \frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n(-)}{R_N[L_b(-)] + h_b(-)} + \frac{\mathbf{v}_{eb,N}^n(+)}{R_N[L_b(+)] + h_b(+)} \right\} \\
 \lambda_b(+) &= \lambda_b(-) + \frac{\tau_i}{2} \left\{ \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n(-)}{\{R_E[L_b(-)] + h_b(-)\} \cos L_b(-)} + \frac{\mathbf{v}_{eb,E}^n(+)}{\{R_E[L_b(+)] + h_b(+)\} \cos L_b(+)} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

As Equações (2.28) devem ser calculadas na sequência fornecida devido à interdependência entre as equações. A posição pode ser alternativamente atualizada, via uma solução de primeira ordem, conforme:

$$\mathbf{C}_n^e(+) = \mathbf{C}_n^e(-) \left\{ \mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}_{en}^n(-) + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n(+)] \tau_i \right\} \tag{2.29}$$

A posição curvilínea (definida em termos de latitude, longitude e altura) pode ser convertida em posição cartesiana, referenciada e representada no ECEF, usando:

$$\begin{aligned}
 x_{eb}^e &= [R_E(L_b) + h_b] \cos(L_b) \cos(\lambda_b) \\
 y_{eb}^e &= [R_E(L_b) + h_b] \cos(L_b) \sin(\lambda_b) \\
 z_{eb}^e &= [(1 - e^2) R_E(L_b) + h_b] \sin(L_b)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

## 2.4 Propagação de Erros em INS

Os erros nas soluções de posição, velocidade e atitude em um sistema de navegação inercial surgem de três fontes: erros nas medições dos sensores inerciais, erros de inicialização e erros de aproximações durante o processamento. O último inclui aproximações nas equações de navegação no domínio discreto, efeitos das taxas de iterações finitas, aproximações no modelo da gravidade, erros de arredondamento computacional e erros de temporização.

As equações de navegação integram os *biases* dos acelerômetros e dos girômetros para produzir erros de posição, velocidade e atitude que se acumulam com o tempo. Da mesma forma, o erro de inicialização de velocidade é integrado para produzir um erro de posição crescente. Outros erros, como ruído aleatório nos sensores e aproximações das equações de navegação, têm um efeito cumulativo sobre os erros da solução de navegação. Além disso, os erros de

atitude contribuem para os erros de velocidade e posição funcionando como uma realimentação positiva ou negativa através do modelo de gravidade.

A propagação de erros em INS também é afetada pela trajetória do veículo. O efeito do fator de escala e dos erros de acoplamento cruzado, por exemplo, depende da dinâmica do veículo, assim como o acoplamento dos erros de atitude, particularmente no ângulo de guinada, em velocidade e posição.

Erros em INS consistem na diferença entre as quantidades medidas pelo INS, denotadas por “ $\sim$ ”, e o valor verdadeiro dessas quantidades. Assim, os erros de posição, velocidade e aceleração cartesianos são:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_{eb}^n &= \tilde{\mathbf{r}}_{eb}^n - \mathbf{r}_{eb}^n \\ \delta \mathbf{v}_{eb}^n &= \tilde{\mathbf{v}}_{eb}^n - \mathbf{v}_{eb}^n \\ \delta \mathbf{a}_{eb}^n &= \tilde{\mathbf{a}}_{eb}^n - \mathbf{a}_{eb}^n\end{aligned}\tag{2.31}$$

Da mesma forma, os erros de latitude, longitude e altitude são:

$$\begin{aligned}\delta L_b &= \tilde{L}_b - L_b \\ \delta \lambda_b &= \tilde{\lambda}_b - \lambda_b \\ \delta h_b &= \tilde{h}_b - h_b\end{aligned}\tag{2.32}$$

Os erros nas leituras dos sensores inerciais, por sua vez, são:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{f}_{ib}^b &= \tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b - \mathbf{f}_{ib}^b \\ \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{aligned}\tag{2.33}$$

As matrizes de transformação de coordenadas devem ser usadas para se calcular os erros de atitude. A matriz de erros de atitude é definida como:

$$\delta C_b^n = \tilde{C}_b^n C_n^b\tag{2.34}$$

Para aproximações de pequenos ângulos, Groves (2013) explica que os erros de atitude podem ser expressos como um vetor de rotação. Para uma representação nos eixos do sistema

de coordenadas de navegação local  $n$ , por exemplo, tem-se:

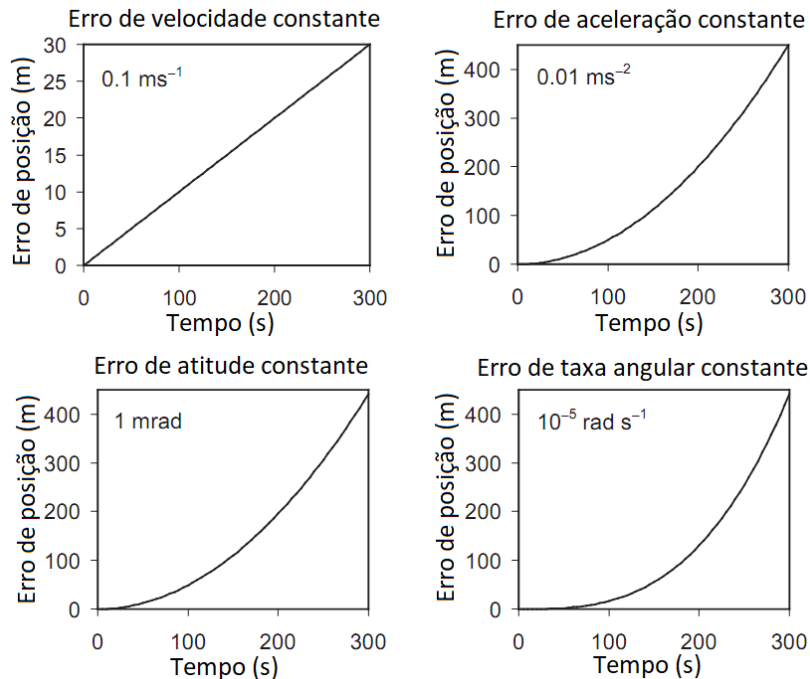
$$\begin{bmatrix} \delta\psi_{nb}^n & \times \end{bmatrix} \approx \delta C_b^n - \mathbf{I}_3 \quad (2.35)$$

onde  $\delta\psi_{nb}^n$  é o erro de atitude do sistema de coordenadas do corpo em relação ao de navegação local, resolvido nos eixos de navegação, e  $\begin{bmatrix} \delta\psi_{nb}^n & \times \end{bmatrix}$  representa sua matriz anti-simétrica.

### 2.4.1 Curto Prazo

O cenário de propagação de erros em INS mais simples é no curto prazo (poucos minutos), considerando-se, adicionalmente, um veículo viajando em linha reta com velocidade constante e horizontalmente nivelado. De acordo com Groves (2013), ao se considerar a propagação de erros no curto prazo, os efeitos de curvatura, rotação da Terra e da realimentação do modelo gravitacional podem ser desprezados, uma vez que não há erros induzidos pela dinâmica quando o veículo viaja a uma velocidade constante. Na Figura 2.11 é ilustrado o crescimento do erro de posição em função de erros constantes na velocidade, aceleração, atitude e taxa angular.

Figura 2.11 – Crescimento do erro de posição linear por eixo de um INS para diferentes fontes de erro, no curto prazo.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

O erro de posição é a integral do erro de velocidade. Dessa forma, no curto prazo, esse erro pode ser modelado como:

$$\delta \mathbf{r}_{eb}^n(t) = \delta \mathbf{v}_{eb}^n t \quad (2.36)$$

onde  $t$  é o tempo de navegação. Como ilustrado na Figura 2.11, um erro de velocidade inicial de 0,1 m/s produz um erro de posição de 30 metros após 300 segundos (5 minutos).

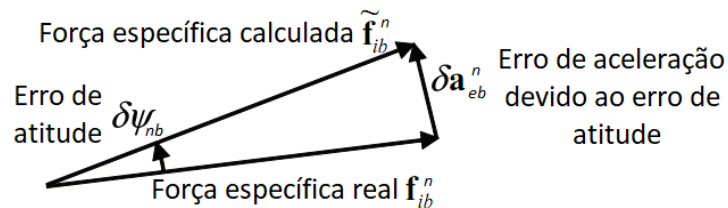
O erro de velocidade é a integral do erro de aceleração. Dessa forma, os erros de velocidade e posição podem ser modelados em função dos *bias* dos acelerômetros (supostos constantes):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_{eb}^n(t) &\approx C_b^n \mathbf{b}_a t \\ \delta \mathbf{r}_{eb}^n(t) &\approx \frac{1}{2} C_b^n \mathbf{b}_a t^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como ilustrado na Figura 2.11, um *bias* do acelerômetro de 0,01 m/s<sup>2</sup> (aproximadamente 1 mg) produz um erro de posição de 450 metros após 300 segundos.

Os erros de atitude corrompem a etapa de transformação da força específica (do sistema de coordenadas do corpo para o de navegação local), resultando em erros na aceleração, ilustrado na Figura 2.12.

Figura 2.12 – Erro de aceleração devido ao erro de atitude.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Quando o erro de atitude é expresso como um pequeno vetor de rotação, o erro de aceleração resultante pode ser modelado como segue:

$$\delta \mathbf{a}_{eb}^n(t) \approx \delta \psi_{nb}^n \times (C_b^n \tilde{\mathbf{f}}_{ib}^b) \quad (2.38)$$

onde  $\times$  representa o produto vetorial, cujo resultado produz um vetor perpendicular à ambos vetores originais.

No cenário simplificado do veículo nivelado e com velocidade constante, a força específica compreende apenas a reação à gravidade. Assim, os erros de arfagem (eixo  $y$  do sistema de



coordenadas do corpo) acoplam-se aos erros de aceleração no eixo  $x$  e erros de rolamento (eixo  $x$  do sistema de coordenadas do corpo) acoplam-se aos erros de aceleração no eixo  $y$ . Esses erros de aceleração são integrados para produzir os seguintes erros em posição e velocidade:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{v}_{eb}^n(t) &\approx \delta \psi_{nb}^n \times \left\{ C_b^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \right\} t \\ \delta \mathbf{r}_{eb}^n(t) &\approx \frac{1}{2} \delta \psi_{nb}^n \times \left\{ C_b^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \right\} t^2\end{aligned}\quad (2.39)$$

Como ilustrado na Figura 2.11, um erro de atitude inicial de 1 mrad ( $0,057^\circ$ ) produz um erro de posição de aproximadamente 450 metros após 300 segundos.

Quando a aproximação de pequenos ângulos é válida, o erro de atitude devido a um *bias* do girômetro,  $\mathbf{b}_g$ , se propaga como:

$$\delta \psi_{ib}^b = \mathbf{b}_g t \quad (2.40)$$

Isso leva a erros de velocidade e posição, que crescem no tempo ao quadrado e ao cubo, respectivamente:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{v}_{eb}^n(t) &\approx \frac{1}{2} C_b^n \left( \mathbf{b}_g \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \right) t^2 \\ \delta \mathbf{r}_{eb}^n(t) &\approx \frac{1}{6} C_b^n \left( \mathbf{b}_g \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \right) t^3\end{aligned}\quad (2.41)$$

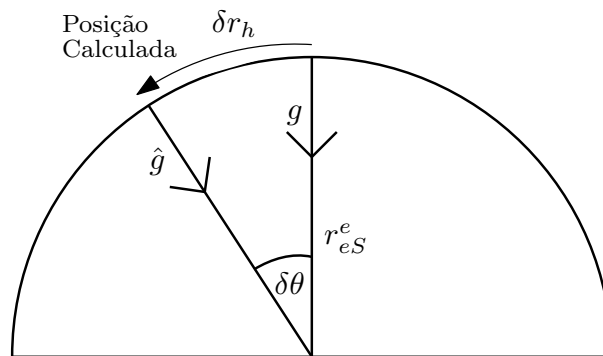
Como ilustrado na Figura 2.11, um girômetro com *bias* de  $10^{-5}$  rad/s ( $2,1^\circ/\text{h}$ ) produz um erro de posição de aproximadamente 450 metros após 300 segundos.

## 2.4.2 Médio e Longo Prazo

O modelo de gravidade usado dentro das equações de navegação inercial, independentemente de qual sistema de coordenadas de representação é usado, atua para estabilizar os erros de posição horizontal (norte e leste) e desestabilizar os erros do canal vertical.

Seja, por exemplo, um veículo na superfície da Terra com erro de posição ao longo dessa superfície  $\delta r_h$ , conforme ilustrado na Figura 2.13. Como consequência, o modelo de gravidade assume que a aceleração gravitacional atua sob um ângulo,  $\delta\theta = \delta r_h / r_{eS}^e$ , com relação à sua direção verdadeira, onde  $r_{eS}^e$  é o raio geocêntrico. Assim, uma falsa aceleração,  $\delta\ddot{r}_h$ , é sentida na direção oposta ao erro de posição, tornando-o sujeito à uma realimentação negativa.

Figura 2.13 – Estimativa da gravidade quando de um erro de posição horizontal.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Assumindo-se uma aproximação de pequenos ângulos, tem-se:

$$\delta\ddot{r}_h = -\frac{g}{r_{eS}^e}\delta r_h \quad (2.42)$$

Essa equação descreve um movimento harmônico simples com frequência angular  $\omega_s = \sqrt{g/r_{eS}^e}$ , conhecido como oscilação de Schuler. Um pêndulo, com seu pivô no centro da Terra e seu prumo no INS, é conhecido como um pêndulo de Schuler. O período correspondente da oscilação de Schuler é:

$$\tau_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi\sqrt{\frac{r_{eb}^e}{g_b}} \quad (2.43)$$

onde  $r_{eb}^e$  é a magnitude do vetor posição cartesiana do INS com relação ao centro da Terra.

Como a força do campo gravitacional e a distância do INS ao centro da Terra variam com a latitude e altitude, o período de Schuler também varia. No equador e na superfície da Terra,  $\tau_s = 5074$  segundos (84,6 minutos). Consequentemente, ao longo de períodos da ordem de uma hora, erros de posição decorrentes de erros de velocidade inicial, erros de atitude inicial, ou *biases* dos acelerômetros são limitados, ao passo que erros de posição decorrentes de *biases* dos girômetros crescem linearmente com o tempo. A Tabela 2.2 apresenta equações aproximadas para os erros de posição horizontal que surgem de diferentes fontes de erro, por

períodos de até 4 horas (TITTERTON; WESTON, 2004). Observe que, na prática, os *biases* dos instrumentos não são fixos com relação aos eixos norte e leste.

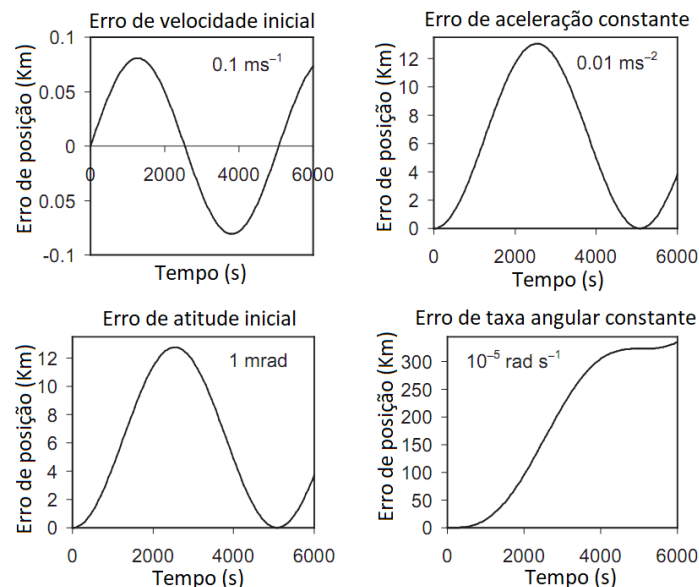
Tabela 2.2 – Crescimento do erro de posição horizontal de um INS no médio/longo prazo (mais de 4 horas).

Fonte de Erros	Erro de Posição Norte, $\delta r_{eb,N}^n$	Erro de Posição Leste, $\delta r_{eb,E}^n$
Erro de Velocidade Inicial, $\delta v_{eb}^n$	$\frac{\text{sen}(\omega_s t)}{\omega_s} \delta v_{eb,N}^n$	$\frac{\text{sen}(\omega_s t)}{\omega_s} \delta v_{eb,E}^n$
Bias Fixo do Acelerômetro, $(C_b^n \mathbf{b}_a)$	$\frac{1 - \cos(\omega_s t)}{\omega_s^2} (C_b^n \mathbf{b}_a)_N$	$\frac{1 - \cos(\omega_s t)}{\omega_s^2} (C_b^n \mathbf{b}_a)_E$
Erro de Atitude Inicial, $\delta \psi_{nb}^n$	$-[1 - \cos(\omega_s t)] r_{eS}^e \delta \psi_{nb,E}^n$	$[1 - \cos(\omega_s t)] r_{eS}^e \delta \psi_{nb,N}^n$
Bias Fixo do Girômetro, $(C_b^n \mathbf{b}_g)$	$- \left[ t - \frac{\text{sen}(\omega_s t)}{\omega_s} \right] r_{eS}^e (C_b^n \mathbf{b}_g)_E$	$\left[ t - \frac{\text{sen}(\omega_s t)}{\omega_s} \right] r_{eS}^e (C_b^n \mathbf{b}_g)_N$

Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Na Figura 2.14 é mostrado o comportamento do erro de posição para um período de 6000 segundos (100 minutos) decorrente de um erro de velocidade inicial de 0,1 m/s, um erro de aceleração de 0,01 m/s<sup>2</sup>, um erro de atitude inicial de 1 mrad, e um erro de taxa angular de 10<sup>-5</sup> rad/s.

Figura 2.14 – Crescimento do erro de posição horizontal de um INS no médio/longo prazo.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Sempre que o veículo mudar de direção, a orientação dos acelerômetros e dos girômetros com relação aos eixos norte e leste também mudará. Isso irá redefinir os ciclos de Schuler para esses erros com os acumulativos de velocidade e atitude, agindo como erros iniciais de

velocidade e atitude para o novo ciclo de Schuler. Esse efeito é conhecido como bombeamento de Schuler.

Já para o canal vertical, a gravidade é modelada em função da altitude:

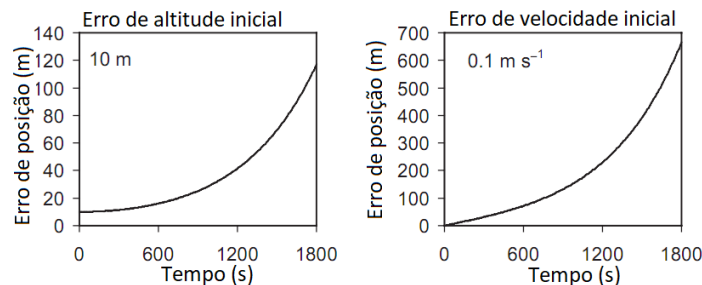
$$g(h_b) \approx \left(1 - \frac{2h_b}{r_{eS}^e}\right) g_0 \quad (2.44)$$

Um erro positivo de altitude,  $\delta h_b$ , faz com que a gravidade seja subestimada. Como a gravidade atua na direção oposta àquela em que a altitude é medida, a aceleração virtual que surge é na mesma direção que o erro de altitude. Portanto, a aceleração vertical pode ser definida como:

$$\delta \ddot{h}_b \approx \frac{2g}{r_{eS}^e} \delta h_b \quad (2.45)$$

Na Figura 2.15 é mostrado o crescimento do erro de altitude em 1800 segundos, decorrente de um erro de altitude inicial de 10 m e um erro de velocidade vertical inicial de 0,1 m/s.

Figura 2.15 – Crescimento do erro de posição vertical de um INS no médio/longo prazo.



Fonte: Adaptado de Groves (2013).

Como pode ser observado na Equação (2.45), o erro de posição vertical está sujeito a uma realimentação positiva, de forma que, no exemplo da Figura 2.15, o erro de inicialização de altitude é dobrado após aproximadamente 750 segundos (12,5 minutos). O crescimento do erro de altitude devido ao erro de inicialização da velocidade vertical é ainda mais rápido. Pelos motivos supracitados, um INS somente é adequado para navegação vertical no médio/longo prazo quando é auxiliado por outro sensor de navegação.

### 3 BARÔMETROS

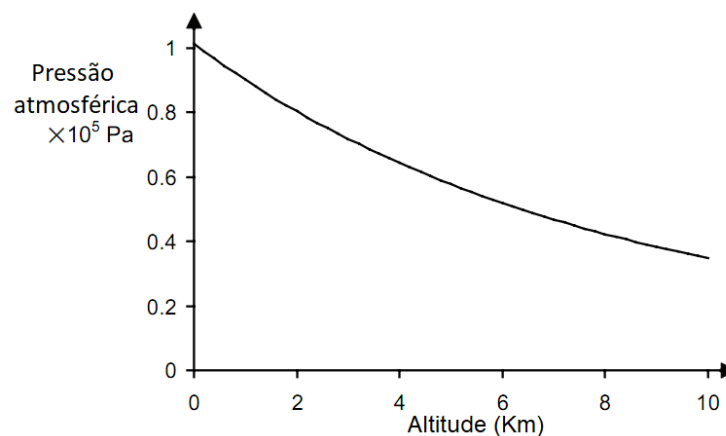
A informação de altitude é fundamental para a navegação, especialmente a navegação aérea. Como visto no Capítulo 2, o problema de determinação de altitude via INS reside na instabilidade do canal vertical, sendo, portanto, necessário desenvolver métodos de amortecimento do mesmo. Em Siouris (1993), por exemplo, referências de aceleração vertical e altitude são integradas ao INS, via filtros complementares, de forma a se produzir uma informação estável de altitude.

O altímetro barométrico, popularmente conhecido como barômetro, é um instrumento utilizado para medir a pressão atmosférica. Como pode ser observado na Figura 3.1, ela varia com a altitude. Utilizando os dados de ICAO (1994), Kubrak, Macabiau e Monnerat (2005) determinaram um modelo atmosférico padrão para se calcular a altitude,  $h_B$ , a partir da pressão atmosférica medida pelo barômetro,  $p_b$ , a saber:

$$h_B = \frac{T_s}{k_T} \left[ \left( \frac{p_b}{p_s} \right)^{-\left( \frac{R_g k_T}{g_0} \right)} - 1 \right] + h_s \quad (3.1)$$

onde  $p_s = 101,325$  kPa e  $T_s = 288,15$  K são a pressão e temperatura, respectivamente, ao nível do mar,  $h_s$  é altitude de referência,  $R_g = 287,1$  J/(kgK) é a constante universal dos gases,  $k_T = 6,5 \times 10^{-3}$  K/m é o gradiente da temperatura atmosférica e  $g_0 = 9,80665$  m/s<sup>2</sup> é a aceleração média da gravidade ao nível do mar. Os valores de  $p_s$ ,  $T_s$  e  $h_s$  são os valores padrão ao nível médio do mar, porém eles também podem ser obtidos a partir de uma estação de referência e transmitidos ao usuário.

Figura 3.1 – Variação da pressão atmosférica com a altitude.



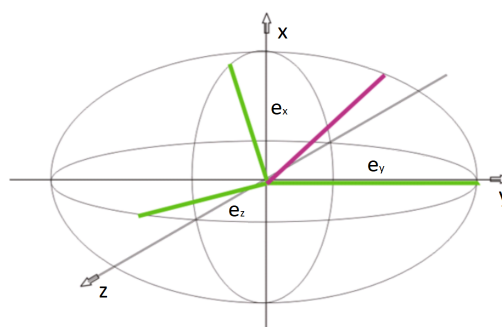
Fonte: Adaptado de Groves (2013).

De acordo com Osder (1997), a Equação (3.1) somente é aplicada a altitudes ortométricas, isto é, com relação ao geóide equipotencial terrestre, de até 10769 km. Acima dessa altitude, os valores de algumas constantes mudam, não sendo, contudo, relevantes para este trabalho.

### 3.1 Separação Geoidal

A Terra não possui uma forma regular. Por esse motivo, vários autores e pesquisadores buscam obter um modelo que melhor represente o formato da superfície terrestre. Os modelos mais utilizados para a sua representação são o elipsoide e geóide. Na Figura 3.2 está ilustrada a geometria de um elipsoide.

Figura 3.2 – Modelo elipsoidal de representação da Terra.



Fonte: Adaptado de Gobato (2012).

O elipsoide possui geometria regular e é descrito pela seguinte equação paramétrica característica:

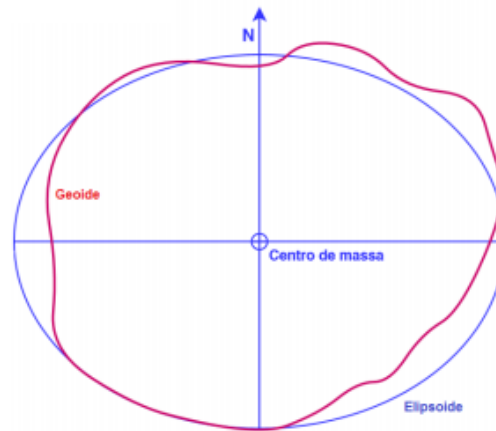
$$\frac{x^2}{e_x^2} + \frac{y^2}{e_y^2} + \frac{z^2}{e_z^2} = 1 \quad (3.2)$$

onde  $e_x$ ,  $e_y$  e  $e_z$  caracterizam os semi-eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do elipsoide, respectivamente.

Já o segundo modelo, o geóide, possui um formato mais irregular do que o elipsoide. De acordo com Silva e Segantine (2015), o geóide corresponde a uma superfície equipotencial do campo de gravidade que mais se aproxima do nível médio dos mares. Na Figura 3.3 está ilustrada a diferença entre os formatos do geóide e do elipsoide. Embora essas geometrias busquem caracterizar um modelo ideal da superfície terrestre, elas não representam a sua forma real, como apresentado na Figura 3.4.

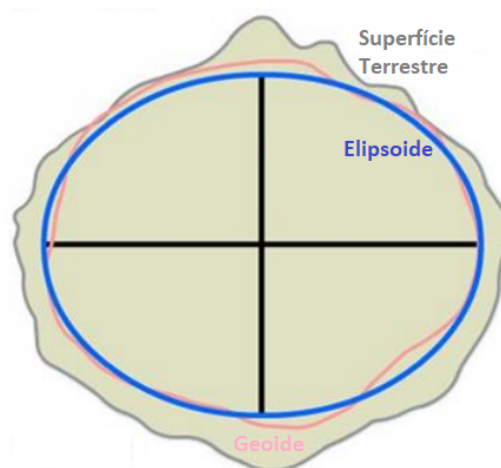
Para se obter o valor da altitude acima do nível médio do mar (também conhecida como altitude ortométrica), é preciso conhecer a altitude elipsoidal (ou altitude geodésica) e a se-

Figura 3.3 – Comparação das geometrias de um geóide e de um elipsoide.



Fonte: (IBGE, 2019).

Figura 3.4 – Comparação entre as superfícies da Terra, do geóide e do elipsoide.



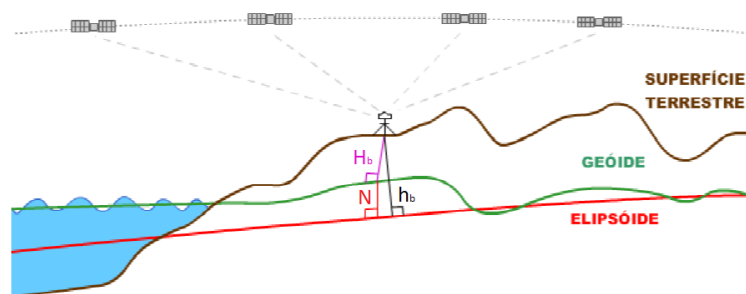
Fonte: Adaptado de (CHUERUBIM, 2013).

paração geoidal. De acordo com Pinto (2018), IBGE (2015) e Chuerubim (2013), a altitude geodésica está relacionada ao elipsoide de referência da Terra. Essa altitude é obtida por meio de receptores GNSS referenciados ao *datum* WGS84. Já a separação geoidal está relacionada à ondulação do geóide sobre a superfície terrestre, a qual é obtida por meio de modelos. Dessa forma, o valor da altitude ortométrica é:

$$H_b = h_b - N \quad (3.3)$$

em que  $H_b$  representa a altitude ortométrica,  $h_b$  é a altitude geodésica e  $N$  é a separação geoidal. A ilustração dessas altitudes é apresentada na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Esquema da obtenção da altitude ortométrica em relação à superfície da Terra.



Fonte: Adaptado de (IBGE, 2015).

### 3.2 Erros Característicos

Groves (2013) afirma que a medição da pressão barométrica pode apresentar atrasos significativos durante subidas e descidas rápidas, bem como ser interrompida por turbulência e por estrondos sônicos. Além disso, mudanças rápidas no erro de altitude barométrica podem ocorrer quando o sistema de navegação passa por uma frente climática. O autor também afirma que a principal fonte de erro na medição da altitude barométrica decorre das diferenças entre as temperaturas e pressões atmosféricas reais e as modeladas. Utilizando os valores de temperatura e pressão padrões, ao nível do mar, os erros de altitude podem chegar a centenas de metros. Já para dados recebidos de uma estação de referência, o erro é proporcional à distância da estação de referência e ao instante de atualização da calibração.

De acordo com Bao et al. (2017), barômetros podem fornecer uma informação de altitude contínua e estável, no entanto, com baixa precisão. Em geral, os barômetros são inicializados com base na informação de altitude, temperatura e pressão do ponto de referência. Contudo, problemas de comportamento de deriva costumam afetar os mesmos com o passar do tempo. Além disso, as características do ambiente mudam de um local para outro, resultando no principal erro dos barômetros. Bao et al. (2017) também afirmam que a altitude barométrica é susceptível a distúrbios externos como fluxo de ar e vibração. Nesse sentido, Sabatini e Genovese (2013) desenvolveram uma abordagem estocástica para modelar o erro do altímetro barométrico, o qual é considerado a combinação aditiva de um componente determinístico variante no tempo, um processo aleatório exponencialmente correlacionado, e outro não correlacionado (ruído branco).



### 3.2.1 Erro Principal

Segundo Bao et al. (2017), a composição da atmosfera é aproximadamente constante. Porém, em uma atmosfera muito úmida, o conteúdo de vapor de água pode ser alto o suficiente para diminuir significativamente a densidade do ar, alterando o valor de  $R$  (vide Equação (3.1)). Ademais, durante a navegação, as condições climáticas da atmosfera podem variar, alterando, também, os valores da temperatura e pressão de referência. Bao et al. (2017) definem o erro principal  $\varepsilon_p$  do barômetro em função da diferença entre os valores assumidos (representados pelo símbolo  $\sim$ ) para esses dois parâmetros e seus valores verdadeiros. Em notação matemática:

$$\varepsilon_p = s_b h_B + b_b \quad (3.4)$$

onde  $h_B$  é a altitude verdadeira,  $s_b$  é erro em fator de escala e  $b_b$  é o *bias*. Os valores de  $s_b$  e  $b_b$  são tais que (BAO et al., 2017):

$$\begin{aligned} b_b &= \left( \frac{R_g T_s}{g_0} \right) \left( \frac{\tilde{p}_s - p_s}{p_s} \right) \\ s_b &= \left( \frac{R_g k_T}{g_0} \right) \left( \frac{\tilde{p}_s - p_s}{p_s} \right) + \left( \frac{\tilde{T}_s - T_s}{T_s} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Erro de Deriva

Seo, Lee e Park (2004) afirmam que o erro de deriva dos barômetros é variante no tempo. Ele está correlacionado com as mudanças de pressão que podem estar envolvidas, por exemplo, com a previsão do tempo local e o rastreamento a longo prazo. Bao et al. (2017), em seu trabalho, constataram que o comportamento da deriva afetou significativamente o desempenho do barômetro, tendo a altitude sido modificada em cerca de 10 metros no cenário testado (corpo estacionário dentro de um cômodo de uma casa), à temperatura constante. Além disso, considerou-se que a evolução temporal do erro de deriva  $\varepsilon_d$  é não-estacionária, mais especificamente que com derivada igual a um ruído Gaussiano branco, o que caracteriza um processo estocástico do tipo passeio aleatório (*random walk*), isto é:

$$\dot{\varepsilon}_d(t) = w_d(t) \quad (3.6)$$

onde  $w_d(t)$  é um ruído Gaussiano branco com média zero e variância  $\sigma_d$ . Bao et al. (2017) consideram que  $\sigma_d$  é muito dependente do clima, estação e tempo local.

Uma maneira alternativa de se modelar  $\varepsilon_d$  é por meio de um processo de Gauss-Markov de primeira ordem (ou seja, um processo correlacionado exponencialmente no tempo). O erro de deriva do barômetro modelado como tal é:

$$\dot{\varepsilon}_d(t) = -\frac{\varepsilon_d(t)}{\tau_{mi}} + w_d(t) \quad (3.7)$$

onde  $\tau_{mi}$  é o tempo de correlação do processo estocástico.

### 3.2.3 Erros de Distúrbios Externos

As medições do barômetro são susceptíveis a distúrbios externos, como vento e vibração. Bao et al. (2017), por exemplo, desenvolveram um estudo acerca das perturbações ocasionados pelo vento, na medição da pressão atmosférica. Nesse estudo, os autores consideraram a pressão total, composta pela pressão atmosférica e pela pressão dinâmica, como sendo um valor constante. Dessa forma, um aumento na pressão dinâmica causada pelo vento provoca diminuição na pressão atmosférica. A medição corrompida da pressão atmosférica ( $\tilde{p}_b$ ) e a altitude correspondente ( $\tilde{h}_B$ ) são dadas por:

$$\tilde{p}_b = p_b - \frac{1}{2}\rho v_v^2 \quad (3.8)$$

$$\tilde{h}_B = \frac{T_s}{k_T} \left[ \left( \frac{\tilde{p}_b}{p_s} \right)^{-\left(\frac{R_g k_T}{g_0}\right)} - 1 \right] + h_s \quad (3.9)$$

onde  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$  é a densidade do ar padrão e  $v_v$  é a velocidade do vento.

A diferença entre a altitude corrompida pelo vento e a altitude real representa o erro de distúrbios externos, conforme:

$$\varepsilon_e = \frac{T_s}{k_T} \left[ \left( \frac{\tilde{p}_b}{p_s} \right)^{-\left(\frac{R_g k_T}{g_0}\right)} - \left( \frac{\tilde{p}_b - \frac{1}{2}\rho v_v^2}{p_s} \right)^{-\left(\frac{R_g k_T}{g_0}\right)} \right] \quad (3.10)$$

Dessa forma, o valor da altitude medida pelo barômetro pode ser globalmente modelada como:

$$\tilde{h}_B = h_B + \varepsilon_p + \varepsilon_d + \varepsilon_e + w_b \quad (3.11)$$

onde  $w_b$  representa um ruído aleatório Gaussiano e branco.

#### 4 ESTRATÉGIAS DE ESTABILIZAÇÃO DO CANAL VERTICAL

Como visto no Capítulo 2, em sistemas de navegação inercial puros, utilizando três acelerômetros, a velocidade e posição verticais (altitude) são, geralmente, obtidas pela integração da saída do acelerômetro do canal vertical, e possuem solução instável. O motivo desta instabilidade foi introduzido no Capítulo 2, e mais detalhadamente examinado por Savage (2007). O autor analisou a mecanização do canal vertical para aplicações superiores a 10 minutos, isto é, aplicações onde o erro de posição vertical gerado por um sistema de navegação inercial puro (devido principalmente ao efeito integrado dos erros dos acelerômetros) normalmente excede os requisitos de precisão do sistema.

Como já analisado, para operação em altitudes positivas (acima do nível do mar), o erro de posição vertical inercialmente calculado é amplificado devido à característica de erro divergente que cresce exponencialmente com o tempo. Um erro de altitude positivo, por exemplo, produzirá um valor de gravidade menor do que o real (isto é, um erro de gravidade negativo), que diminui a aceleração total para baixo, aumentando, assim, a aceleração vertical para cima. Dessa forma, a aceleração vertical ascendente, amplificada, gera uma velocidade positiva que, por sua vez, gera um erro de altitude positivo ainda maior. Esse efeito aumenta exponencialmente com o tempo.

Kayton e Fried (1997) explicam que essa instabilidade existirá, mesmo que a componente vertical da gravidade seja cuidadosamente calculada como uma função da altitude computada. Devido aos grandes erros em altitude fornecidos por INS puros, recorre-se frequentemente ao uso de entradas externas para se atualizar as informações de posição vertical. Essa correção pode ser feita utilizando uma referência de altitude externa, de forma a estabilizar o canal vertical do INS. Barômetros são sensores bastante utilizados para restringir o crescimento de erros no canal vertical de INS, pois são complementares, em natureza, a estes. Titterton e Weston (2004) afirmam que um altímetro barométrico fornece uma medida indireta da altitude ortométrica, normalmente com uma precisão superior a 99,99%. De acordo com Kayton e Fried (1997), um altímetro barométrico é estável por períodos longos de tempo, mas sofre com ruídos na saída e um atraso de tempo grande, impossibilitando leituras instantâneas de altitude ou de sua variação. Por outro lado, o INS tem sua exatidão degradada com o tempo, mas fornece informações diretas da aceleração vertical, com boa precisão no curto prazo. Dessa forma, os autores concluem que a melhor maneira de se obter uma solução estável para o canal vertical é a combinação "baro-inercial", a qual combina as altitudes dos dois sensores e usa a diferença

entre as medições, multiplicada por ganhos adequados, para realimentar uma malha de controle de altitude e velocidade vertical.

Em resumo, a fusão/integração do barômetro com o INS, realimentada por meio de ganhos adequados, resulta nos seguintes benefícios:

1. Estabilidade no longo prazo (proveniente do altímetro barométrico);
2. Resposta em frequência mais rápida que o altímetro barométrico puro e com ruídos atenuados;
3. Insensibilidade aos erros de baixa frequência (proveniente dos acelerômetros).

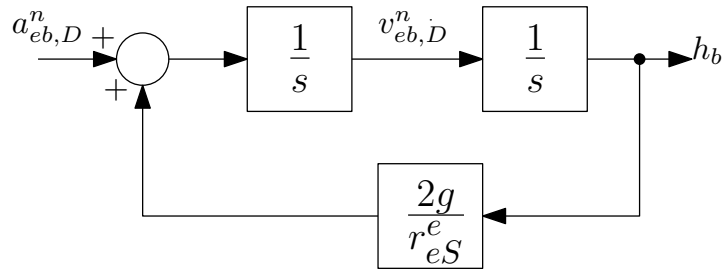
Este capítulo inicia a discussão apresentando o diagrama simplificado do canal vertical de um INS puro. Em seguida, são discutidas as mecanizações de segunda e terceira ordem sintonizadas empiricamente por alguns autores. Estratégias de sintonia das mecanizações de segunda e terceira ordem via LQR, incluindo suas equações em espaço de estados, também são fornecidas neste capítulo. O capítulo finaliza apresentando as funções-custo de cada índices de desempenho usado para fins de sintonia das mecanizações baro-inercial investigadas.

#### 4.1 Canal Vertical

De acordo com Siouris (1993), o objetivo da estabilização do canal vertical é minimizar os erros de velocidade vertical e de altitude do INS e obter um tempo satisfatório de resposta do sistema aos distúrbios. Segundo o autor, um modelo simplificado do canal vertical de um INS recebe, como entrada, acelerações da unidade de medição inercial, e gera como saída, velocidade e altitude via duas integrações numéricas. Ressalta-se que a aceleração vertical supracitada,  $a_{eb,D}^n$ , é composta pela aceleração devida à gravidade, a soma da força específica medida pelos acelerômetros, da aceleração centrífuga devido à rotação da Terra e à taxa de transporte. Siouris (1993) explica que o componente vertical de um INS puro é inerentemente instável devido à necessidade de compensação da gravidade, sendo esta a causa da instabilidade. Na Figura 4.1 está representado o modelo de erro simplificado do canal vertical de um INS, onde a realimentação positiva é o efeito desestabilizador do canal vertical. Na Figura 4.1, o termo  $2g/r_{eS}^e$  representa a correção da gravidade e  $s$  é a variável de Laplace.

Equacionando-se o diagrama apresentado na Figura 4.1, nota-se que é gerada uma Função de Transferência (FT) com polos com parte real positiva, produzindo uma resposta temporal

Figura 4.1 – Diagrama simplificado do modelo de erro do canal vertical de um INS.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

oscilatória, a saber:

$$\frac{h_b(s)}{a_{eb,D}^n(s)} = \frac{1}{s^2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}} \quad (4.1)$$

## 4.2 Integrações Baro-Inercial

Siouris (1993) estudou diferentes técnicas de integração baro-inercial para estabilização do canal vertical, baseadas em malhas de controle, também referidas como "mecanizações". Devido às limitações computacionais da época, foi dada preferência às mecanizações que resultavam em funções de transferência em malha fechada com um ou dois polos, ditas de primeira e segunda ordem, respectivamente. O autor, contudo, cita algumas vantagens de se utilizar mecanizações de terceira ordem:

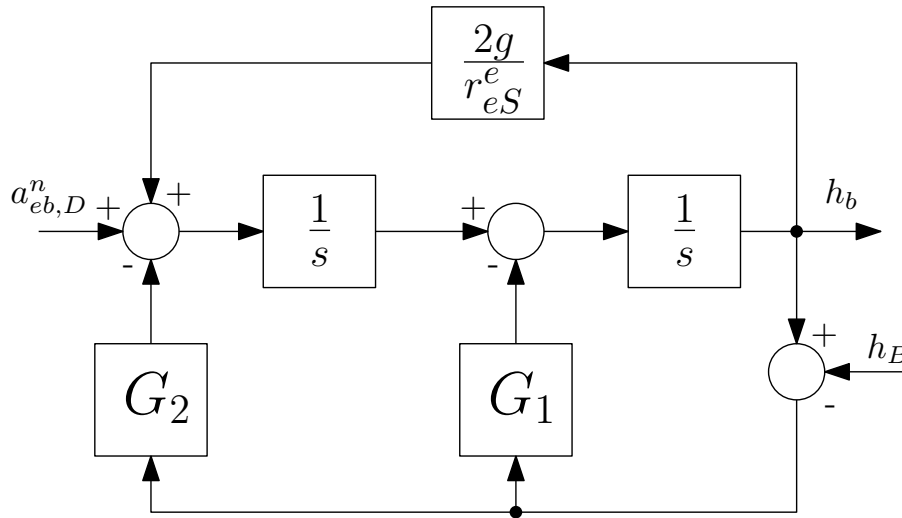
1. Reduzem os erros originados do *bias* do acelerômetro (ou de outras fontes).
2. Fornecem melhores características de resposta.

### 4.2.1 Mecanização de Segunda Ordem

Siouris (1993) analisou primeiramente uma mecanização do canal vertical de segunda ordem, usando um altímetro barométrico para gerar o sinal de erro da altitude. Este erro é realimentado na entrada dos integradores da velocidade vertical e da altitude, sendo a saída integrada (altitude) utilizada no cálculo da gravidade. Na Figura 4.2 está ilustrada a mecanização do canal vertical.

Com base na Figura 4.2, nota-se que o sistema possui duas entradas e uma saída, caracterizando, portanto, um sistema com Múltiplas Entradas e Uma Saída (do inglês *Multiple Input Single Output*, MISO). As entradas são a aceleração vertical ( $a_{eb,D}^n$ ) e a altitude barométrica

Figura 4.2 – Mecanização do canal vertical de segunda ordem com *loop* amortecido.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

( $h_B$ ), e a saída é a solução da altitude estabilizada ( $h_b$ ). Dessa forma, é possível mapear a saída do sistema em função de cada entrada, de acordo com as seguintes FT:

$$\frac{h_{b_2}(s)}{a_{eb,D}^n(s)} = \frac{1}{s^2 + G_1s + \left(G_2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}\right)} \quad (4.2)$$

$$\frac{h_{b_2}(s)}{h_B(s)} = \frac{G_1s + G_2}{s^2 + G_1s + \left(G_2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}\right)} \quad (4.3)$$

onde o subscrito 2 em  $h_b$  faz referência à mecanização de segunda ordem, e  $G_1$  e  $G_2$  são dois ganhos de realimentação.

Pelo teorema do valor final aplicado à Equação (4.2), observa-se que, caso  $G_2$  tenha valor igual a  $1 + 2g/r_{eS}^e$ , a FT não apresentará erro em regime permanente. Já, para a Equação (4.3), independentemente do valor escolhido para o ganho  $G_2$ , a FT sempre apresentará erro em regime permanente.

A partir das Equações (4.2) e (4.3), pode-se obter a equação característica da mecanização de segunda ordem, expressa no domínio de Laplace como:

$$s^2 + G_1s + \left(G_2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}\right) = 0 \quad (4.4)$$

Para que as FTs representadas pelas Equações (4.2) e (4.3) sejam estáveis em malha fechada, os seus polos devem estar no semiplano esquerdo do plano complexo, isto é, ter parte

real negativa. Para que isso seja garantido, um dos métodos passíveis de utilização é o de Routh-Hurwitz (OGATA, 2010) (NISE, 2010). Uma solução possível para se obter uma resposta estável da equação característica (4.4) consiste em fazer o ganho  $G_1$  positivo e  $G_2$  maior que  $2g/r_{eS}^e$ . Dessa forma, os coeficientes da Equação (4.4) serão positivos, garantindo outra condição necessária para a estabilidade desse sistema. Além disso, para que a malha tenha dois polos reais, Widnall e Sinha (1980) e Siouris (1993) fazem a seguinte escolha dos ganhos:

$$G_{1_{2s}} = \frac{2}{\tau} \quad G_{2_{2s}} = \frac{2g}{r_{eS}^e} + \frac{1}{\tau^2} \quad (4.5)$$

onde  $\tau$  é a constante de tempo do sistema e o subscrito  $s$  faz referência a Siouris (1993).

Siouris (1993) considera ainda que a constante de tempo  $\tau$  é determinada a partir de especificações e/ou requisitos do sistema, sendo utilizado, em muitas aplicações,  $\tau = 100s$ . Segundo o autor, um problema de desempenho significativo da malha de segunda ordem é que um erro de aceleração vertical estável (*bias* do acelerômetro, por exemplo) causa um erro de velocidade vertical em regime permanente. Além disso, Siouris (1993) explica que, como o barômetro possui uma resposta dinâmica tipicamente mais lenta, a realimentação por meio de  $G_1$  pode resultar em um grande erro no caso de mudança rápida de altitude. Assim, o primeiro integrador age como um filtro para esse tipo de situação.

Titterton e Weston (2004) propõem uma análise da mecanização do canal vertical de segunda ordem bastante similar à apresentada por Siouris (1993). Sua mecanização também é descrita pela Figura 4.2 e as funções de transferência, portanto, são as mesmas das Equações (4.2) e (4.3). A diferença se dá, basicamente, na escolha dos ganhos, sendo os escolhidos por Titterton e Weston (2004), os seguintes:

$$G_{1_{2t}} = \frac{2}{\tau} \quad G_{2_{2t}} = \frac{1}{\tau^2} \quad (4.6)$$

onde o subscrito  $t$  faz referência a Titterton e Weston (2004).

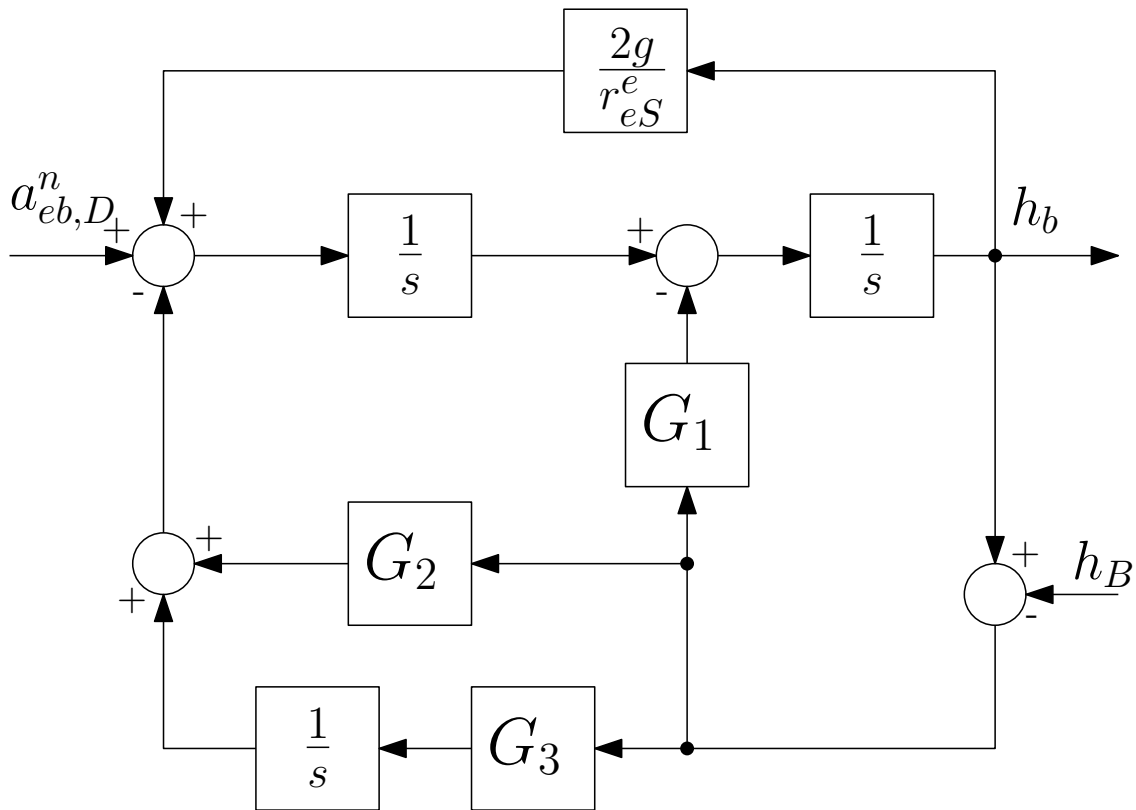
Titterton e Weston (2004) sugerem tal sintonia dos ganhos de forma a permitir que o sistema baro-inercial siga as variações de longo prazo nas medições barométricas, enquanto filtra quaisquer flutuações de frequência mais alta. Stieler e Winter (1982) fazem a mesma escolha dos ganhos que Titterton e Weston (2004), considerando, contudo, o valor de  $\tau = 30s$ . A principal limitação dessa escolha, segundo Titterton e Weston (2004), é que quaisquer erros (no

longo prazo) no altímetro barométrico, resultantes das condições meteorológicas e da posição do veículo, persistem no sistema integrado.

#### 4.2.2 Mecanização de Terceira Ordem com Três Ganhos

Em seu trabalho, Siouris (1993) também propõe uma mecanização de terceira ordem para a estabilização do canal vertical, isto é, uma mecanização que resulta em uma FT em malha fechada com três polos. Sua implementação, mencionada na primeira seção deste capítulo, está representada na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem com *loop* amortecido.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

Segundo Savage (2007), uma característica importante e inerente à estrutura da Figura 4.3 é que ela somente opera nos erros verticais da velocidade e posição (isto é, altitude). O autor ainda explica que, em algumas implementações, a altitude inercial  $h_b$  é filtrada para corresponder às características dinâmicas do sinal de entrada  $h_B$ . A mecanização de terceira ordem, assim como a de segunda ordem, é um sistema MISO e suas funções de transferência são:

$$\frac{h_{b3}(s)}{a_{eb,D}^n(s)} = \frac{s}{s^3 + G_1 s^2 + \left(G_2 - \frac{2g}{r_e^e}\right) s + G_3} \quad (4.7)$$



$$\frac{h_{b_3}(s)}{h_B(s)} = \frac{G_1 s^2 + G_2 s + G_3}{s^3 + G_1 s^2 + \left(G_2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}\right) s + G_3} \quad (4.8)$$

onde o subscrito 3 em  $h_b$  faz referência à mecanização de terceira ordem e  $G_3$  é um ganho de realimentação adicional.

Comparando-se as Equações (4.2) e (4.7), nota-se que a ação derivativa no numerador em (4.7), torna o erro em regime permanente única e exclusivamente função de  $G_3$ . Já ao analisar as Equações (4.3) e (4.8), observa-se que a FT em (4.8) sempre apresentará erro em regime permanente nulo, independentemente dos valores dos ganhos. Contudo, a escolha de  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  para a definição dos polos deve ser cuidadosa, uma vez que ela também interfere na posição dos zeros, podendo gerar um sistema com fase não-mínima.

A equação característica da mecanização de terceira ordem, expressa no domínio de Laplace e relacionada às Equações (4.7) e (4.8) é:

$$s^3 + G_1 s^2 + \left(G_2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}\right) s + G_3 = 0 \quad (4.9)$$

De acordo com Savage (2007), as características dinâmicas adequadas para a estabilização das Equações (4.7) e (4.8) são tipicamente projetadas usando a teoria de controle clássico via alocação de polos. Autores como Nise (2010) e Ogata (2010) apresentam abordagens de algumas dessas teorias de controle. Estas equações representam a característica da resposta dinâmica da altitude em malha fechada para as duas entradas individualmente, a saber, aceleração vertical e altitude barométrica. Savage (2007) propõe uma parametrização da equação característica (4.9) que possui uma raiz real e um par de raízes complexas conjugadas, semelhante a Rogers (2003), a saber:

$$s^3 + \left(\frac{1}{\tau} + 2\zeta\omega_n\right) s^2 + \left(\frac{2\zeta\omega_n}{\tau} + \omega_n^2\right) s + \frac{\omega_n^2}{\tau} = 0 \quad (4.10)$$

onde  $\tau$  é a constante de tempo da raiz real,  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega_n$  é a frequência natural para o par de raízes complexas.

Dessa forma, os valores dos ganhos assumem a forma:

$$G_{1_{3v}} = \frac{1}{\tau} + 2\zeta\omega_n \quad G_{2_{3v}} = \frac{2\zeta\omega_n}{\tau} + \omega_n^2 \quad G_{3_{3v}} = \frac{\omega_n^2}{\tau} \quad (4.11)$$

onde o subscrito  $v$  faz referência a Savage (2007).

Savage (2007) ainda explica que a magnitude dos ganhos de controle  $G_{1_{3v}}$ ,  $G_{2_{3v}}$  e  $G_{3_{3v}}$ , que são especificados a partir das escolhas de  $\zeta$ ,  $\omega_n$  e  $\tau$ , deve ser grande o suficiente para atenuar os erros esperados dos acelerômetros. Porém, a magnitude deve ser abaixo de um certo limiar, de forma a evitar a introdução de erros de alta frequência de  $h_B$  na velocidade/altitude integradas. O autor sugere os seguintes valores para  $G_{1_{3v}}$ ,  $G_{2_{3v}}$  e  $G_{3_{3v}}$ :

$$G_{1_{3v}} = 0,3 \text{ s}^{-1} \quad G_{2_{3v}} = 0,03 \text{ s}^{-2} \quad G_{3_{3v}} = 0,001 \text{ s}^{-3} \quad (4.12)$$

os quais resultam nos seguintes valores para a constante de tempo, coeficiente de amortecimento e frequência natural de ressonância:

$$\tau = 10 \text{ s} \quad \zeta = 1 \quad \omega_n = 0,10 \text{ rad/s} \quad (4.13)$$

No trabalho de Rogers (2003), uma mecanização do canal vertical semelhante a de Savage (2007) é implementada, via uma malha de controle com realimentação proporcional/integral/derivativa da diferença entre as altitudes do INS e a barométrica. De acordo com o autor, a realimentação integral é a principal responsável por eliminar o erro em estado estacionário na altitude integrada. Rogers (2003) ainda explica que as raízes da Equação (4.9) podem ser especificadas para se ter uma raiz real e um par complexo, de forma que a parte real do par complexo possua a mesma magnitude da parte imaginária e da raiz real. De acordo com o autor, o par complexo é especificado de forma a se obter um coeficiente de amortecimento de  $\zeta = 0,707$ , valor este que equivale a aproximadamente dois terços ( $2/3$ ) do especificado por Savage (2007). A parametrização da equação característica da mecanização de terceira ordem proposta por Rogers (2003) é tal que:

$$s^3 + \left(\frac{3}{\tau}\right)s^2 + \left(\frac{4}{\tau^2}\right)s + \left(\frac{2}{\tau^3}\right) = 0 \quad (4.14)$$

Por comparação com a Equação (4.14), os valores dos ganhos são:

$$G_{1_{3r}} = \frac{3}{\tau} \quad G_{2_{3r}} = \frac{4}{\tau^2} + \frac{2g}{r_{eS}^e} \quad G_{3_{3r}} = \frac{2}{\tau^3} \quad (4.15)$$

onde o subscrito  $r$  faz referência a Rogers (2003).

Já no trabalho de Bekir (2007), o autor analisa a mecanização do canal vertical de terceira ordem proposto por Siouris (1993), já mostrada na Figura 4.3, e cujas funções de transferência são apresentadas nas Equações (4.7) e (4.8). Os ganhos propostos por Bekir (2007) são:

$$G_{1_{3b}} = \frac{3}{\tau} \quad G_{2_{3b}} = \frac{3}{\tau^2} + \frac{2g}{r_e^e s} \quad G_{3_{3b}} = \frac{1}{\tau^3} \quad (4.16)$$

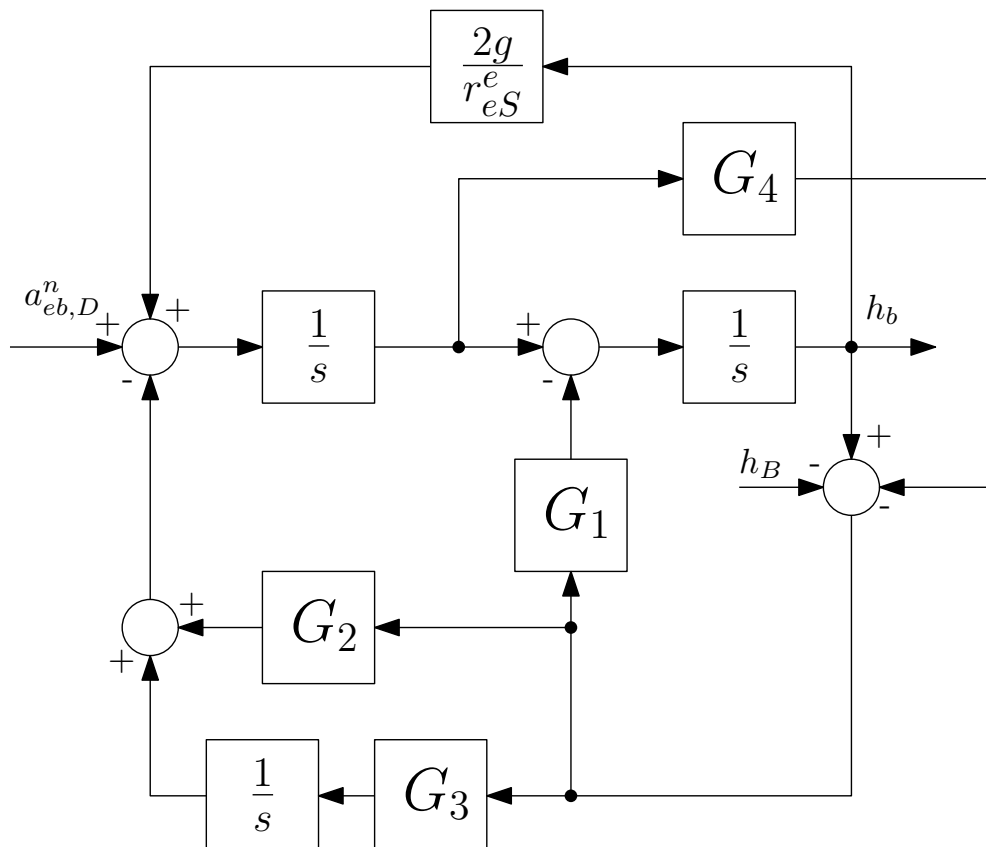
onde o subscrito  $b$  faz referência a Bekir (2007).

Com esses valores de ganhos, Bekir (2007) afirma que as raízes da equação característica são iguais e negativas, garantindo a estabilidade numérica e o amortecimento crítico do canal vertical. Além disso, Bekir (2007) sugere o uso de uma constante de tempo de  $\tau = 200s$ .

### 4.2.3 Mecanização de Terceira Ordem com Quatro Ganhos

Na Figura 4.4 está ilustrada uma mecanização do canal vertical de terceira ordem alternativa para a integração do barômetro com o INS, conforme proposto por Blanchard (1971) e Widnall e Sinha (1980).

Figura 4.4 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem com *loop* amortecido e quatro ganhos.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

Como pode ser inferido da Figura 4.4, os valores de altitude fornecidos pelo barômetro e pelo INS são combinados pela mescla baro-inercial que pondera informações barométricas a baixas velocidades verticais e informações inerciais a altas taxas verticais de velocidade. De acordo com Siouris (1993), essas compensações são somadas continuamente para fornecer uma altitude integrada. A realimentação positiva por meio de  $2g/r_{eS}^e$  é executada intrinsecamente durante a operação do INS, resultando no já discutido comportamento divergente do canal vertical. As realimentações por meio de  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ , por outro lado, amortecem e controlam esta instabilidade usando o sinal de erro em altitude. O termo adicional por meio de  $G_4$  compensa o atraso do altímetro. Para Blanchard (1971), valores típicos para  $G_4$  variam entre 0,5 s e 0,8 s. Essa mecanização de terceira ordem proposta por Siouris (1993) também corresponde a um sistema MISO, cujas funções de transferência são:

$$\frac{h_{b_4}(s)}{a_{eb,D}^n(s)} = \frac{(1 + G_1 G_4)s}{s^3 + (G_1 - G_2 G_4)s^2 + \left[ G_2 - \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} \right) (1 + G_1 G_4) - G_3 G_4 \right] s + G_3} \quad (4.17)$$

$$\frac{h_{b_4}(s)}{h_B(s)} = \frac{G_1 s^2 + G_2 s + G_3}{s^3 + (G_1 - G_2 G_4)s^2 + \left[ G_2 - \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} \right) (1 + G_1 G_4) - G_3 G_4 \right] s + G_3} \quad (4.18)$$

onde o subscrito 4 faz referência à mecanização de terceira ordem com quatro ganhos.

Comparando as Equações (4.7) e (4.17), nota-se que a ação derivativa também está presente na FT de (4.17), tornando o erro em regime permanente função única e exclusivamente de  $G_3$ . Já ao analisar a Equação (4.18), nota-se que essa FT sempre apresentará erro em regime permanente nulo, independentemente dos valores dos ganhos  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$ . Além disso, a FT ganha um grau de liberdade na sintonia dos polos e zeros, uma vez que o ganho  $G_4$  passar a ter efeito somente na localização dos polos.

A partir das Equações (4.17) e (4.18) pode-se obter a equação característica da mecanização supracitada, expressa a seguir, no domínio de Laplace:

$$s^3 + (G_1 - G_2 G_4)s^2 + \left[ G_2 - \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} \right) (1 + G_1 G_4) - G_3 G_4 \right] s + G_3 = 0 \quad (4.19)$$

No que diz respeito à mecanização de terceira ordem com quatro ganhos, Siouris (1993) sugere que a malha seja sintonizada de modo a possuir três polos na frequência complexa  $s = -\frac{1}{\tau}$ , onde  $\tau$  é escolhido entre 100 e 200 s. Os valores dos ganhos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  que garantem

esses polos ao sistema em malha fechada são:

$$\begin{aligned}
 G_{1_{4s}} &= \frac{\left(\frac{2g}{r_{eS}^e}\right) G_4 \tau^3 + 3\tau^2 + 3G_4 \tau + G_4^2}{\left[1 - \left(\frac{2g}{r_{eS}^e}\right) G_4^2\right] \tau^3} \\
 G_{2_{4s}} &= \frac{\left(\frac{2g}{r_{eS}^e}\right) (\tau^3 + 3G_4 \tau^2) + 3\tau + G_4}{\left[1 - \left(\frac{2g}{r_{eS}^e}\right) G_4^2\right] \tau^3} \\
 G_{3_{4s}} &= \frac{1}{\tau^3}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Siouris (1993) afirma que a mecanização de terceira ordem do canal vertical com quatro ganhos melhora significativamente o desempenho do sistema. O autor adiciona que, este método, quando adequadamente projetado, reduz os erros originados pelo *bias* do acelerômetro (ou de outras fontes) e fornece um tempo de resposta mais apropriado. Siouris (1993) ainda argumenta que esta mecanização é preferível por otimizar o compromisso entre o desempenho da solução integrada e a complexidade matemática. De acordo com o autor, contudo, algumas características devem ser consideradas no projeto da mecanização do canal vertical de terceira ordem:

1. Um conjunto ideal de ganhos deve ser encontrado para minimizar a perturbação do sistema, sob um tempo de resposta apropriado.
2. A altitude barométrica de referência deve incluir:
  - Modelo de atmosfera não padrão;
  - Correção do efeito de gradiente da pressão horizontal (vento);
  - Tempo de retardamento dos sensores de temperatura e pressão como funções da altitude.
3. Para se obter o melhor desempenho e precisão nas saídas de velocidade vertical e de altitude, o uso de sistemas de navegação inercial estáveis e precisos é fundamental.

### 4.3 Controle Ótimo

De acordo com Kirk (2004), o controle clássico projeta sistemas de controle em que parâmetros são definidos visando fornecer desempenho aceitável a alguns critérios no domínio

do tempo e frequência, como tempo de subida, tempo de acomodação, máxima ultrapassagem, margem de ganho e fase e largura de banda. No entanto, o controle clássico não aborda sistemas complexos de múltiplas entradas e múltiplas saídas. A teoria do controle ótimo foi desenvolvida para solucionar esses sistemas complexos e se tornou viável com o desenvolvimento do computador digital.

O objetivo da teoria do controle ótimo é determinar os sinais de controle que irão satisfazer as restrições físicas do processo de interesse e, ao mesmo tempo, minimizar (ou maximizar) algum critério de desempenho. As técnicas de controle ótimo que são abordadas neste trabalho e cujas utilizações para fins de estabilização do canal vertical em integrações baro-inerciais figuram como principal contribuição são: a) o Regulador Quadrático Linear (do inglês *Linear Quadratic Regulator*, ou LQR); e b) a sintonia via índices de desempenho. Para projetar sistemas de controle ótimo, é necessário equacioná-los em equações em espaço de estados, como será apresentado nas próximas seções.

### 4.3.1 LQR

O LQR é um dos reguladores mais comumente usados em controle ótimo. Como ilustrado na Figura 4.5, a equação em espaço estados do sistema a ser controlado via LQR deve ter a forma:

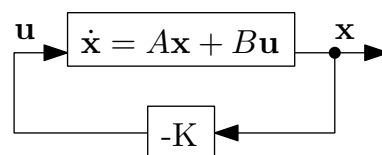
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  é o vetor de estados,  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor das entradas de controle,  $A$  é a matriz dinâmica do processo e  $B$  a matriz de acoplamento das entradas de controle.

O sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  é definido como uma realimentação (ou retroação) dos estados  $\mathbf{x}(t)$  via matriz de ganhos  $K$ :

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t) \quad (4.22)$$

Figura 4.5 – Diagrama de blocos do regulador ótimo.



Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

O objetivo do controlador LQR é minimizar a seguinte função-custo:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são matrizes positivas semi-definidas de ponderação dos estados e entradas, respectivamente.

### 4.3.2 Canal Vertical em Espaço de Estados

Seja, inicialmente, a mecanização do canal vertical de um INS puro, cuja representação em diagrama de blocos é mostrada na Figura 4.1. A Função de Transferência (FT) dessa mecanização é:

$$h_b(s) = \left( \frac{1}{s^2 - \frac{2g}{r_{eS}^e}} \right) a_{eb,D}^n(s) \quad \Rightarrow \quad s^2 h_b(s) - \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} \right) h_b(s) = a_{eb,D}^n(s) \quad (4.24)$$

cuja representação no domínio do tempo é:

$$\ddot{h}_b(t) - \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} \right) h_b(t) = a_{eb,D}^n(t) \quad (4.25)$$

Uma representação em espaço estados adequada para (4.25) é:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_b(t) \\ \ddot{h}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{r_{eS}^e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \dot{h}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_{eb,D}^n(t) \quad (4.26)$$

Da Figura 4.1, nota-se que:

$$h_b(s) = \frac{1}{s} v_{eb,D}^n(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_b(t) = v_{eb,D}^n(t)$$

Portanto, (4.26) pode ser reescrito:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_b(t) \\ v_{eb,D}^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{r_{eS}^e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ v_{eb,D}^n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_{eb,D}^n(t) \quad (4.27)$$

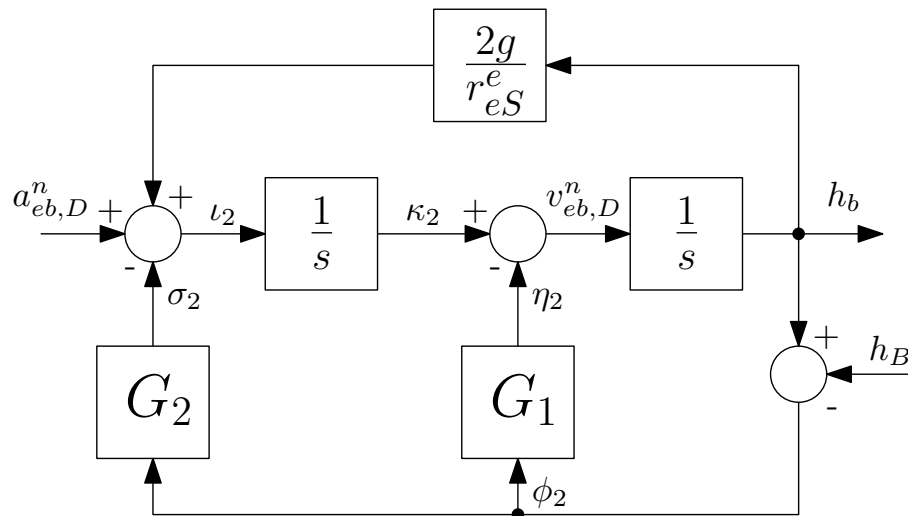
$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{C}_1 r_1(t)$$

onde o subscrito 1 faz referência à mecanização do canal vertical de um INS puro,  $r(t)$  é a entrada de referência da mecanização, e  $C$  é a matriz de acoplamento da entrada de referência.

### 4.3.3 Mecanização de Segunda Ordem via LQR

A primeira mecanização do canal vertical cuja estabilização se deseja investigar via LQR é a de segunda ordem, como mostrado na Figura 4.6. Desta Figura, tem-se:

Figura 4.6 – Mecanização do canal vertical de segunda ordem via LQR.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

$$\phi_2(s) = h_b(s) - h_B(s) \quad (4.28)$$

$$\eta_2(s) = G_1 \phi_2(s) \quad (4.29)$$

$$\sigma_2(s) = G_2 \phi_2(s) \quad (4.30)$$

$$l_2(s) = \frac{2g}{r_{eS}} h_b(s) + a^n_{eb,D}(s) - \sigma_2(s) \quad (4.31)$$

$$\kappa_2(s) = \frac{1}{s} l_2(s) \quad (4.32)$$

$$v^n_{eb,D}(s) = \kappa_2(s) - \eta_2(s) \quad (4.33)$$

$$h_b(s) = \frac{1}{s} v^n_{eb,D}(s) \quad (4.34)$$



Rearranjando as equações do diagrama da Figura 4.6:

$$\begin{aligned} \iota_2(s) &= \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} \right) h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) - G_2[h_b(s) - h_B(s)] \\ \kappa_2(s) &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{2g}{r_{eS}^e} h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) - G_2[h_b(s) - h_B(s)] \right\} \\ \eta_2(s) &= G_1[h_b(s) - h_B(s)] \\ v_{eb,D}^n(s) &= \frac{1}{s} \left[ \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} - G_2 \right) h_b(s) + G_2 h_B(s) + a_{eb,D}^n(s) \right] - G_1[h_b(s) - h_B(s)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Comparado à  $G_2$  (vide, por exemplo, valor típico em (4.12)),  $2g/r_{eS}^e$  é um valor muito pequeno,

$$\frac{2g}{r_{eS}^e} \approx 3,00 \times 10^{-6} s^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2g}{r_{eS}^e} - G_2 \approx -G_2$$

Aproximações como essa também são realizadas por Savage (2007) e Titterton e Weston (2004). Portanto, tem-se:

$$v_{eb,D}^n(s) = \frac{1}{s} \left[ -G_2 h_b(s) + G_2 h_B(s) + a_{eb,D}^n(s) \right] - G_1[h_b(s) - h_B(s)] \quad (4.36)$$

$$v_{eb,D}^n(s) = -G_2 \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] - G_1[h_b(s) - h_B(s)] + \frac{1}{s} a_{eb,D}^n(s) \quad (4.37)$$

Fazendo:

$$\chi_2(s) = \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] \quad (4.38)$$

$$A_D(s) = \frac{1}{s} a_{eb,D}^n(s) \quad (4.39)$$

então:

$$v_{eb,D}^n(s) = -G_1 [h_b(s) - h_B(s)] - G_2 \chi_2(s) + A_D(s) \quad (4.40)$$

Convertendo (4.34) e (4.38), para o domínio do tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{h}_b(t) &= v_{eb,D}^n(t) \\ \dot{\chi}_2(t) &= h_b(t) - h_B(t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Uma implementação em espaço estados adequada para a mecanização de segunda ordem do canal vertical, ilustrada na Figura 4.6, é então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h}_b(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_{eb,D}^n(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B(t) \\ A_D(t) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= A_2 \mathbf{x}_2(t) + B_2 u(t) + C_2 \mathbf{r}_2(t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde o subscrito 2 faz referência à mecanização do canal vertical de segunda ordem.

Da relação (4.40), é evidente que:

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(t) &= - \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B(t) \\ A_D(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= - K_2 \mathbf{x}_2(t) + D_2 \mathbf{r}_2(t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde  $D$  representa a matriz de acoplamento das entradas de controle com as de referência e  $K_2$  corresponde aos ganhos de realimentação:

$$G_1 = K_2(1) \quad G_2 = K_2(2) \quad (4.44)$$

Claramente, (4.43) encontra-se no formato requerido para a sintonia LQR. As questões que permanecem são:

1. Os estados estão disponíveis, ou seja, podem ser medidos? A resposta a essa pergunta é positiva, uma vez que  $\chi_2 = f(h_b, h_B)$  e ambos  $h_b$  e  $h_B$  são acessíveis nas saídas dos sensores.
2. O sistema é controlável? A resposta também é positiva, uma vez que a matriz de controlabilidade:

$$M_{c2} = \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

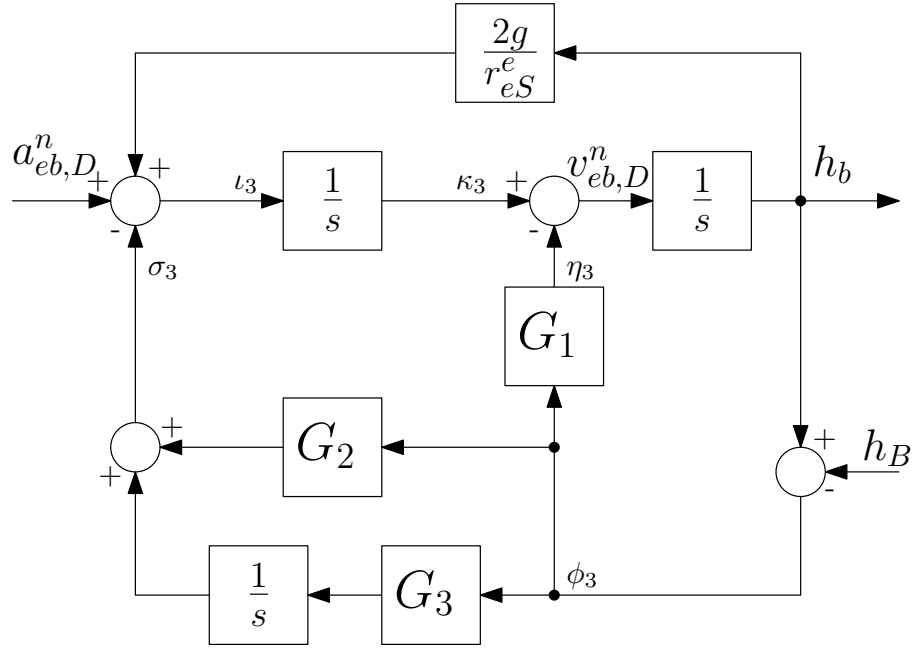
possui posto completo (posto = 2).

Como os dois requisitos citados anteriormente podem ser satisfeitos, um regulador LQR pode ser projetado e, conseqüentemente, usado para estabilizar o sistema (4.42).

#### 4.3.4 Mecanização de Terceira Ordem com Três Ganhos via LQR

A próxima mecanização do canal vertical cuja estabilização se deseja investigar via LQR é a de terceira ordem com três ganhos, como mostrado na Figura 4.7. Dessa figura, verifica-se que:

Figura 4.7 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem via LQR.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

$$\phi_3(s) = h_b(s) - h_B(s) \quad (4.45)$$

$$\eta_3(s) = G_1 \phi_3(s) \quad (4.46)$$

$$\sigma_3(s) = \left( G_2 + \frac{G_3}{s} \right) \phi_3(s) \quad (4.47)$$

$$l_3(s) = \frac{2g}{r_{eS}^e} h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) - \sigma_3(s) \quad (4.48)$$

$$\kappa_3(s) = \frac{1}{s} l_3(s) \quad (4.49)$$

Consequentemente:

$$v_{eb,D}^n(s) = \frac{1}{s} \left\{ \left( \frac{2g}{r_{eS}^e} - G_2 \right) h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) + G_2 h_B(s) - G_3 \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] \right\} - G_1 [h_b(s) - h_B(s)] \quad (4.50)$$

Desprezando-se  $2g/r_{eS}^e$  (como feito anteriormente):

$$v_{eb,D}^n(s) = -G_2 \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] - G_3 \frac{1}{s^2} [h_b(s) - h_B(s)] + \frac{1}{s} a_{eb,D}^n(s) - G_1 [h_b(s) - h_B(s)] \quad (4.51)$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} A_D(s) &= \frac{1}{s} a_{eb,D}^n(s) \\ \chi_3(s) &= \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] \\ \zeta_3(s) &= \frac{1}{s^2} [h_b(s) - h_B(s)] \quad \Rightarrow \quad \zeta_3(s) = \frac{1}{s} \chi_3(s) \end{aligned}$$

Disso:

$$v_{eb,D}^n(s) = -G_1 h_b(s) - G_2 \chi_3(s) - G_3 \zeta_3(s) + G_1 h_B(s) + A_D(s) \quad (4.52)$$

De desenvolvimentos anteriores:

$$\begin{aligned} h_b(s) &= \frac{1}{s} v_{eb,D}^n(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{h}_b(t) = v_{eb,D}^n(t) \\ \dot{\chi}_3(t) &= h_b(t) - h_B(t) \\ \dot{\zeta}_3(t) &= \chi_3(t) \end{aligned}$$

Logo, uma representação adequada em espaço estado para a mecanização do canal vertical de terceira ordem, ilustrada na Figura 4.7, é:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h}_b(t) \\ \dot{\chi}_3(t) \\ \dot{\zeta}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \chi_3(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{eb,D}^n(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B(t) \\ A_D(t) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t) &= \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3(t) + \mathbf{B}_3 u(t) + \mathbf{C}_3 \mathbf{r}_3(t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

com:

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(t) &= - \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \chi_3(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B(t) \\ A_D(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= - \mathbf{K}_3 \mathbf{x}_3(t) + \mathbf{D}_3 \mathbf{r}_3(t) \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde o subscrito 3 faz referência à mecanização vertical de terceira ordem com três ganhos e  $K_3$  corresponde aos ganhos de realimentação:

$$G_1 = K_3(1) \quad G_2 = K_3(2) \quad G_3 = K_3(3) \quad (4.55)$$

De (4.53) e (4.54), nota-se, por inspeção, que a lei de controle por retroação de estados está no formato requerido para a alocação de polos via LQR e que:

1. Os estados estão todos disponíveis (mensuráveis);
2. O sistema é controlável, uma vez que:

$$M_{c3} = \begin{bmatrix} B_3 & A_3 B_3 & A_3^2 B_3 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{c3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possui posto completo (posto = 3).

Como os dois requisitos listados anteriormente podem ser satisfeitos, um regulador LQR pode ser projetado e, conseqüentemente, usado para estabilizar o sistema (4.53).

#### 4.3.5 Mecanização de Terceira Ordem com Quatro Ganhos via LQR

Por fim, é analisada a mecanização baro-inercial do canal vertical de terceira ordem com quatro ganhos, como mostrado na Figura 4.8. Dessa Figura, tem-se:

$$\phi_4(s) = h_b(s) - h_B(s) - G_4 \kappa_4(s) \quad (4.56)$$

$$\eta_4(s) = G_1 \phi_4(s) \quad (4.57)$$

$$\sigma_4(s) = \left( G_2 + \frac{1}{s} G_3 \right) \phi_4(s) \quad (4.58)$$

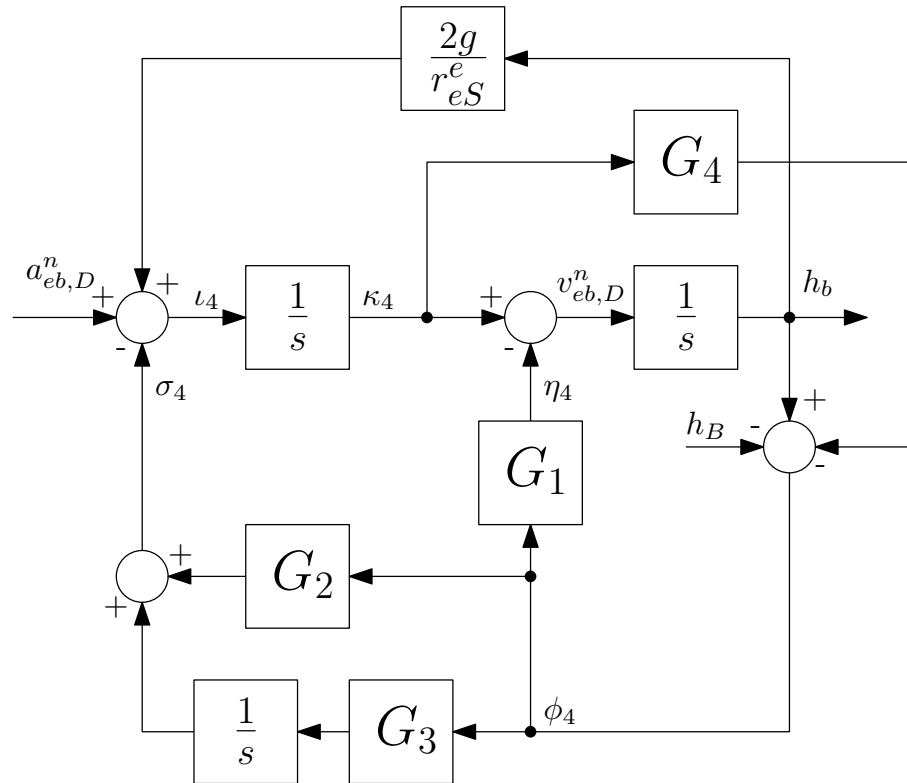
$$l_4(s) = \frac{2g}{r_{eS}^e} h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) - \sigma_4(s) \quad (4.59)$$

$$\kappa_4(s) = \frac{1}{s} l_4(s) \quad (4.60)$$

Reorganizando as equações da Figura 4.8:

$$\phi_4(s) = h_b(s) - h_B(s) - G_4 \frac{1}{s} \left[ \frac{2g}{r_{eS}^e} h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) - \left( G_2 + \frac{1}{s} G_3 \right) \phi_4(s) \right] \quad (4.61)$$

Figura 4.8 – Mecanização do canal vertical de terceira ordem com quatro ganhos via LQR.



Fonte: Adaptado de Siouris (1993).

Também da Figura 4.8:

$$v_{eb,D}^n(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{2g}{r_e^e} h_b(s) + a_{eb,D}^n(s) - \left( G_2 + \frac{1}{s} G_3 \right) \phi_4(s) \right] - G_1 \phi_4(s) \quad (4.62)$$

Substituindo (4.61) em (4.62), e desprezando o efeito de  $\frac{2g}{r_e^e}$  tem-se:

$$v_{eb,D}^n(s) = \frac{-G_3[h_b(s) - h_B(s)] - G_2s[h_b(s) - h_B(s)] - G_1s^2[h_b(s) - h_B(s)] + (1 + G_1G_4)sa_{eb,D}^n(s)}{s^2 - G_2G_4s - G_3G_4} \quad (4.63)$$

Ou alternativamente:

$$\begin{aligned} s^2 v_{eb,D}^n(s) - G_2G_4s v_{eb,D}^n(s) - G_3G_4 v_{eb,D}^n(s) = & -G_3[h_b(s) - h_B(s)] - G_2s[h_b(s) - h_B(s)] \\ & - G_1s^2[h_b(s) - h_B(s)] + (1 + G_1G_4)sa_{eb,D}^n(s) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dividindo (4.64) por  $s^2$ :

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(s) - G_2 G_4 \frac{1}{s} v_{eb,D}^n(s) - G_3 G_4 \frac{1}{s^2} v_{eb,D}^n(s) &= -G_1 [h_b(s) - h_B(s)] \\ &\quad - G_2 \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] - G_3 \frac{1}{s^2} [h_b(s) - h_B(s)] + (1 + G_1 G_4) \frac{1}{s} a_{eb,D}^n \end{aligned} \quad (4.65)$$

De desenvolvimentos anteriores,  $h_b(s) = \frac{1}{s} v_{eb,D}^n(s)$ , conseqüentemente:

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(s) &= -G_1 [h_b(s) - h_B(s)] - G_2 \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] - G_3 \frac{1}{s^2} [h_b(s) - h_B(s)] + G_2 G_4 h_b(s) \\ &\quad + G_3 G_4 \frac{1}{s} h + (1 + G_1 G_4) \frac{1}{s} a_{eb,D}^n(s) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} A_D(s) &= \frac{1}{s} a_{eb,D}^n(s) \\ \chi_4(s) &= \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] \\ \zeta_4(s) &= \frac{1}{s^2} [h_b(s) - h_B(s)] \quad \Rightarrow \quad \zeta_4(s) = \frac{1}{s} \chi_4(s) \end{aligned}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(s) &= -G_1 [h_b(s) - h_B(s)] - G_2 \chi_4(s) - G_3 \zeta_4(s) + G_2 G_4 h_b(s) + G_3 G_4 \frac{1}{s} h_b(s) \\ &\quad + (1 + G_1 G_4) A_D \end{aligned} \quad (4.67)$$

Somando  $[-G_2 G_4 h_B(s) - G_3 G_4 \frac{1}{s} h_B(s)]$  nos dois lados de (4.67):

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(s) - G_2 G_4 h_B(s) - G_3 G_4 \frac{1}{s} h_B(s) &= -G_1 [h_b(s) - h_B(s)] - G_2 \chi_4(s) - G_3 \zeta_4(s) \\ &\quad + G_2 G_4 [h_b(s) - h_B(s)] + G_3 G_4 \frac{1}{s} [h_b(s) - h_B(s)] + (1 + G_1 G_4) A_D \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} v_{eb,D}^n(s) &= (-G_1 + G_2 G_4) [h_b(s) - h_B(s)] + (-G_2 + G_3 G_4) \chi_4(s) - G_3 \zeta_4(s) \\ &\quad + (1 + G_1 G_4) A_D + G_2 G_4 h_B(s) + G_3 G_4 \frac{1}{s} h_B(s) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Definindo, por fim,  $H_B(s) = \frac{1}{s}h_B(s)$ , tem-se:

$$v_{eb,D}^n(s) = (-G_1 + G_2G_4)h_b(s) + (-G_2 + G_3G_4)\chi_4(s) - G_3\zeta_4(s) + G_1h_B(s) \\ + (1 + G_1G_4)A_D + G_3G_4H_B(s) \quad (4.70)$$

Uma representação adequada em espaço de estados para a mecanização do canal vertical de terceira ordem com quatro ganhos, ilustrado na Figura 4.8 é então:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_b(t) \\ \dot{\chi}_4(t) \\ \dot{\zeta}_4(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A_4 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \chi_4(t) \\ \zeta_4(t) \\ \mathbf{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix} v_{eb,D}^n(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_4 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B(t) \\ A_D(t) \\ H_B(t) \\ \mathbf{r}_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

com:

$$v_{eb,D}^n(t) = - \begin{bmatrix} G_1 - G_2G_4 & G_2 - G_3G_4 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_b(t) \\ \chi_4(t) \\ \zeta_4(t) \\ \mathbf{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & 1 + G_1G_4 & G_3G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_B(t) \\ A_D(t) \\ H_B(t) \\ \mathbf{r}_4(t) \end{bmatrix} \\ u(t) = - \quad \quad \quad K_4 \quad \quad \quad \mathbf{x}_4(t) + \quad \quad \quad D_4 \quad \quad \quad \mathbf{r}_4(t) \quad (4.72)$$

Observe que  $\mathbf{x}_4(t)$ ,  $A_4$  e  $B_4$  são iguais a  $\mathbf{x}_3(t)$ ,  $A_3$  e  $B_3$  da equação (4.53), então a alocação de polos via LQR é possível. A única diferença reside na matriz de ganhos ótimos de (4.72), isto é:

$$G_1 = K_4(1) + G_2G_4 \\ G_2 = K_4(2) + G_3G_4 \\ G_3 = K_4(3) \quad (4.73)$$

Pelas equações (4.73), observa-se que somente o ganho  $G_3$  pode ser inequivocamente determinado. A escolha dos ganhos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_4$  é indeterminada, pois existem somente dois ganhos  $K_4$  restantes. Esse resultado já era esperado, uma vez que o sistema (4.71) possui 3 polos (estados ou ainda graus de liberdade) ao passo que o número de ganhos a ser determinado



é 4 (excedendo a ordem do sistema em 1). A solução óbvia é arbitrar um valor para  $G_1$ ,  $G_2$  ou  $G_4$  baseado no qual os ganhos restantes poderão ser computados.

É interessante também observar que, para o caso particular de  $G_4 = 0$ , a equação (4.73) simplifica para (4.55), o que corrobora a análise da Seção 4.3.4.

#### 4.3.6 Índices de Desempenho

A despeito do Regulador Quadrático Linear (LQR), técnicas de controle que se baseiam na minimização de diferentes funções-custo e/ou índices/critérios de desempenho também são consideradas como controle ótimo. Segundo Panoeiro et al. (2012) e Carmo (2006), os índices de desempenho apresentam uma medida quantitativa do desempenho do sistema, a qual acompanha a trajetória da variável controlada em relação ao seu valor de referência, objetivando atingir um valor mínimo ou máximo. A função custo do índice de desempenho resulta em um valor real e positivo, o qual define o quão próximo do ótimo se encontra o sistema. De acordo com Fermino (2014), um índice de desempenho deve claramente distinguir um ajuste ótimo de um não ótimo e, em função dos parâmetros do sistema, possuir pelo menos um ponto ótimo, de máximo ou de mínimo. Neste trabalho, e também figurando como contribuição do mesmo, é investigada a utilização de quatro índices de desempenho para fins de sintonia das mecanizações do canal vertical de integrações baro-inercial. Tais índices, apresentados a seguir, também discutidos e aplicados em trabalhos como os de Ogata (1993), Silva et al. (2019) e Vieira et al. (2020).

O primeiro critério analisado é a Integral do Erro Absoluto (do inglês *Integral Absolute Error*, IAE). De acordo com Fideles (2014), o índice IAE é um dos mais utilizados na prática, empregando como critério de desempenho a integral da magnitude do erro de rastreo. Malhas de controle sintonizadas pelo critério IAE produzem respostas com amortecimento razoável, máxima ultrapassagem de característica não oscilatória e resposta transitória satisfatória. A função custo a ser minimizada por esse critério é:

$$J_{IAE} = \int |e_r(t)| dt \quad (4.74)$$

onde  $e_r$  representa o erro de rastreo no instante de tempo  $t$ .

Segundo Carmo (2006), uma desvantagem significativa do critério IAE reside no fato de sua avaliação requerer grande precisão, sendo frequentemente necessário simular o sistema sob controle por períodos longos de tempo.

O segundo critério investigado nesse trabalho é a Integral do Erro Quadrático (do inglês *Integral Squared Error*, ISE). Malhas de controle sintonizadas por este índice tendem a apresentar uma resposta rápida, porém com baixa estabilidade relativa e apresentando oscilações. Fermino (2014) afirma que o índice ISE possui a característica de proporcionar grandes ponderações para erros grandes e pequenas ponderações para erros pequenos, além de possuir baixa seletividade. Sua função custo é:

$$J_{ISE} = \int e_r^2(t) dt \quad (4.75)$$

De acordo com Carmo (2006), a principal desvantagem do critério ISE reside na maior ponderação dos erros iniciais em sistemas oscilatórios.

O critério Integral do Erro Absoluto multiplicado pelo Tempo (do inglês *Integral of Time Multiplied Absolute Error*, ITAE) é aplicado em sistemas oscilatórios com problemas de ponderação dos erros iniciais. Segundo Silva et al. (2019), o critério ITAE visa aumentar a seletividade do índice IAE atribuindo maiores pesos aos erros posteriores à resposta transitória, e menores aos erros iniciais (geralmente de maior magnitude). Malhas de controle sintonizadas pelo índice ITAE possuem uma resposta transitória com máxima ultrapassagem pequena e oscilações amortecidas. A função custo a ser minimizada por esse critério é:

$$J_{ITAE} = \int t |e_r(t)| dt \quad (4.76)$$

O último critério analisado neste trabalho é a Integral do Erro Quadrático multiplicado pelo Tempo (do inglês *Integral of Time Multiplied Squared Error*, ITSE), que busca aumentar a seletividade do índice ISE. Segundo Alt e Larges (2003), na resposta ao degrau unitário, o critério ITSE penaliza os erros que ocorrem mais tarde na resposta transitória, enquanto ameniza os erros iniciais, geralmente de maior magnitude. A sua função custo é:

$$J_{ITSE} = \int t e_r^2(t) dt \quad (4.77)$$

## 5 RESULTADOS SIMULADOS

De forma a analisar o desempenho das mecanizações baro-inercial apresentadas no Capítulo 4, foram desenvolvidas simulações das sintonias propostas por: Siouris (1993) e Titterton e Weston (2004) com mecanização de segunda ordem; e Bekir (2007), Rogers (2003), Siouris (1993) e Savage (2007) com mecanização de terceira ordem. Também foram realizadas simulações de mecanizações sintonizadas pelas técnicas de controle ótimo LQR (segunda e terceira ordem) e índices de desempenho IAE, ISE, ITAE e ITSE (apenas de terceira ordem). Os valores utilizados nas simulações para a pressão atmosférica, temperatura, aceleração média da gravidade ao nível do mar, constante universal dos gases e gradiente da temperatura atmosférica foram os mesmos apresentados no Capítulo 3. O raio equatorial da Terra considerado foi de 6738,137 km, conforme estipulado pelo WGS84. Erros de *biases*, fatores de escala, acoplamento cruzado, ruídos aleatórios e Densidade Espectral de Potência (do inglês *Power Spectral Density*, PSD) dos sensores inerciais foram gerados de acordo com os modelos apresentados por Grewal, Andrews e Bartone (2013), com os parâmetros especificados na Tabela 5.1 e 5.2. Já os erros na saída do barômetro, foram gerados conforme sugerido por Grewal, Andrews e Bartone (2013) e Farrell (2008) e especificado na Tabela 5.3. A determinação da aceleração da gravidade bem como a implementação numérica das equações do INS foram desenvolvidos de acordo com Groves (2013) e apresentados no Capítulo 2.

Tabela 5.1 – Erros dos acelerômetros considerados na simulação.

Erros	Valores	Unidade de Medida
<i>Bias</i> Repetibilidade	$\begin{bmatrix} 900 \\ -1300 \\ 800 \end{bmatrix}$	$\mu g$
Coefficiente do <i>Bias</i> Instabilidade	20	mg
Tempo de Correlação do <i>Bias</i> Instabilidade	200	s
Fator de Escala e Acoplamento Cruzado	$\begin{bmatrix} 500 & -300 & 200 \\ -150 & -600 & 250 \\ -250 & 100 & 450 \end{bmatrix}$	ppm
Raiz Quadrada da PSD do Ruído Branco	100	$\mu g/\sqrt{Hz}$
Nível de Quantização (Resolução)	$1,00 \times 10^{-4}$	$m/s^2$

Fonte: Autor.

Para fins de análise, foi simulado o deslocamento de uma aeronave durante 418 segundos. A trajetória simulada correspondeu a um deslocamento reto nivelado de aproximadamente 4 km na direção leste, seguido de uma curva a sudeste, outro deslocamento reto nivelado de

Tabela 5.2 – Erros dos girômetros considerados na simulação.

Erros	Valores	Unidade de Medida
<i>Bias</i> Repetibilidade	$\begin{bmatrix} -9 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}$	°/h
Coefficiente do <i>Bias</i> Instabilidade	2	°/h
Tempo de Correlação do <i>Bias</i> Instabilidade	100	s
Fator de Escala e Acoplamento Cruzado	$\begin{bmatrix} 400 & -300 & 250 \\ 0 & -300 & -150 \\ 0 & 0 & -350 \end{bmatrix}$	ppm
Raiz Quadrada da PSD do Ruído Branco	0,01	°/ $\sqrt{h}$
Nível de Quantização (Resolução)	$2,00 \times 10^{-4}$	rad/s
<i>Biases</i> Dependentes da Gravidade	$\begin{bmatrix} 0,9 & -1,1 & -0,6 \\ -0,5 & 1,9 & -1,6 \\ 0,3 & 1,1 & -1,3 \end{bmatrix}$	°/h/g

Fonte: Autor.

Tabela 5.3 – Erros dos barômetros considerados na simulação.

Erros	Valores	Unidade de Medida
Fator de Escala	10	ppm
<i>Bias</i> de Repetibilidade	100	Pa
Desvio Padrão do Erro de Deriva	10	Pa
Tempo de Correlação do Erro de Deriva	3600	s
Raiz Quadrada da PSD do Ruído Branco	10	Pa $\sqrt{s}$
Nível de Quantização (Resolução)	1	Pa

Fonte: Autor.

aproximadamente 12 km, seguido de outra curva agora a leste, mais um deslocamento reto nivelado de 10 km, um movimento de subida com ganho de altitude de 500 m, e por fim, um último deslocamento reto nivelado por mais 35 km. O tempo de amostragem adotado para o INS foi de 10 ms, e para o barômetro, de 100 ms, em conformidade com o que se verifica em navegadores comerciais. Os erros de inicialização do INS foram arbitrariamente definidos como descrito na Tabela 5.4, visando fornecer maior representatividade às simulações. A trajetória simulada é apresentada na Figura 5.1.

## 5.1 Sintonias Empíricas

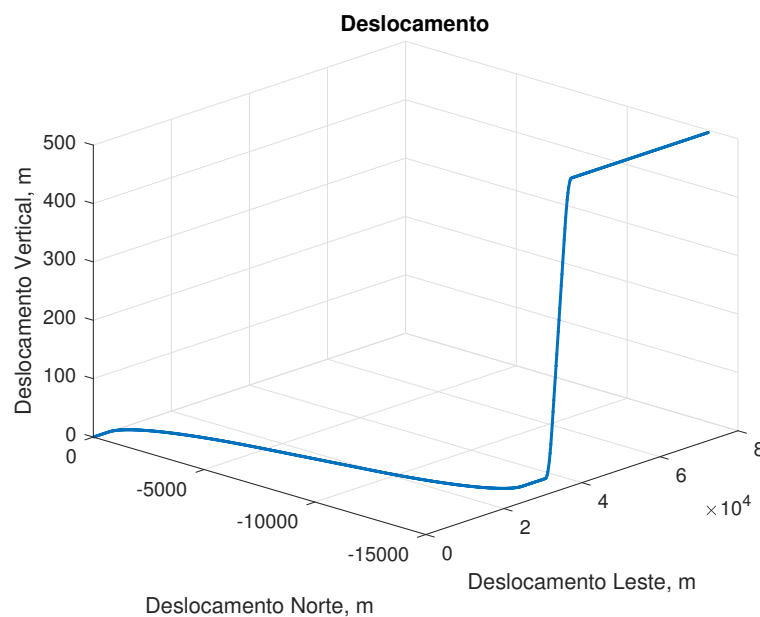
Primeiramente, foram analisadas as mecanizações de segunda ordem do canal vertical sintonizadas empiricamente por Siouris (1993) e Titterton e Weston (2004). As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam os erros em altitude e velocidade vertical, respectivamente, em função do tempo,

Tabela 5.4 – Erros de inicialização considerados na simulação.

Erros	Valores	Unidade de Medida
Posição Inicial	$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	m
Velocidade Inicial	$\begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,05 \\ 0,10 \end{bmatrix}$	m/s
Atitude Inicial	$\begin{bmatrix} -0,05 \\ 0,04 \\ 1,00 \end{bmatrix}$	°

Fonte: Autor.

Figura 5.1 – Simulação da trajetória da aeronave.



Fonte: Autor.

para as sintonias supracitadas. Os valores numéricos dos ganhos sugeridos empiricamente nessas referências podem ser vistos na Tabela 5.5.

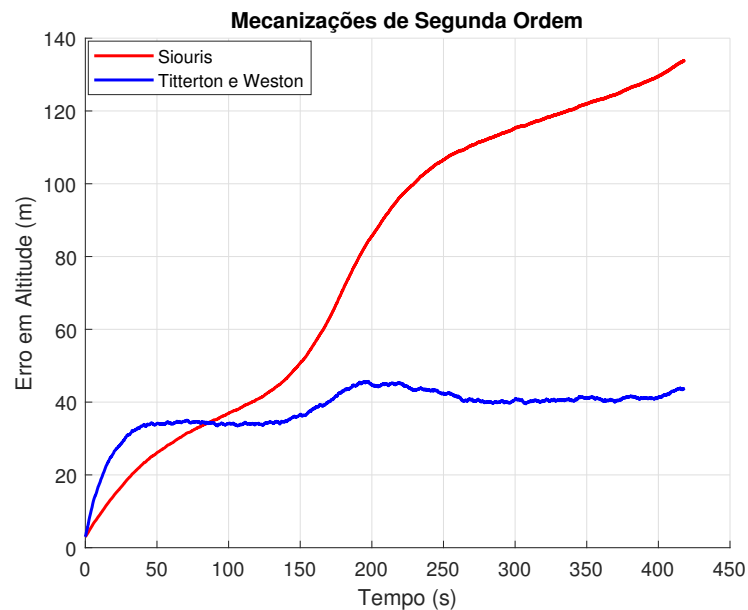
Tabela 5.5 – Ganhos das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente.

Autor	$G_1(s^{-1})$	$G_2(s^{-2})$
(SIOURIS, 1993)	$2,00 \times 10^{-2}$	$1,03 \times 10^{-4}$
(TITTERTON; WESTON, 2004)	$6,67 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-3}$

Fonte: Autor.

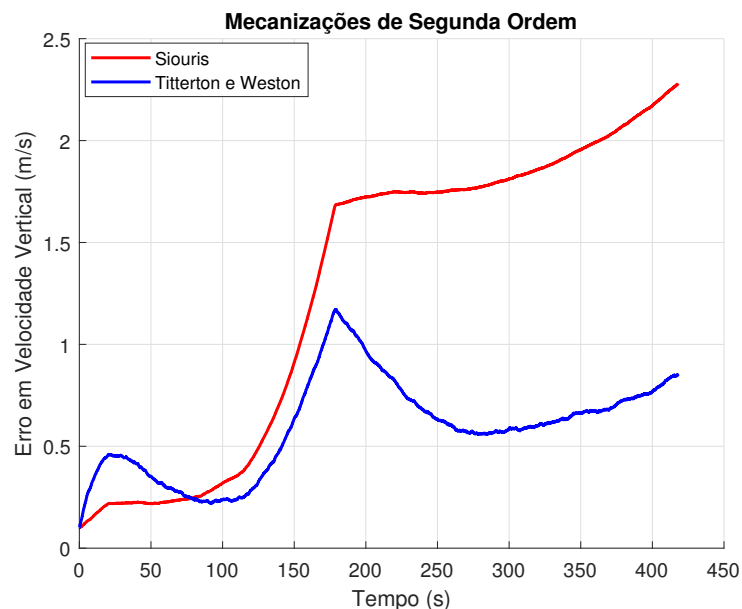
Pela Figura 5.2, pode-se notar que o erro em altitude do canal vertical sintonizado por Siouris (1993) apresentou resposta divergente, com seus valores crescendo ao longo do trajeto,

Figura 5.2 – Erro em altitude das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente.



Fonte: Autor.

Figura 5.3 – Erro em velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente.



Fonte: Autor.

ao passo que a sintonia proposta por Titterton e Weston (2004), apresentou resposta com valores mais acomodados a partir de aproximadamente 40 segundos. Ao analisar a Figura 5.3, nota-se que os erros em velocidade do canal vertical tendem a crescer com o passar do tempo, sendo que a sintonia proposta pelo primeiro autor apresenta erros maiores que a do segundo. É interessante notar que, durante aproximadamente os primeiros 85 segundos de simulação, a

sintonia de Titterton e Weston (2004) resultou em maiores erros em altitude e velocidade vertical em comparação à sintonia de Siouris (1993), momento esse que corresponde ao final da execução da primeira curva. Após esse instante de tempo, contudo, e especialmente em torno do instante 180 segundos (correspondente ao final da segunda curva), os erros em altitude e velocidade vertical da sintonia do primeiro autor foram menores que os do segundo autor.

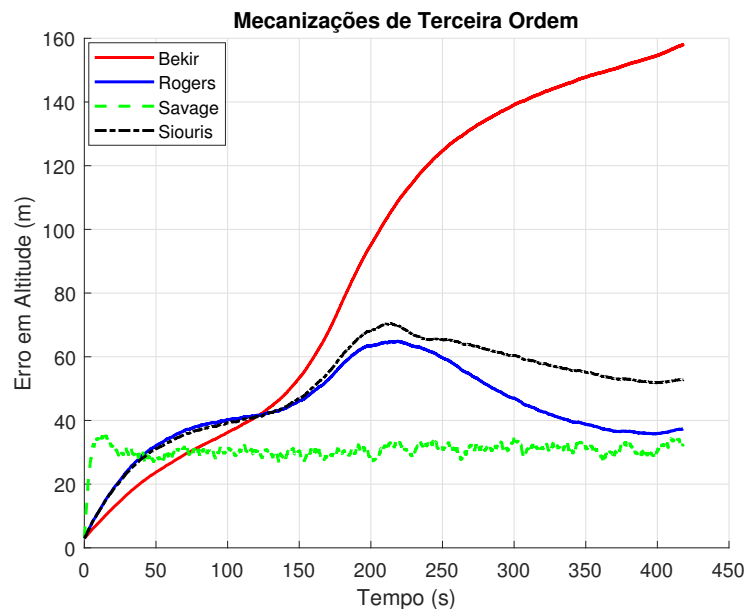
As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam os erros em altitude e velocidade vertical, respectivamente, das mecanizações de terceira ordem propostas por Bekir (2007), Rogers (2003), Savage (2007) e Siouris (1993), cujos respectivos ganhos são apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Ganhos das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente.

Autor	$G_1(s^{-1})$	$G_2(s^{-2})$	$G_3(s^{-3})$	$G_4(s)$
(BEKIR, 2007)	$1,50 \times 10^{-2}$	$7,81 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-7}$	0,00
(ROGERS, 2003)	$3,00 \times 10^{-2}$	$4,03 \times 10^{-4}$	$2,00 \times 10^{-6}$	0,00
(SAVAGE, 2007)	$3,00 \times 10^{-1}$	$3,00 \times 10^{-2}$	$1,00 \times 10^{-3}$	0,00
(SIOURIS, 1993)	$3,00 \times 10^{-2}$	$3,04 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-6}$	0,50

Fonte: Autor.

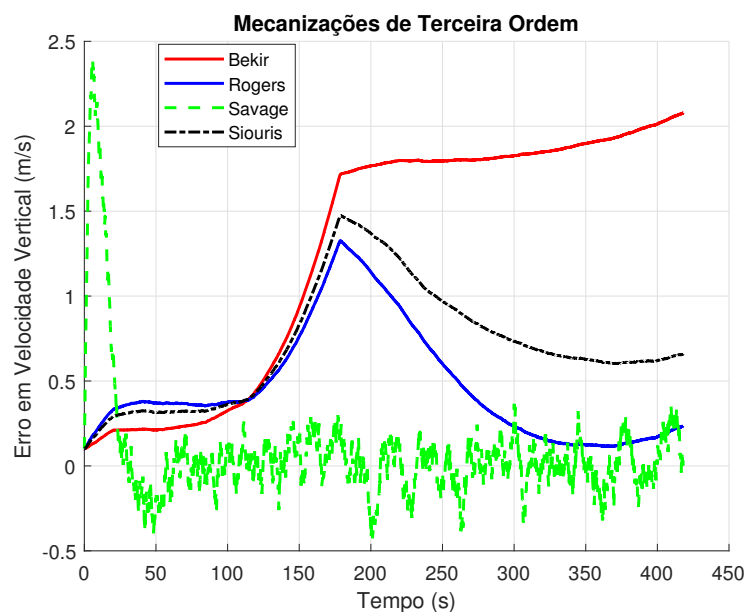
Figura 5.4 – Erro em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente.



Fonte: Autor.

Comparando-se a mecanização de segunda ordem proposta por Siouris (1993) com a de terceira ordem proposta pelo mesmo autor, nota-se que esta última apresenta erros menores e mais comportados. Dentre todas as sintonias das mecanizações de terceira ordem investigadas, a proposta por Bekir (2007) resultou nos maiores valores de erros em altitude e velocidade

Figura 5.5 – Erro em velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente.



Fonte: Autor.

vertical, apresentando portanto, baixo desempenho de estabilização. As sintonias propostas por Rogers (2003) e Siouris (1993) resultaram em comportamentos bastante semelhantes do canal vertical, com desempenhos superiores aos do primeiro autor. A sintonia proposta por Savage (2007), por fim, foi a que apresentou melhores resultados, resultando em erros mais comportados, não divergentes e não enviesados (no caso da velocidade vertical), a despeito da clara amplificação de ruído.

Após os primeiros 22 segundos de simulação, observa-se claramente que os erros em altitude da sintonia de Savage (2007) acomodaram-se (estabilizaram-se) em torno de aproximadamente 30 metros. Embora, nesse mesmo período inicial, os erros em velocidade vertical resultantes da sintonia de Savage (2007) tenham sido notadamente grandes, eles rapidamente foram acomodados em torno do valor zero. A Tabela 5.7 mostra a Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE), calculado na janela de tempo simulada, para cada mecanização/sintonia. Pela Tabela 5.7, nota-se que a mecanização sintonizada por Savage (2007) foi a que resultou nos menores valores RMSE em altitude, o que corrobora a análise anterior.

## 5.2 Sintonia via LQR

Topologias de controladores ótimos também foram investigadas para fins de estabilização do canal vertical em integrações baro-inercial de segunda e terceira ordem. A primeira



Tabela 5.7 – Raiz dos erros médios quadráticos em altitude e velocidade vertical das mecanizações sintonizadas empiricamente.

<b>Autor</b>	<b>Ordem da Mecanização</b>	<b>Erro de Altitude (m)</b>	<b>Erro de Velocidade Vertical (m/s)</b>
(SIOURIS, 1993)	2 <sup>a</sup>	88,73	1,48
(TITTERTON; WESTON, 2004)	2 <sup>a</sup>	38,50	0,64
(BEKIR, 2007)	3 <sup>a</sup>	104,32	1,47
(ROGERS, 2003)	3 <sup>a</sup>	45,32	0,58
(SAVAGE, 2007)	3 <sup>a</sup>	30,68	0,39
(SIOURIS, 1993)	3 <sup>a</sup>	51,99	0,79

Fonte:Autor.

técnica de controle ótimo analisada foi a sintonia via LQR. O cálculo da matriz de ganhos ótimos ( $K$ ) do LQR foi realizado recorrendo-se à função nativa  $lqr(A_i, B_i, Q, R)$  do Matlab, onde  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $Q$  e  $R$  foram adequadamente definidos no Capítulo 4. Para a mecanização de terceira ordem utilizando quatro ganhos, foi necessário definir primeiramente o ganho  $G_4$ , tendo sido os ganhos  $G_1$  e  $G_2$ , recuperados a partir de tal definição.

Em cada mecanização foram realizadas simulações para a escolha dos valores de  $Q$  e  $R$  que minimizassem os erros em altitude e velocidade vertical. Para a mecanização de terceira ordem com quatro ganhos, variou-se também o valor do ganho  $G_4$ . Já a mecanização de segunda ordem, não foi necessário variar os valores de  $G_4$ , pois os ganhos  $G_1$  e  $G_2$  serão fornecidos diretamente da função do Matlab. A Tabela 5.8 apresenta a faixa de valores e o passo empregados na escolha de  $Q$ ,  $R$  e  $G_4$ .

Tabela 5.8 – Parâmetros para escolha de  $Q$ ,  $R$  e  $G_4$  no LQR.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor Inicial</b>	<b>Valor Final</b>	<b>Passo</b>
$Q$ [ $m^{-1}$ ; $m^{-1}s$ ; $m^{-1}s^2$ ]	$1,00 \times 10^{-3}$	1,00	$1,00 \times 10^{-3}$
$R$ ( $m^{-1}s$ )	1,00	$1,00 \times 10^4$	1,00
$G_4$ (s)	$1,00 \times 10^{-2}$	1,00	$1 \times 10^{-2}$

Fonte:Autor.

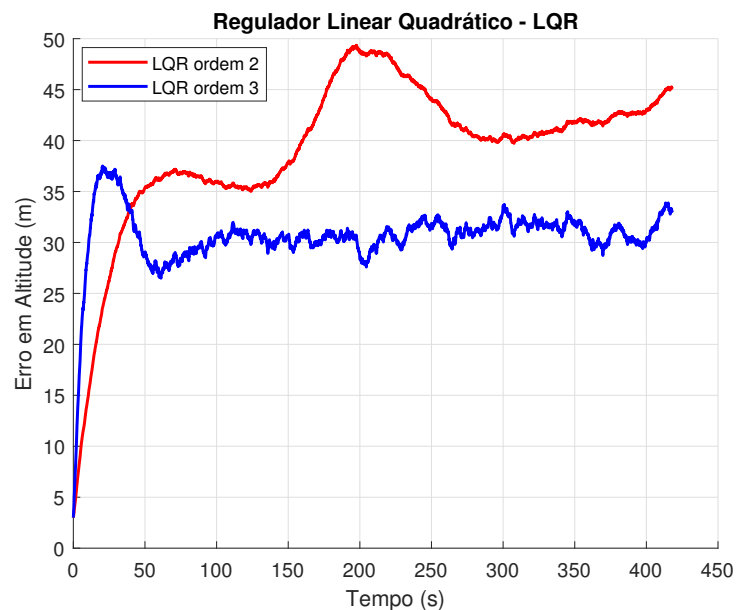
Para cada conjunto de parâmetros  $Q$ ,  $R$  e  $G_4$  do LQR, foram calculados os respectivos ganhos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  para as mecanizações de segunda e terceira ordem. De posse desses valores, foram identificados os erros em altitude e velocidade vertical para a mesma aeronave simulada nas seções anteriores. Os ganhos calculados com  $Q = [1,00 \times 10^{-3} m^{-1}; 1,00 \times 10^{-3} m^{-1}s; 1,00 \times 10^{-3} m^{-1}s^2]$  e  $R = 1,00 \times 10^4 m^{-1}s$  foram os que apresentaram os menores erros no

canal vertical, assim como resposta mais acomodada na mecanização de segunda ordem e na de terceira ordem com três ganhos.

Na mecanização de terceira ordem com quatro ganhos, à medida em que foi aumentado o valor do ganho  $G_4$ , menores foram os valores RMSE em altitude e velocidade vertical, porém às custas de uma resposta contendo picos e vales mais acentuados. Fazendo-se o ganho  $G_4$  igual a zero, a resposta mostrou-se mais acomodada, embora os valores RMSE em altitude e velocidade vertical tenham sido ligeiramente maiores, o que foi preferido.

Diante disso, as mecanizações de terceira ordem com três e quatro ganhos apresentaram os mesmos conjuntos de ganhos quando sintonizadas via LQR, pois em ambos os casos o valor de  $G_4$  foi definido como zero. Os conjuntos de ganhos que resultaram nos menores valores RMSE em altitude e velocidade vertical (Figuras 5.6 e 5.7, respectivamente) estão apresentados na Tabela 5.9.

Figura 5.6 – Erro em altitude das mecanizações sintonizadas via LQR.

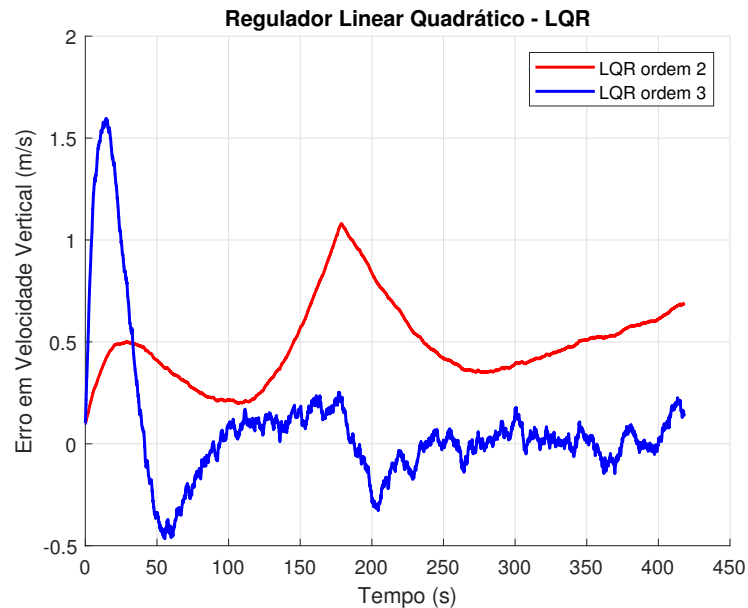


Fonte: Autor.

Observando-se os valores dos ganhos da mecanização de segunda ordem, sintonizadas via LQR, na Tabela 5.9 com os propostos por Siouris (1993) e Titterton e Weston (2004) na Tabela 5.5, nota-se que os ganhos via LQR possuem a mesma ordem de grandeza. Já os ganhos da mecanização de terceira ordem sintonizada via LQR se aproximam mais da sintonia proposta por Savage (2007), na Tabela 5.6.

Pelas Figuras 5.6 e 5.7, nota-se que a mecanização de terceira ordem sintonizada via LQR apresentou menores valores de erros em altitude e velocidade vertical, além de resposta

Figura 5.7 – Erro em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via LQR.



Fonte: Autor.

Tabela 5.9 – Ganhos das mecanizações sintonizadas via LQR.

Ordem da Mecanização	$G_1$ ( $s^{-1}$ )	$G_2$ ( $s^{-2}$ )	$G_3$ ( $s^{-3}$ )
2 <sup>a</sup>	$2,52 \times 10^{-2}$	$3,16 \times 10^{-4}$	0
3 <sup>a</sup>	$1,36 \times 10^{-1}$	$9,30 \times 10^{-3}$	$3,16 \times 10^{-4}$

Fonte: Autor.

mais acomodada. A Tabela 5.10 apresenta os valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via LQR.

Tabela 5.10 – Valores RMSE em altitude e em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via LQR.

Ordem da Mecanização	Erro de Altitude (m)	Erro de Velocidade Vertical (m/s)
2 <sup>a</sup>	39,89	0,53
3 <sup>a</sup>	30,78	0,36

Fonte: Autor.

Ao analisar os gráficos das Figuras 5.2 e 5.6 referentes aos erros de altitude das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente e via LQR, respectivamente, nota-se que essa última apresentou resposta bastante similar à sintonia proposta por Titterton e Weston (2004), o que corrobora os valores de RMSE em altitude apresentados nas Tabelas 5.7 e 5.10. O mesmo se observa ao analisar as Figuras 5.3 e 5.7 referentes ao erro em velocidade vertical.

Fazendo a mesma análise para os erros em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente e via LQR (Figuras 5.4 e 5.6, respectivamente), essa última possui resposta bastante semelhante à de Savage (2007), tanto graficamente, quanto numericamente (vide as Tabelas 5.7 e 5.10). A mesma situação ocorre ao se analisar os erros em velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente e via LQR, conforme Figuras 5.5 e 5.7, respectivamente.

### 5.3 Sintonia via Índices de Desempenho

A segunda técnica de estabilização do canal vertical em integrações baro-inercial via controle ótimo investigada neste trabalho foi a minimização de índices de desempenho, a saber, o IAE, ISE, ITAE e ITSE, os quais foram devidamente apresentados no Capítulo 4. As sintonias resultantes da minimização desses índices aplicaram-se exclusivamente às mecanizações de terceira ordem com quatro ganhos, por motivos de generalidade. Para a determinação dos ganhos ótimos, foram definidas faixas de busca (Tabela 5.11), as quais tiveram como prerrogativa os valores dos ganhos usados previamente nas sintonias empíricas.

Tabela 5.11 – Faixa de ganhos buscados para sintonia via índices de desempenho.

<b>Ganhos</b>	<b>Valor Inicial</b>	<b>Valor Final</b>	<b>Passo</b>
$G_1$ ( $s^{-1}$ )	$1,00 \times 10^{-2}$	1,00	$1,00 \times 10^{-2}$
$G_2$ ( $s^{-2}$ )	$1,00 \times 10^{-3}$	1,00	$1,00 \times 10^{-3}$
$G_3$ ( $s^{-3}$ )	$1,00 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-6}$
$G_4$ (s)	$1,00 \times 10^{-2}$	1,00	$1,00 \times 10^{-2}$

Para cada conjunto de ganhos buscados foi calculada a função-custo dos índices de desempenho definidas nas Equações (4.74) a (4.77). É importante salientar que o erro de rastreo que define tais funções-custo supracitadas não é o erro em altitude e/ou velocidade vertical da simulação em particular, mas sim o erro da resposta ao degrau da FT que relaciona  $h_b$  com  $h_B$  na mecanização de terceira ordem com quatro ganhos. O conjunto de ganhos que resultou nos menores valores dessas funções-custo para cada índice, foram escolhidos como ganhos ótimos da mecanização, conforme apresentado na Tabela 5.12.

Pela Tabela 5.12, nota-se que os ganhos que minimizam os índices IAE e ITSE são iguais. Por esse motivo, simulações relacionadas ao IAE e ITSE serão referidas como IAE/ITSE ao longo desta seção. Além disso, conforme indicado pela Tabela 5.12, os valores de  $G_1$ ,  $G_3$

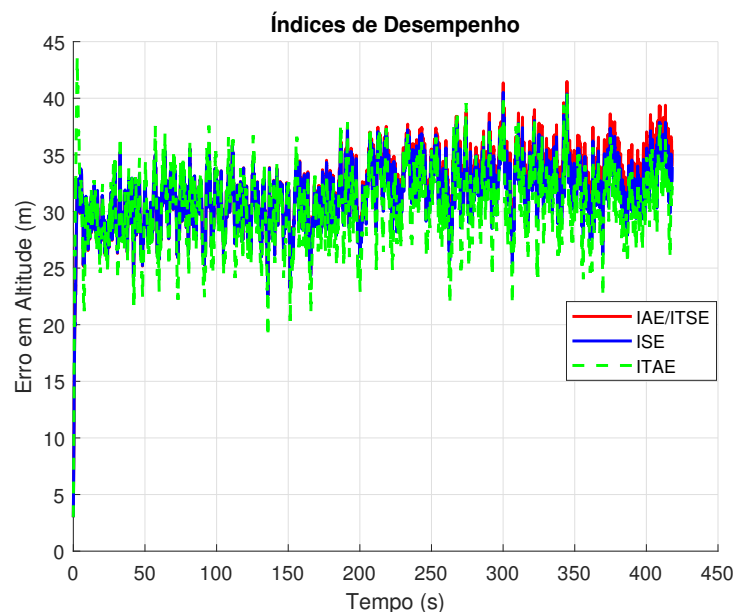
Tabela 5.12 – Ganhos calculados via minimização dos índices de desempenho.

<b>Critério</b>	$G_1$ ( $s^{-1}$ )	$G_2$ ( $s^{-2}$ )	$G_3$ ( $s^{-3}$ )	$G_4$ (s)
IAE	1,00	$1,00e^{-3}$	$1,00e^{-6}$	$1,00e^{-2}$
ISE	1,00	$5,00e^{-3}$	$1,00e^{-6}$	$1,00e^{-2}$
ITAE	1,00	1,00	$1,00e^{-6}$	$1,00e^{-2}$
ITSE	1,00	$1,00e^{-3}$	$1,00e^{-6}$	$1,00e^{-2}$

e  $G_4$  foram os mesmos para todos os índices, e corresponderam respectivamente aos valores mínimos ( $G_3$  e  $G_4$ ) e máximos ( $G_1$ ) buscados. A principal diferença, portanto entre as sintonias residiu no valor de  $G_2$ .

A partir desses conjuntos de ganhos ótimos, foram realizadas análises de desempenho de estabilização do canal vertical, para a mesma aeronave anteriormente simulada. Os erros em altitude e velocidade vertical são apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9, respectivamente.

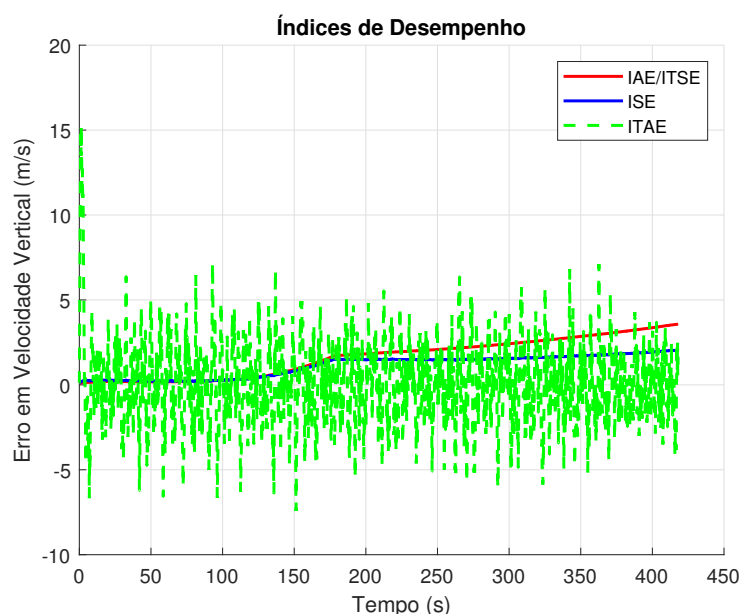
Figura 5.8 – Erro em altitude das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.



Fonte: Autor.

Pela Figura 5.8, nota-se que os erros em altitude, frutos da sintonia via ITAE, apresentaram oscilações ligeiramente maiores (isto é, amplificação de ruídos) do que os demais. Isso também é observado na Figura 5.9 para os erros em velocidade vertical. As sintonias via índices IAE/ITSE e ISE tenderam a apresentar soluções mais acomodadas, em especial a ISE, que resultou nos menores erros em velocidade vertical. A Tabela 5.13 apresenta os valores RMSE em

Figura 5.9 – Erro em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.



Fonte: Autor.

altitude e velocidade vertical para as mecanizações de terceira ordem sintonizadas via índices de desempenho.

Tabela 5.13 – Valores RMSE em altitude e em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.

Índice	Erro de Altitude (m)	Erro de Velocidade Vertical (m/s)
IAE/ITSE	32,15	1,97
ISE	31,67	1,29
ITAE	30,73	2,39

Fonte: Autor.

Pela Tabela 5.13, em comparação com a Tabela 5.10, nota-se que a mecanização de terceira ordem sintonizada via LQR foi a que apresentou o menor valor RMSE em velocidade vertical dentre todas as sintonias investigadas e o segundo menor valor RMSE em altitude (somente maior, mesmo assim ligeiramente, do que o obtido via minimização do ITAE, e/ou sintonia empírica de Savage (2007)). A sintonia via ITAE foi a que apresentou o menor valor RMSE em altitude dentre as técnicas de controle ótimo, porém com valor RMSE em velocidade vertical maior. Isso se deveu, como mencionado anteriormente, às oscilações mais acentuadas verificadas na Figura 5.9.

## 5.4 Resposta ao Degrau

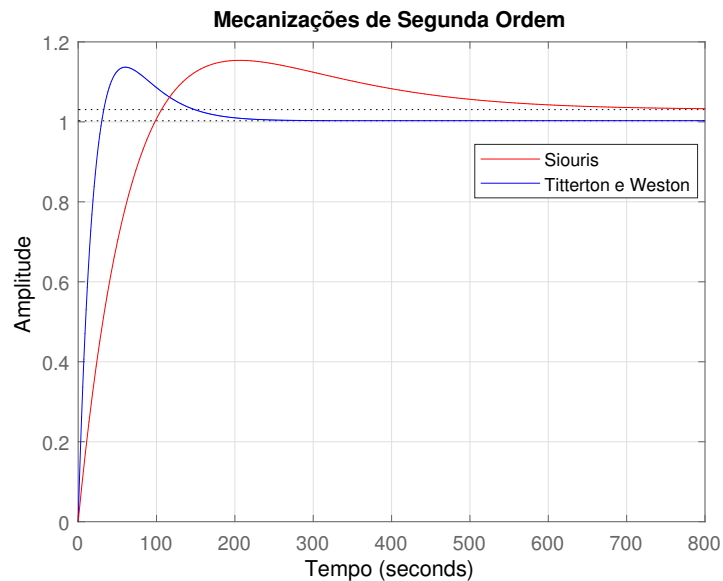
Como citado no Capítulo 4, as mecanizações de segunda e terceira ordem são sistemas MISO, cujas entradas são aceleração vertical e altitude barométrica, e a saída é a solução da altitude estabilizada. Como a primeira entrada não possui a mesma unidade de medida que a da saída (aceleração vertical medida em  $m/s^2$  e altitude em m) e as mecanizações têm por objetivo, em geral, fazer a altitude integrada rastrear a altitude barométrica. Esse capítulo foca, tão somente, na resposta ao degrau deste último par de variáveis.

Outra análise conduzida foi a resposta ao degrau unitário das mecanizações sintonizadas por cada uma das técnicas previamente investigadas. Tal análise é de particular interesse, pois as sintonias obtidas via índices de desempenho se basearam exatamente na minimização dos erros de rastreamento ao degrau unitário. As Figuras 5.10 a 5.13 ilustram as respostas ao degrau das funções transferência que relacionam  $h_b$  e  $h_B$ , para cada uma das mecanizações/sintonias investigadas. As informações de tempo de subida, tempo de acomodação e máxima ultrapassagem dessas mecanizações/sintonias são apresentadas nas Tabelas 5.14 e 5.15. O tempo de subida foi definido como o tempo gasto para a saída do sistema ( $h_b$ ) excursionar de 10% a 90% do valor final. O tempo de acomodação foi definido como o tempo gasto para a saída se estabilizar dentro de uma faixa de porcentagem do valor final, a saber, de 2%. A máxima ultrapassagem, por fim, foi calculada como o percentual do maior valor da saída com relação ao respectivo valor em regime permanente.

Nota-se pela Figura 5.10 que a mecanização de segunda ordem sintonizada por Siouris (1993) apresentou erro em regime permanente de aproximadamente 3%, o qual não é observado na sua mecanização de terceira ordem (Figura 5.11), conforme já previsto nas análises das seções 4.2.1 e 4.2.2. As demais mecanizações/sintonias empíricas não apresentaram erro em regime permanente.

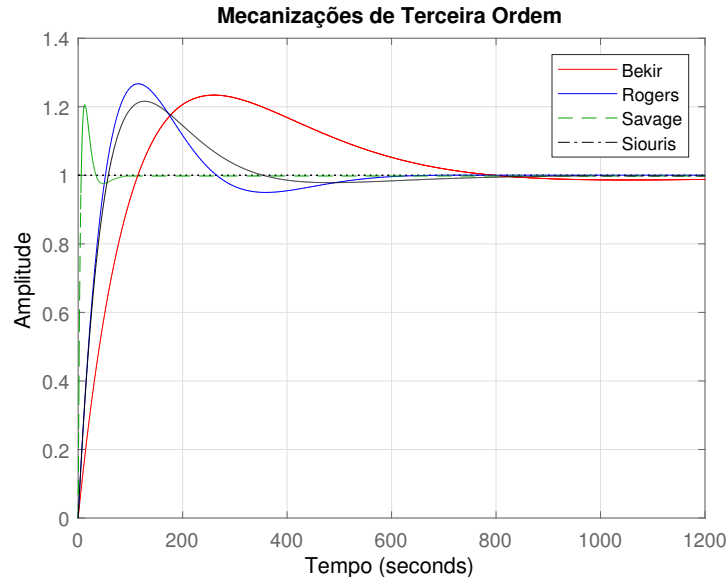
Das Figuras 5.10 e 5.11, e Tabela 5.14, nota-se que a mecanização de terceira ordem sintonizada conforme sugerido por Bekir (2007) apresentou o pior desempenho, pois ela resulta nos maiores valores de tempo de subida, tempo de acomodação e máxima ultrapassagem, ou seja, possui a resposta mais lenta e os maiores erros. As mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente por Siouris (1993) e Titterton e Weston (2004) foram as que apresentaram, de forma global, os menores valores de máxima ultrapassagem (dentro das sintonias empíricas).

Figura 5.10 – Resposta ao degrau das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente.



Fonte: Autor.

Figura 5.11 – Resposta ao degrau das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente.

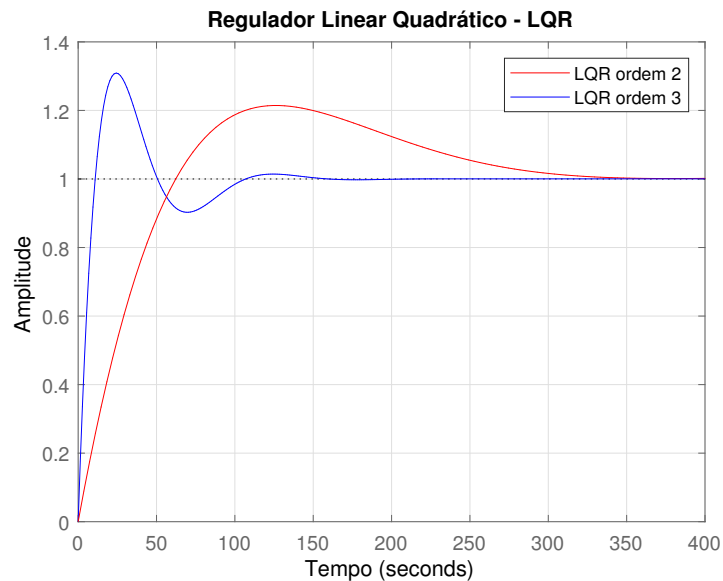


Fonte: Autor.

A mecanização de terceira ordem sintonizada empiricamente por Savage (2007), por outro lado, foi a que apresentou os menores tempos de subida e de acomodação (dentre, novamente, as sintonias empíricas), resultando, portanto, nas respostas mais rápidas. O respectivo valor de máxima ultrapassagem também foi o menor dentre as mecanizações de terceira ordem, o que corrobora seu desempenho superior na estabilização do canal vertical de integrações baro-inercial, já previamente identificado.

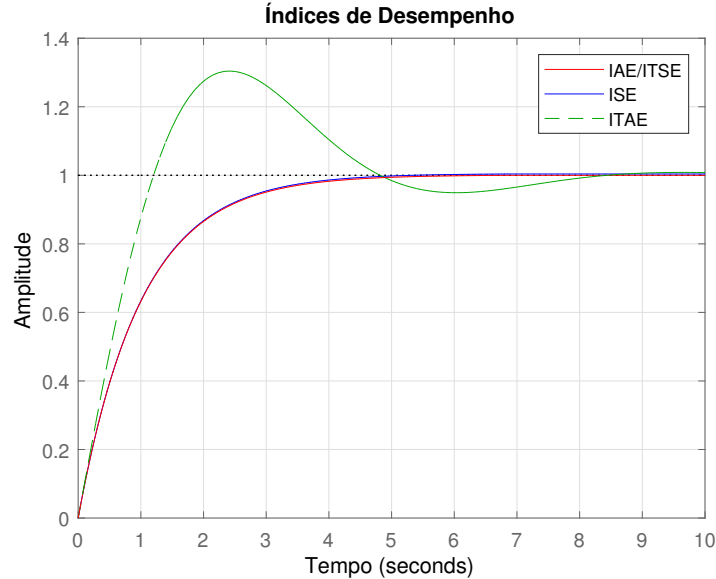


Figura 5.12 – Resposta ao degrau das mecanizações sintonizadas via LQR.



Fonte: Autor.

Figura 5.13 – Resposta ao degrau das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.



Fonte: Autor.

Pela Figura 5.12 e Tabela 5.15, é possível notar que, embora a mecanização de terceira ordem sintonizada via LQR tenha resultado em máxima ultrapassagem maior do que a de segunda ordem, ela apresentou resposta mais rápida, com tempo de subida mais de cinco vezes menor e tempo de acomodação quase três vezes menor. Observando a Figura 5.13 e Tabela 5.15, percebe-se que o tempo de subida da mecanização sintonizada via ITAE é menor do que a dos índices IAE/ITSE e ISE, porém possui máxima ultrapassagem relativamente maior e mais

Tabela 5.14 – Parâmetros da resposta ao degrau das mecanizações sintonizadas empiricamente.

<b>Autor</b>	<b>Ordem da Mecanização</b>	<b>Tempo de Subida (s)</b>	<b>Tempo de Acomodação (s)</b>	<b>Máxima Ultrap. (%)</b>
(SIOURIS, 1993)	2 <sup>a</sup>	77	528	11,94
(TITTERTON; WESTON, 2004)	2 <sup>a</sup>	22	161	13,36
(BEKIR, 2007)	3 <sup>a</sup>	85	749	24,88
(ROGERS, 2003)	3 <sup>a</sup>	40	497	26,72
(SAVAGE, 2007)	3 <sup>a</sup>	4	56	20,58
(SIOURIS, 1993)	3 <sup>a</sup>	44	530	21,65

Fonte:Autor.

Tabela 5.15 – Parâmetros de resposta ao degrau unitário para as mecanizações sintonizadas via controle ótimo.

<b>Método</b>	<b>Ordem da Mecanização</b>	<b>Tempo de Subida (s)</b>	<b>Tempo de Acomodação (s)</b>	<b>Máxima Ultrapassagem (%)</b>
LQR	2 <sup>a</sup>	48	277	20,27
LQR	3 <sup>a</sup>	9	98	30,89
IAE/ITSE	3 <sup>a</sup>	2	3	0,01
ISE	3 <sup>a</sup>	2	3	0,43
ITAE	3 <sup>a</sup>	1	7	27,47

Fonte:Autor.

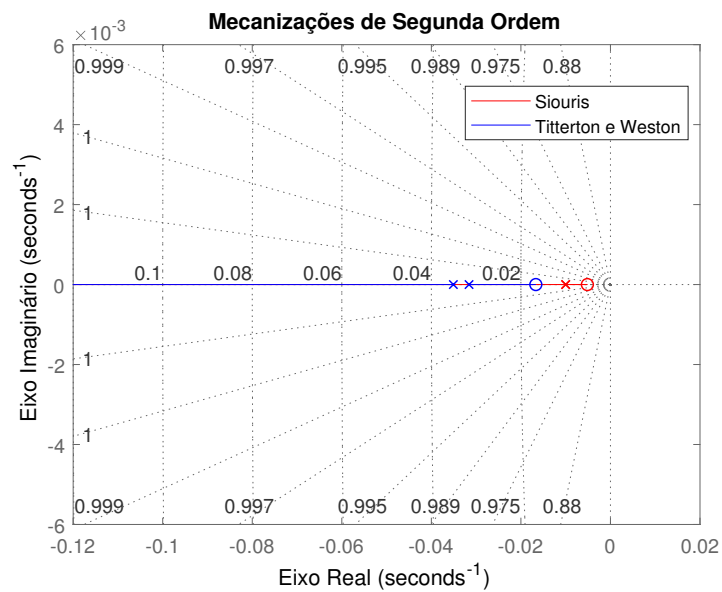
que o dobro do tempo de acomodação. Os parâmetros de resposta ao degrau unitário das mecanizações sintonizadas via IAE/ITSE e ISE são praticamente iguais, tendo o ISE resultado em maior máxima ultrapassagem que o IAE/ITSE. Por fim, é interessante observar que as sintonias obtidas via IAE/ITSE e ISE têm comportamento criticamente amortecido, diferentemente das demais sintonias.

## 5.5 Lugar das Raízes

O método do Lugar das Raízes é uma técnica que permite analisar de que forma os polos de um sistema em malha fechada variam em função de parâmetros específicos. Esse método afeta diretamente as características da resposta ao degrau unitário citadas na seção anterior. De acordo com Ogata (2010), ao adicionar um polo na função de transferência em malha aberta, o lugar das raízes é deslocado para a direita, diminuindo a estabilidade relativa do sistema e aumentando o tempo de acomodação. A adição de um controle integral adiciona um polo na origem e torna o sistema menos instável. O autor ainda afirma que ao adicionar um zero na função de transferência em malha aberta, o lugar das raízes é deslocado para a esquerda,

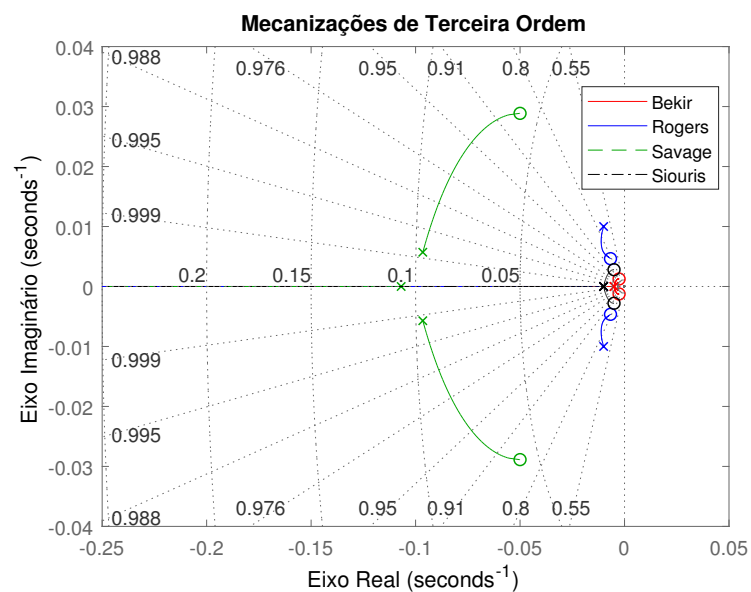
umentando a estabilidade relativa do sistema e diminuindo o tempo de acomodação. A adição de uma ação de controle derivativa adiciona um zero, proporcionando uma ação antecipatória no sistema além de uma resposta transitória rápida. As Figuras 5.14 à 5.17 ilustram a localização dos polos das mecanizações de segunda e terceira ordem sintonizadas empiricamente e via LQR, além das mecanizações de terceira ordem sintonizadas via índices de desempenho.

Figura 5.14 – Lugar das raízes das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente.



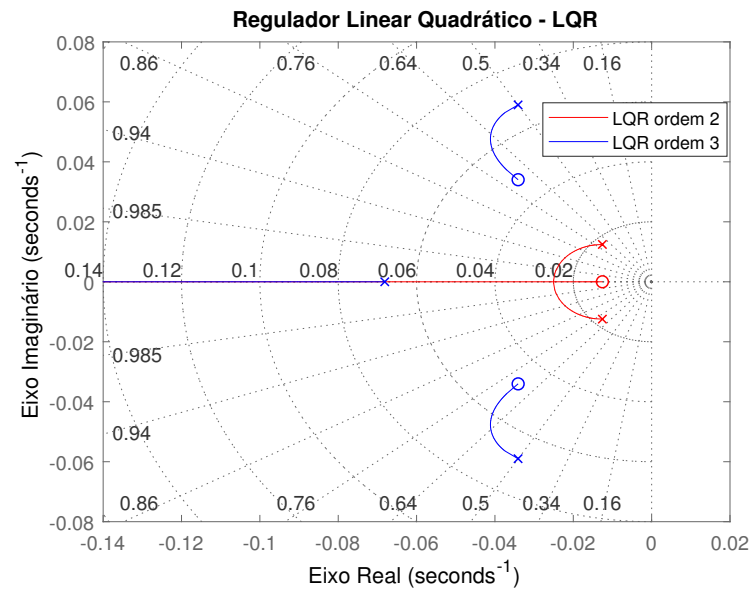
Fonte: Autor.

Figura 5.15 – Lugar das raízes das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente.



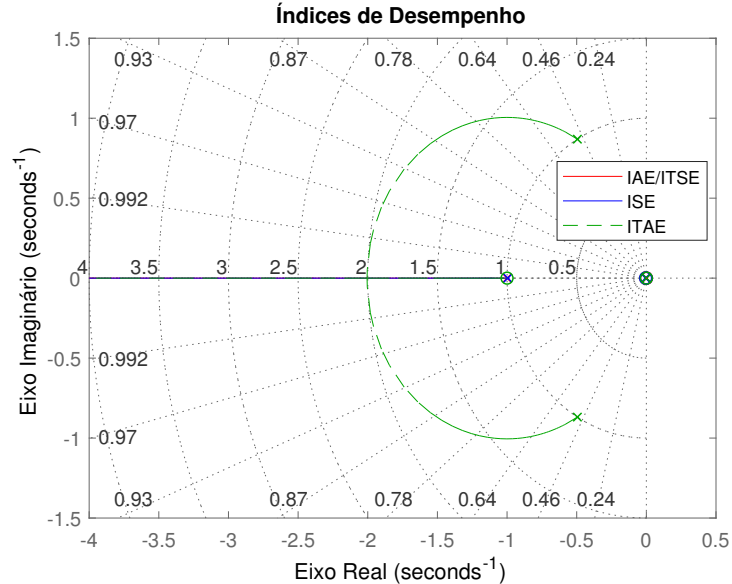
Fonte: Autor.

Figura 5.16 – Lugar das raízes das mecanizações sintonizadas via LQR.



Fonte: Autor.

Figura 5.17 – Lugar das raízes das mecanizações sintonizadas via índices de desempenho.



Fonte: Autor.

Pela Figura 5.14, nota-se que todos os polos e zeros das mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente são reais puros. Na sintonia de Siouris (1993), ela possui dois polos em  $-1,00 \times 10^{-2}$  e um zero em  $-5,15 \times 10^{-3}$ . Já a sintonia de Titterton e Weston (2004) possui um polo em  $-3,51 \times 10^{-2}$  e outro em  $-3,16 \times 10^{-2}$ , e seu zero em  $-1,67 \times 10^{-2}$ .

Na Figura 5.15, observa-se que há polos e zeros com partes reais e imaginárias nas mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente. A sintonia de Bekir (2007) possui

três polos reais puros em  $-5,00 \times 10^{-3}$ , com zeros localizados em  $(-2,60 \pm 1,25i) \times 10^{-3}$ . A sintonia de Rogers (2003) possui um polo em  $-1,00 \times 10^{-2}$  e um par de polos complexos conjugados em  $(-1,00 \pm 1,00i) \times 10^{-2}$ , enquanto seus zeros estão localizados em  $(-6,72 \pm 4,64i) \times 10^{-3}$ . A sintonia proposta por Savage (2007) possui um polo real em  $-1,07 \times 10^{-1}$  e um par complexo conjugado em  $(9,660 \pm 0,571i) \times 10^{-2}$ , já seus zeros estão localizados no par  $(-5,00 \pm 2,89i) \times 10^{-2}$ . Por fim, a sintonia de Siouris (1993) de terceira ordem possui três polos reais puros em  $-1,00 \times 10^{-2}$  enquanto seus zeros estão em  $(-5,03 \pm 2,80i) \times 10^{-3}$ .

Analisando, agora, as mecanizações sintonizadas via LQR (Figura 5.16), nota-se que a mecanização de segunda ordem possui um par de polos complexos conjugados em  $(-1,26 \pm 1,25i) \times 10^{-2}$  e um zero em  $-1,26 \times 10^{-2}$ . Já a mecanização de terceira ordem possui um zero real puro em  $-6,81 \times 10^{-2}$  e um par complexo conjugado em  $(-3,41 \pm 5,90i) \times 10^{-2}$ , enquanto seu par de zeros estão localizados em  $(-3,41 \pm 3,40i) \times 10^{-2}$ .

Por fim, ao avaliar as mecanizações sintonizadas via índices de desempenho (Figura 5.17), verifica-se que a obtida pelo critério IAE/ITSE possui um polo real em  $-9,99 \times 10^{-1}$  e um par complexo conjugado em  $(-4,98 \pm 8,68i) \times 10^{-4}$ , enquanto seus zeros estão localizados em  $(-5,00 \pm 8,66i) \times 10^{-4}$ . A sintonia via critério ISE possui três polos reais puros em  $-9,95 \times 10^{-1}$ ,  $-4,81 \times 10^{-3}$  e  $-2,09 \times 10^{-4}$ , enquanto seus zeros, também reais puros, estão localizados em  $-4,79 \times 10^{-3}$  e  $-2,09 \times 10^{-4}$ . Por último, o critério ITAE possui um polo real puro em  $-1,00 \times 10^{-6}$  e um par complexo conjugado em  $(-4,95 \pm 8,69i) \times 10^{-1}$ , enquanto seus zeros reais puros estão localizados em  $-1,00$  e  $-1,00 \times 10^{-6}$ .

Segundo Ogata (2010), um dos critérios para que o sistema seja estável é que os polos do sistema tenham parte real negativa. Como mostrado nas Figuras 5.14 a 5.17, todos os polos das sintonias analisadas atendem a esse critério.

Além disso, uma característica do método de lugar das raízes está relacionada aos tempos de subida e acomodação da resposta ao degrau unitário. Na Figura 5.17, relacionada às mecanizações sintonizadas via índices de desempenho, observa-se que essas topologias possuem um polo real puro próximo de  $-1,00$ , o que diminui os tempos de subida e acomodação do sistema. Isso pode ser visto na Figura 5.13 e na Tabela 5.15, onde os tempos de subida são menores que 3 segundos e tempos de acomodação não superiores a 8 segundos. Esses tempos são significativamente menores quando comparados às sintonias empíricas (Tabela 5.14).

Outra correlação interessante a ser observada na Figura 5.17 é o lugar dos zeros na máxima ultrapassagem da resposta ao degrau unitário. Nos critérios IAE/ITSE e ISE, os zeros

estão localizados próximos de 0,00 e são aproximadamente iguais a dois polos. Isso influencia no amortecimento da resposta, diminuindo a máxima ultrapassagem. Isso é notório ao observar a Figura 5.13 e a Tabela 5.15. As sintonias pelos critérios IAE/ITSE e ISE são as que possuem os menores valores de máxima ultrapassagem, abaixo de 0,44%. A próxima sintonia com menor valor de máxima ultrapassagem é a de Siouris (1993) para a mecanização de segunda ordem, com 11,94%.

## 6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para validar os resultados obtidos no Capítulo 5, novas análises foram conduzidas valendo-se agora de dados reais coletados de um voo de uma aeronave comercial instrumentada com sistemas de navegação integrados da empresa Xsens (XSENS, 2018). O voo foi realizado no dia 23 de janeiro de 2018 no aeroporto de Nordhorn-Lingen, na Alemanha e os dados (brutos e pós-processados) dos sensores embarcados foram coletados e disponibilizados na internet. A aeronave utilizada no voo é apresentada na Figura 6.1, e os sensores embarcados (módulos MTi-G-710) mostrados na Figura 6.2 e especificados na Tabela 6.1 a 6.4.

Figura 6.1 – Aeronave utilizada para o teste.



Fonte: (XSENS, 2018).

Os módulos XSens MTi-G-710, mostrados na Figura 6.2, são compostos por diversos sensores de navegação, sendo os mais importantes para esse trabalho: acelerômetros, girômetros e barômetro. A trajetória efetivamente executada pela aeronave, a qual foi determinada a partir da solução pós-processada (pelo *software* MT Manager) do módulo integrado MTi-G-710, é ilustrada bi-dimensionalmente na Figura 6.3, e tri-dimensionalmente, na Figura 6.4. O voo da aeronave pode ser grosseiramente dividido em 13 trechos conforme especificado na Tabela 6.5.

Para fins de análise, os dados brutos (forças específicas, velocidades angulares e pressão atmosférica) obtidos por um dos módulos MTi-G-710 foram processados pelo *software* MT Manager e exportados em formato ".txt". O tratamento dos dados, as implementações das mecanizações do canal vertical e toda a análise dos resultados foram desenvolvidas no pro-



Figura 6.2 – Módulos XSens MTi-G-710 utilizados para a obtenção dos dados.



Fonte: (XSENS, 2018).

Tabela 6.1 – Especificações técnicas do girômetro.

Parâmetro	Valor	Unidade de Medida
Faixa de Medição Padrão	450	$^{\circ}/s$
<i>Bias</i> Repetibilidade	0,2	$^{\circ}/s$
<i>Bias</i> Instabilidade	10	$^{\circ}/h$
Banda Passante	415	Hz
Densidade de Ruído	0,01	$^{\circ}/s/\sqrt{Hz}$
Sensibilidade à Gravidade (Calibrado)	0,003	$^{\circ}/s/g$
Não-Ortogonalidade	0,05	$^{\circ}$
Não-Linearidade	0,01	%

Fonte: Adaptado de Xsens (2021).

Tabela 6.2 – Especificações técnicas do acelerômetro.

Parâmetro	Valor	Unidade de Medida
Faixa de Medição Padrão	200	$m/s^2$
<i>Bias</i> Repetibilidade	0,05	$m/s^2$
<i>Bias</i> Instabilidade	15	$\mu g$
Banda Passante	375	Hz
Densidade de Ruído	60	$\mu g/\sqrt{Hz}$
Não-Ortogonalidade	0,05	$^{\circ}$
Não-Linearidade	0,1	%

Fonte: Adaptado de Xsens (2021).



Tabela 6.3 – Especificações técnicas do barômetro.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade de Medida</b>
Faixa de Medição Total	300 - 1100	hPa
Ruído Total (RMSE)	3,6	Pa
Resolução ao Nível do Mar, 15°C	0,08	m

Fonte: Adaptado de Xsens (2021).

Tabela 6.4 – Desempenho da fusão dos sensores inerciais que compõem o MTi-G-710.

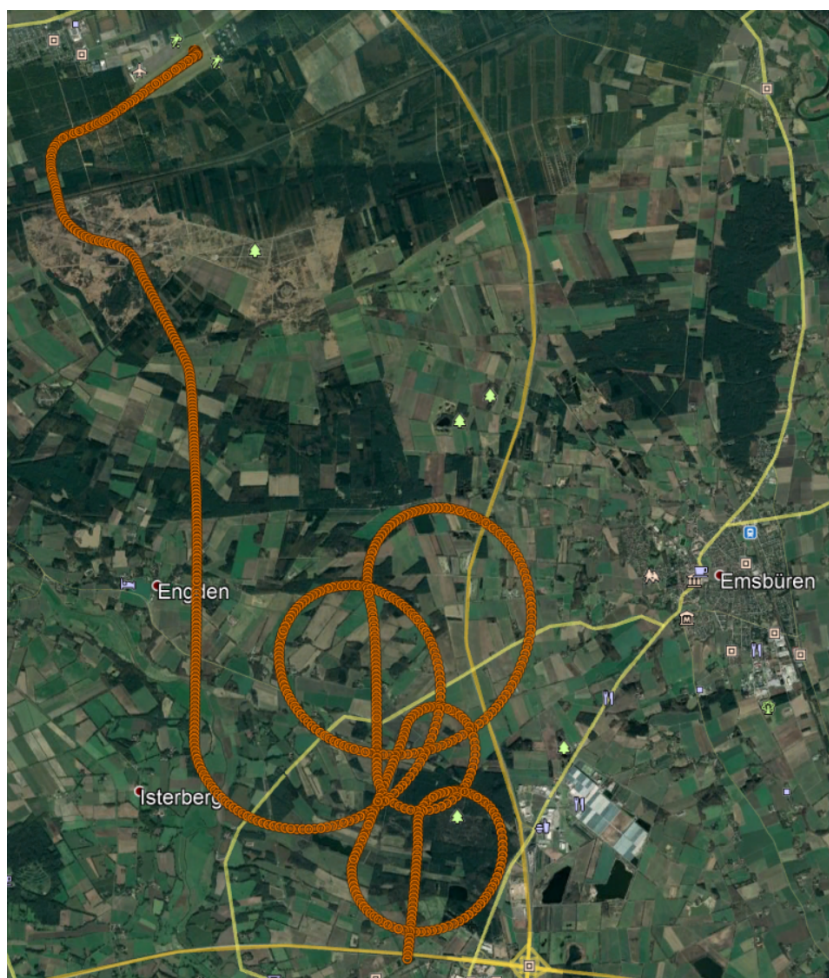
<b>Erros</b>	<b>Valor (RMSE)</b>	<b>Unidade de Medida</b>
Ângulo de Rolamento	0,2	°
Ângulo de Arfagem	0,2	°
Ângulo de Guinada	0,8	°
Posição	1,0	m
Velocidade	0,05	m/s

Fonte: Adaptado de Xsens (2021).

grama Matlab. Posteriormente, os resultados foram comparados com a solução pós-processada do próprio módulo integrado MTi-G-710, a qual foi considerada a solução de navegação de referência. Tal solução pôde ser considerada como tal, uma vez que o módulo MTi-G-710 integra não somente barômetros ao INS, mas também sensores adicionais, tais como receptores GNSS multi-constelação, magnetômetros, e algoritmos sofisticados de fusão sensorial, sendo a incerteza final de posicionamento do módulo descrita na Tabela 6.4. Para o cálculo do modelo atmosférico padrão da equação (3.1), definiu-se como pressão, temperatura e altitude de referência, os valores fornecidos pelo módulo MTi-G-710 no instante inicial da trajetória.

Com os dados de voo relativos à trajetória completa da aeronave, foram realizadas simulações das mecanizações do canal vertical previamente investigadas para a integração baroinercial. As simulações foram separadas em três conjuntos. O primeiro é composto pelas mecanizações de segunda ordem sintonizadas empiricamente por: Siouris (1993) e Titterton e Weston (2004) e via LQR. O segundo conjunto é composto pelas mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente por: Bekir (2007), Rogers (2003), Savage (2007) e Siouris (1993). O último conjunto é composto pelas mecanizações de terceira ordem sintonizadas via LQR e índices de desempenho (IAE/ITSE, ISE e ITAE). Os valores dos ganhos dessas sintonias são os mesmos apresentados nas Tabelas 5.5, 5.6, 5.9 e 5.12. Para cada conjunto, foram calculados erros em altitude e velocidade do canal vertical, os quais são ilustrados nas Figuras 6.5 a 6.10.

Figura 6.3 – Trajetória bi-dimensional da aeronave (voo completo).



Fonte: (XSENS, 2018).

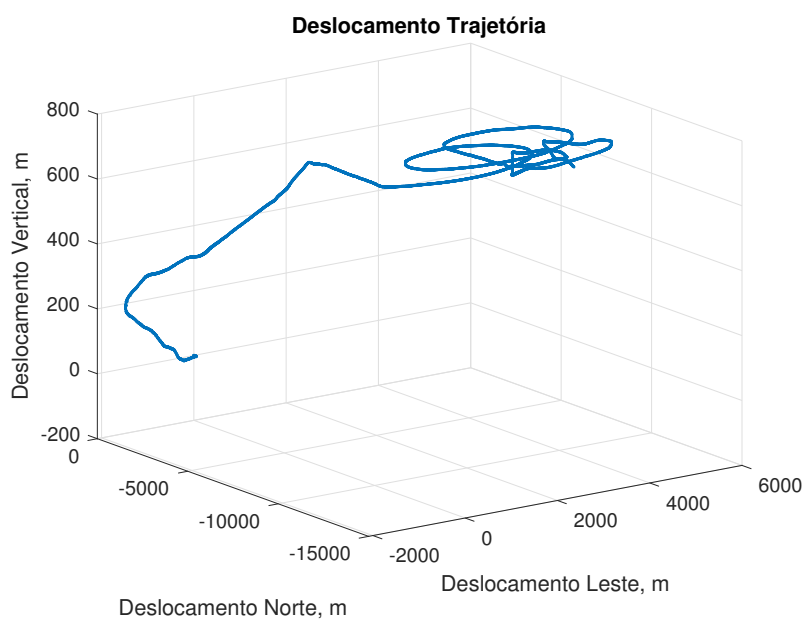
## 6.1 Mecanizações de Segunda Ordem

As Figuras 6.5 e 6.6 ilustram os erros em altitude e velocidade vertical, respectivamente, das mecanizações de segunda ordem, para o voo completo, cujos valores RMSE são apresentados na Tabela 6.6.

Pela Figura 6.5, nota-se que a mecanização sintonizada empiricamente por Titterton e Weston (2004) foi a que apresentou os menores erros em altitude dentre as mecanizações de segunda ordem e a sintonizada por Siouris (1993), os maiores erros. Na Figura 6.6, os erros em velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem apresentaram o mesmo comportamento, isto é, a sintonia de Titterton e Weston (2004) resultou nos menores erros, enquanto a de Siouris (1993), nos maiores.

Analisando os erros em altitude e velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem, nota-se que, os resultados obtidos com dados simulados e com dados experimentais apre-

Figura 6.4 – Trajetória tri-dimensional da aeronave (voo completo).



Fonte: Autor.

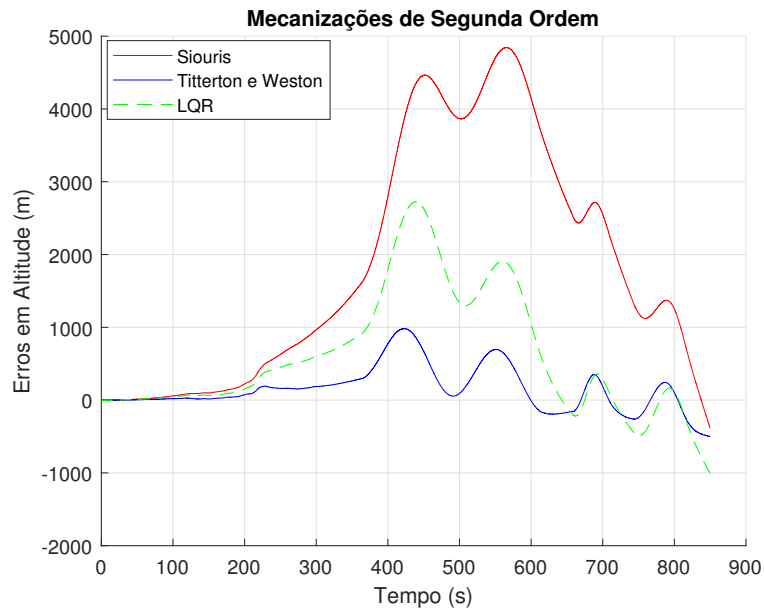
Tabela 6.5 – Trajetória do voo completo.

Trajétória	Instante Inicial (s)	Instante Final (s)
Estacionário	0	36000
Taxeamento	36000	46000
Decolagem	46000	55000
Subida reta 1	55000	71000
Subida em curva	71000	96000
Subida reta 2	96000	125000
Voo reto nivelado 1	125000	145000
Curva aberta a esquerda	145000	255000
Voo reto nivelado 2	255000	265000
Curva fechada esquerda	265000	287000
Voo reto nivelado 3	287000	298000
Subida em curva aberta a esquerda	298000	332000
Voo reto nivelado 4	332000	340000

Fonte: Adaptado de Xsens (2018).

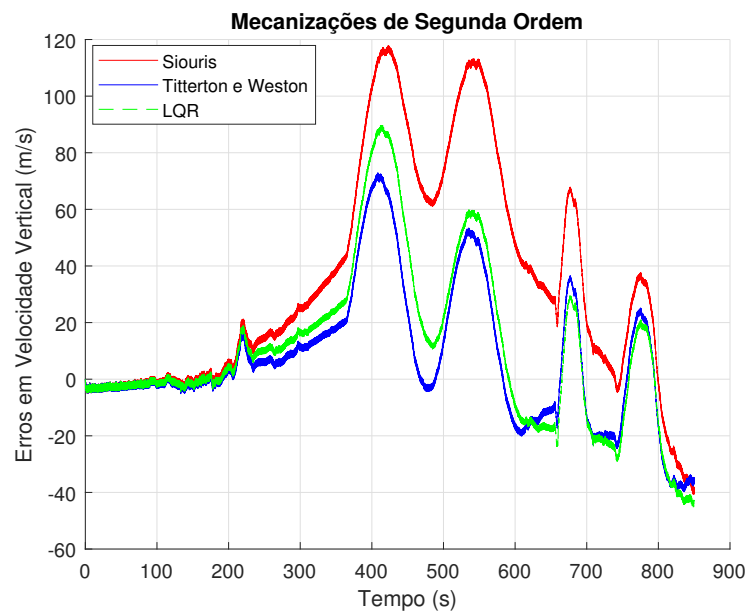
sentaram comportamentos similares. Em ambas as simulações, a sintonia de segunda ordem proposta por Titterton e Weston (2004) apresentou os menores erros em altitude e velocidade vertical dentre as demais. Além disso, os valores RMSE da sintonia também se mostraram inferiores, corroborando o que foi observado no Capítulo 5.

Figura 6.5 – Erros em altitude das mecanizações de segunda ordem - voo completo.



Fonte: Autor.

Figura 6.6 – Erros em velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem (voo completo).



Fonte: Autor.

## 6.2 Mecanizações de Terceira Ordem: Sintonias Empíricas

As Figuras 6.7 e 6.8 ilustram os erros em altitude e velocidade vertical, respectivamente, das mecanizações de terceira ordem, sintonizadas empiricamente, para o voo completo, cujos valores RMSE são apresentados na Tabela 6.7. Observando o desempenho das mecanizações,

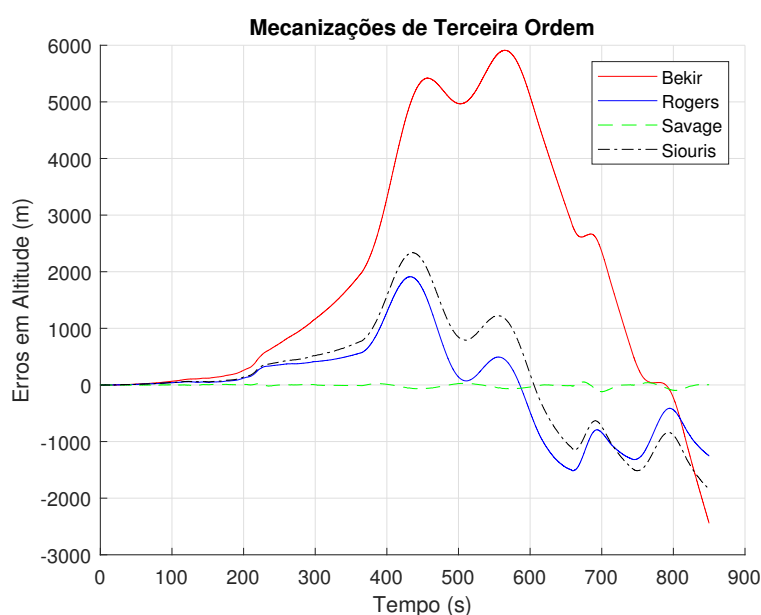
Tabela 6.6 – Valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações de segunda ordem (voo completo).

<b>Autor</b>	<b>Erro de Altitude (m)</b>	<b>Erro de Velocidade Vertical (m/s)</b>
(SIOURIS, 1993)	2447,80	51,54
(TITTERTON; WESTON, 2004)	337,06	24,86
LQR	1037,00	30,63

Fonte: Autor.

verifica-se que a sintonia proposta por Savage (2007) foi a que apresentou os menores erros em altitude e velocidade vertical.

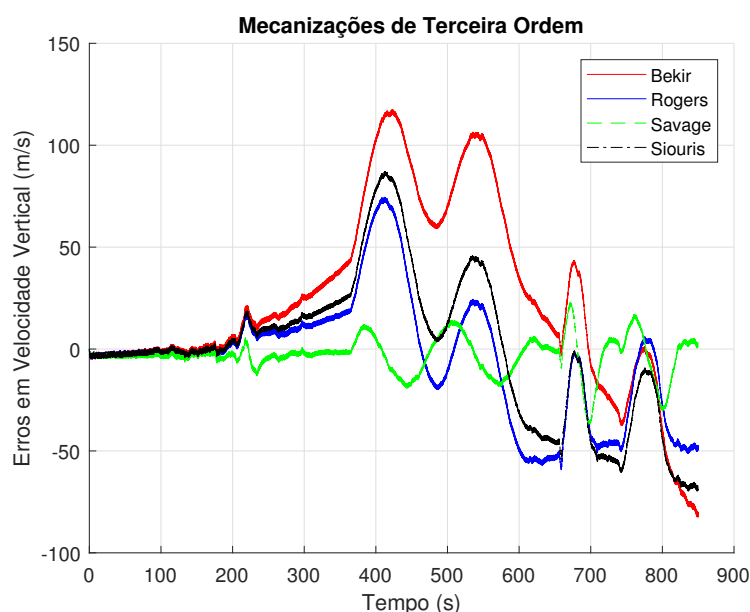
Figura 6.7 – Erros em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente - voo completo.



Fonte: Autor.

Analisando os valores RMSE em altitude da Tabela 6.7, nota-se que a sintonia proposta por Savage (2007) é significativamente superior, com valores quase 25 vezes menor do que os da segunda mecanização com menor valor RMSE em altitude. Isso é bem nítido ao observar a Figura 6.7. A sintonia sugerida por este autor possui erros próximos de zero, enquanto os erros das demais chegam a quilômetros. Ao avaliar os valores RMSE em velocidade vertical da Tabela 6.7, o erro da sintonia proposta por Savage (2007) possui valores quase 3 vezes menores do que a de Rogers (2003), segunda mecanização com menor valor RMSE em velocidade vertical. Esses resultados também corroboram o que foi evidenciado no Capítulo 5.

Figura 6.8 – Erros em velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas via controle ótimo - voo completo.



Fonte: Autor.

Tabela 6.7 – Valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente (voo completo).

Autor	Erro de Altitude (m)	Erro de Velocidade Vertical (m/s)
(BEKIR, 2007)	2934,50	50,67
(ROGERS, 2003)	801,77	30,00
(SAVAGE, 2007)	32,56	9,47
(SIOURIS, 1993)	988,21	35,15

Fonte:Autor.

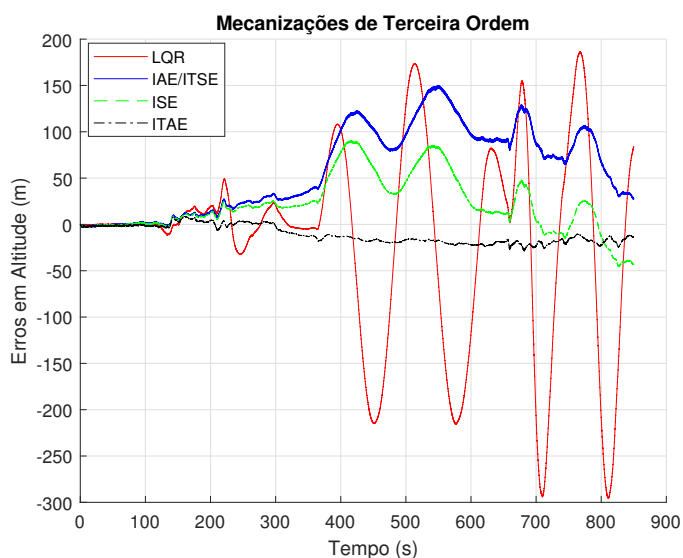
### 6.3 Mecanizações de Terceira Ordem: Sintonias Ótimas

As Figuras 6.9 e 6.10 ilustram os erros em altitude e velocidade vertical, respectivamente, das mecanizações de terceira ordem, sintonizadas via controle ótimo, para o voo completo, cujos valores RMSE são apresentados na Tabela 6.8.

Pela Figura 6.9, nota-se que a sintonia obtida via LQR resulta em uma resposta mal acomodada, enquanto a obtida via minimização do ITAE apresenta os menores valores de erros em altitude. O mesmo comportamento é observado na Figura 6.10, onde a mecanização sintonizada via ITAE resultou nos menores erros em velocidade vertical.

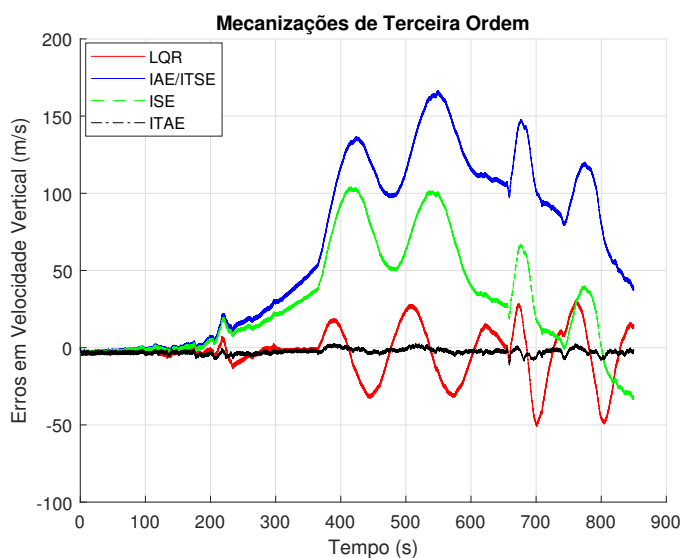
Analisando os valores RMSE em altitude da Tabela 6.8, nota-se que a sintonia utilizando a técnica ITAE apresentou valor mais de 2,5 vezes menor do que a técnica ISE, segunda técnica com menor valor RMSE em altitude. Isso é comprovado observando a Figura 6.9, em que a

Figura 6.9 – Erros em altitude das mecanizações de terceira ordem sintonizadas via controle ótimo - voo completo.



Fonte: Autor.

Figura 6.10 – Erros em velocidade vertical das mecanizações sintonizadas por controle ótimo (voo completo).



Fonte: Autor.

curva da primeira técnica possui baixa oscilação, mantendo seus valores mais acomodados. Ao analisar os valores RMSE em velocidade vertical, é notória a superioridade da sintonia pela técnica ITAE dentre as demais técnicas. Seu valor RMSE é quase 15 vezes menor do que a sintonia pela técnica ISE, que possui o segundo menor valor RMSE. Observando a Figura 6.10, nota-se que os erros em velocidade vertical pela técnica ITAE apresentam valores próximos de zero, enquanto as demais sintonias, resultam em comportamentos menos acomodados.

Tabela 6.8 – Valores RMSE em altitude e velocidade vertical das mecanizações de terceira ordem sintonizadas empiricamente (voo completo).

Método	Erro de Altitude (m)	Erro de Velocidade Vertical (m/s)
LQR	105,22	16,01
IAE/ITSE	75,10	86,92
ISE	36,83	45,57
ITAE	14,34	3,25

Fonte: Autor.

Pelas Tabelas 6.6, 6.7 e 6.8, é possível comparar o desempenho de estabilização do canal vertical de todas as mecanizações/sintonias investigadas neste trabalho. Como pode ser observado, dentre as mecanizações sintonizadas empiricamente, a de Savage (2007) é a que resultou no menor valor RMSE em altitude, a saber, 32,56 m, ao passo que as demais sintonias apresentaram esses erros mais de dez vezes maiores. Semelhantemente, dentre as sintonias empíricas, a proposta por Savage (2007) foi a que resultou no menor valor RMSE em velocidade vertical, a saber 9,47 m/s, enquanto as demais resultaram em erros superiores a 24 m/s.

Considerando-se as mecanizações sintonizadas via técnicas de controle ótimo, de forma geral, as obtidas via índices de desempenho resultaram em menores valores RMSE em altitude do que as obtidas via LQR (erros em altitude superiores a 100 metros). Dentre as mecanizações sintonizadas via índices de desempenho, a obtida via minimização do ITAE foi a que apresentou o melhor desempenho, com erro em altitude de 14,34 m. O mesmo comportamento foi verificado para os valores RMSE em velocidade vertical, os quais foram mínimos, a saber, 3,25 m/s, para mecanização sintonizada via ITAE, enquanto as demais sintonias ótimas resultaram em erros quase 5 vezes maiores. De maneira geral, portanto, a mecanização de terceira ordem sintonizada via ITAE foi a que apresentou o melhor desempenho dentre todas as sintonias, resultando em uma resposta estável, bem acomodada, não enviesada e com os menores erros em altitude e em velocidade vertical.

Recapitulando os resultados obtidos com dados simulados no Capítulo 5, a sintonia utilizando a técnica ITAE não foi a que obteve os melhores desempenhos, apresentando uma resposta um pouco mais oscilatória, especialmente para a velocidade vertical. Nos resultados simulados, na verdade, verificou-se que todas as mecanizações de terceira ordem sintonizadas pelos índices de desempenho e LQR resultaram em respostas muito próximas à sintonia empírica de Savage (2007). Algumas das razões relacionadas ao melhor desempenho da sintonia ITAE no caso real incluem:



- O índice ITAE, como já explicado no Capítulo 4, penaliza os erros que ocorrem em instante de tempo mais tardios, logo, ele resulta em uma sintonia que prioriza a eliminação de erros em regime permanente;
- No Capítulo 5, não foi considerado na simulação o efeito dos distúrbios externos (ventos) que eventualmente acometem os barômetros, uma vez que são distúrbios difíceis de se modelar. Já no caso real, esses distúrbios existem e podem ter interferido nos desempenhos das sintonias ótimas.

#### 6.4 Análise por Trecho

Para fins de confirmação/validação da superioridade individual da mecanização de terceira ordem sintonizada via ITAE, o voo completo da aeronave foi dividido/analísado em 13 trajetórias, conforme listado na Tabela 6.5. As Tabelas 6.9 e 6.10 apresentam os valores RMSE em altitude e velocidade vertical, respectivamente, de cada trajetória. A coluna "Sintonia 1" é composta pela mecanização/sintonia que apresentou os menores valores RMSE em altitude e velocidade vertical (Tabelas 6.9 e 6.10, respectivamente). Já a coluna "Sintonia 2" apresentam as sintonias que resultaram nos menores valores RMSE. Por fim, na coluna "Sintonia 3" elenca as mecanizações que apresentaram os terceiros menores valores RMSE.

Ao se analisar as sintonias com os menores valores RMSE em altitude nos trechos do voo apresentadas na Tabela 6.9, nota-se que as obtidas via índices de desempenho (IAE/ITSE, ISE e, especialmente, ITAE) se sobressaem. Considerando as treze trajetórias, em somente quatro dessas as sintonias via índices de desempenho não resultaram nos menores valores RMSE. Dentre essas quatro, três vezes foi a sugerida por Savage (2007) e uma via LQR de 3ª ordem.

Além disso, observa-se a clara superioridade da sintonia obtida via ITAE. Dos 13 trechos do voo, esse critério resultou no menor valor RMSE em altitude em 8 delas, sendo que, na maioria desses, seus valores são menos da metade do que a segunda sintonia com menor valor RMSE. No trecho "Curva fechada esquerda", por exemplo, a sintonia via índice ITAE apresentou valor RMSE em altitude de 2,712 m, enquanto a segunda mecanização com menor valor foi a ISE, com 14,195 m. Somente no trecho "Estacionário", a sintonia via ITAE não ficou entre as três sintonias com menores valores RMSE em altitude.

Por fim, analisando as sintonias com os menores valores RMSE em velocidade vertical nos trechos do voo, apresentados na Tabela 6.10, nota-se uma pulverização maior das mecanizações. As topologias propostas por Bekir (2007), Siouris (1993) de segunda ordem, Savage

Tabela 6.9 – Valores RMSE em altitude das melhores sintonias em cada trecho do voo.

Trecho	Sintonia 1	Sintonia 2	Sintonia 3
Estacionário - Valor RMSE (m)	LQR de 3ª ordem 0,886	ISE 1,203	IAE/ITSE 1,210
Taxeamento - Valor RMSE (m)	ITAE 1,070	ISE 2,321	IAE/ITSE 2,410
Decolagem - Valor RMSE (m)	ISE 0,842	IAE/ITSE 0,904	ITAE 1,798
Subida reta 1 - Valor RMSE (m)	ITAE 7,629	(SAVAGE, 2007) 10,950	ISE 12,277
Subida em curva - Valor RMSE (m)	IAE/ITSE 5,338	ISE 5,551	ITAE 5,753
Subida reta 2 - Valor RMSE (m)	ITAE 2,946	(SAVAGE, 2007) 5,395	ISE 6,712
Voo reto nivelado 1 - Valor RMSE (m)	IAE/ITSE 1,748	ISE 2,039	ITAE 4,904
Curva aberta a esquerda - Valor RMSE (m)	ITAE 5,314	ISE 5,981	(SAVAGE, 2007) 8,433
Voo reto nivelado 2 - Valor RMSE (m)	IAE/ITSE 3,157	ISE 3,186	ITAE 3,501
Curva fechada esquerda - Valor RMSE (m)	ITAE 2,712	ISE 14,195	IAE/ITSE 14,940
Voo reto nivelado 3 - Valor RMSE (m)	ITAE 3,434	ISE 7,914	IAE/ITSE 8,108
Subida em curva aberta a esquerda - Valor RMSE (m)	ITAE 4,545	ISE 11,475	IAE/ITSE 12,179
Voo reto nivelado 4 - Valor RMSE (m)	ITAE 5,909	ISE 9,529	IAE/ITSE 9,650

Fonte: Autor.

(2007), Titterton e Weston (2004), LQR de terceira ordem, e os índices de desempenho IAE/ITSE e ITAE foram as que mais estiveram entre as três sintonias com menores valores RMSE em trechos do voo. Somente a mecanização de Siouris (1993) de terceira ordem não apareceu nesta lista. Examinando a coluna "Sintonia 1" da Tabela 6.10, em todos os treze trechos, nota-se que as sintonias sugeridas/obtidas por Bekir (2007), Titterton e Weston (2004) e via ITAE foram as que apresentaram três vezes cada, os menores valores RMSE em velocidade vertical. Além disso, nota-se que os valores entre as três melhores sintonias são, em geral, próximos. No trecho "Voo reto nivelado 2", por exemplo, a diferença entre a sintonia sugerida por Bekir (2007) e a obtida via IAE/ITSE é de apenas 0,004 m/s.

De modo geral, portanto, avaliando as Tabelas 6.9 e 6.10 em conjunto, nota-se que a sintonia via índice de desempenho ITAE apresentou o melhor desempenho considerando cada trecho do voo separadamente. Na Tabela 6.9, a sintonia via ITAE foi nitidamente superior

Tabela 6.10 – Valores RMSE em velocidade vertical das melhores sintonias em cada trecho do voo.

<b>Trecho</b>	<b>Sintonia 1</b>	<b>Sintonia 2</b>	<b>Sintonia 3</b>
Estacionário - Valor RMSE (m/s)	IAE/ITSE 2,643	(BEKIR, 2007) 2,647	(SIOURIS, 1993) de 2ª ordem 2,651
Taxeamento - Valor RMSE (m/s)	(BEKIR, 2007) 0,996	(SIOURIS, 1993) de 2ª ordem 0,999	IAE/ITSE 1,004
Decolagem - Valor RMSE (m/s)	(BEKIR, 2007) 0,962	(SIOURIS, 1993) de 2ª ordem 0,964	IAE/ITSE 0,968
Subida reta 1 - Valor RMSE (m/s)	(TITTERTON; WESTON, 2004) 1,871	ISE 2,160	(ROGERS, 2003) 2,213
Subida em curva - Valor RMSE (m/s)	IAE/ITSE 3,949	(BEKIR, 2007) 4,000	(SIOURIS, 1993) de 2ª ordem 4,024
Subida reta 2 - Valor RMSE (m/s)	(TITTERTON; WESTON, 2004) 1,547	(ROGERS, 2003) 2,169	LQR 2ª ordem 2,482
Voo reto nivelado 1 - Valor RMSE (m/s)	(TITTERTON; WESTON, 2004) 0,747	(ROGERS, 2003) 0,943	ISE 0,981
Curva aberta a esquerda - Valor RMSE (m/s)	ITAE 2,111	(SAVAGE, 2007) 2,848	LQR 3ª ordem 4,240
Voo reto nivelado 2 - Valor RMSE (m/s)	(BEKIR, 2007) 3,594	(SIOURIS, 1993) de 2ª ordem 3,597	IAE/ITSE 3,598
Curva fechada esquerda - Valor RMSE (m/s)	ITAE 3,681	(SAVAGE, 2007) 4,970	LQR 3ª ordem 5,804
Voo reto nivelado 3 - Valor RMSE (m/s)	LQR 3ª ordem 2,270	(SAVAGE, 2007) 2,352	(TITTERTON; WESTON, 2004) 2,986
Subida em curva aberta a esquerda - Valor RMSE (m/s)	ITAE 2,734	(SAVAGE, 2007) 4,231	LQR 3ª ordem 5,333
Voo reto nivelado 4 - Valor RMSE (m/s)	(SAVAGE, 2007) 1,007	LQR 3ª ordem 1,361	ITAE 2,383

Fonte: Autor.

às demais mecanizações quanto aos valores RMSE em altitude. Já na Tabela 6.10, também foi uma das sintonias com menores valores RMSE em velocidade vertical. Esses resultados individualizados corroboram os obtidos na seção anterior, em que foi analisada a trajetória completa da aeronave.

## 7 CONCLUSÃO

Este trabalho investigou estratégias de estabilização do canal vertical de Sistemas de Navegação Inercial (INS), via integração barométrica. Foi apresentado um estudo com três diferentes mecanizações, sendo uma de segunda ordem e duas de terceira ordem. Além disso, foram investigadas técnicas de sintonia das mecanizações, tanto empíricas, conforme sugerido tradicionalmente na literatura, como baseadas em teoria de controle ótimo. Dentre essas últimas, duas técnicas foram preferencialmente exploradas, cujas implementações a análise constituem a principal contribuição deste trabalho, a saber: a sintonia via Regulador Quadrático Linear (LQR), e via minimização de índices/critérios de desempenho, em particular: a) Integral do Erro Absoluto (IAE); b) Integral do Erro Quadrático (ISE); c) Integral do Erro Absoluto multiplicado pelo Tempo; e d) Integral do Erro Quadrático multiplicado pelo Tempo (ITSE).

Para cada mecanização/sintonia, foi simulado o movimento de uma aeronave durante 418 segundos, em cima da qual foram gerados dados de sensores inerciais e barômetros, supostamente montados na aeronave. Erros de inicialização e de medição nesses sensores foram propositalmente inseridos a fim de se obter resultados condizentes com a realidade. A partir das informações da trajetória, foram calculados os erros em velocidade vertical e em altitude para cada mecanização/sintonia investigada. Para fins de validação dos resultados, foram realizados testes com dados experimentais para todas as mecanizações/sintonias de estabilização do canal vertical investigadas. Os dados foram obtidos a partir de um ensaio em voo realizado pela empresa Xsens e correspondem às leituras brutas e pós-processadas de um módulo de navegação integrada MTi-G-710 de fabricação da própria XSens.

A partir de gráficos dos erros em velocidade vertical e em altitude, foi possível observar que dentre as mecanizações sintonizadas empiricamente, somente a de terceira ordem sintonizada conforme Savage (2007) apresentou erros bem acomodados durante todo o período de simulação. As mecanizações sintonizadas via LQR e índices de desempenho apresentaram comportamentos muito semelhantes entre si, bem como a mecanização sintonizada conforme sugerida por Savage (2007), pelo menos para resultados simulados. Para os resultados experimentais, contudo, as mecanizações sintonizadas via LQR, IAE/ITSE e ISE resultaram em piores desempenhos, caracterizados por respostas pouco acomodadas, enviesadas, e mal estabilizadas. A mecanização do canal vertical sintonizada via minimização do ITAE, por sua vez, foi a que apresentou melhor desempenho, inclusive em relação à sintonia empírica proposta por Savage (2007).

Adicionalmente, foram levantados os parâmetros da resposta ao degrau de cada mecanização/sintonia, bem como realizada uma análise do lugar de suas raízes/polos. As mecanizações de segunda ordem foram as que resultaram nos menores valores de máxima ultrapassagem a despeito dos grandes valores de tempos de subida e acomodação. Já as mecanizações de terceira ordem sintonizadas por Savage (2007) e via índices de desempenho (ITAE, em especial), foram as que resultaram em respostas mais rápidas e acomodadas, a despeito de maiores valores de máxima ultrapassagem.

A análise do lugar das raízes das sintonias investigadas comprovou que essa característica está diretamente relacionada à resposta ao degrau das funções de transferência de cada sintonia, bem como suas estabilidades relativas. Todos os polos das sintonias apresentaram valor real negativo, comprovando a estabilidade teórica do sistema. Além disso, verificou-se que as sintonias via índices de desempenho possuem os menores tempos de subida e acomodação devido a localização de seus polos e zeros, além dos critérios IAE/ITSE e ISE possuírem sintonias amortecidas.

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe o estudo da estabilização do canal vertical em integrações baro-inerciais via filtro de Kalman. Outra sugestão consiste no estudo de novas técnicas de controle ótimo e/ou moderno para resolução do problema supracitado, tais como, o controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG) e  $H_2/H_\infty$ .

## REFERÊNCIAS

- AGOSTINO, M. D. A Multi-Frequency Filtering Procedure for Inertial Navigation. In: **2008 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1115–1121. ISSN 2153-358X.
- ALT, G. H.; LARGES, W. F. Controle em Tempo Real de Sistemas Dinâmicos através de Redes IP. In: **ISA Show**. São Paulo - SP: [s.n.], 2003.
- ASANOVIC, N. et al. Realization of Inertial Navigation System on Flight Computer for Unmanned Aerial Vehicle. **Military Technical Institute**, Belgrado, 06 2011.
- AUSMAN, J. S. et al. **Inertial Guidance**. Nova York: John Wiley and Sons, INC., 1962.
- BAO, X. et al. Barometer Measurement Error Modeling and Correction for UAH Altitude Tracking. In: **2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 3166–3171. ISSN 1948-9447.
- BEKIR, E. **Introduction to Modern Navigation Systems**. Singapura: World Scientific Publishing Company, 2007. ISBN 981-270-765-4, 978-981-270-765-9.
- BISTROV, V.; KLUGA, A. MEMS INS/GPS Data Fusion Using Particle Filter. **Electronics And Electrical Engineering**, v. 112, p. 1392–1215, 06 2011.
- BLANCHARD, R. L. A New Algorithm for Computing Inertial Altitude and Vertical Velocity. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, AES-7, n. 6, p. 1143–1146, Novembro 1971. ISSN 0018-9251.
- BRITTING, K. R. **Inertial Navigation Systems Analysis**. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc, 1971. ISBN 047110485X,9780471104858.
- CANNON, E. et al. Low-Cost INS/GPS Integration: Concepts and Testing. **The Journal of Navigation**, v. 54, p. 119 – 134, 01 2001.
- CARMO, M. J. do. **Ambiente Educacional Multifuncional Integrado para Sintonia e Avaliação do Desempenho de Malhas Industriais de Controle**. [S.l.]: Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, 2006.
- CHAMBERS, A. et al. Robust Multi-Sensor Fusion for Micro Aerial Vehicle Navigation in GPS-Degraded/Denied Environments. In: **2014 American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1892–1899.
- CHUERUBIM, M. L. Utilização do Software MAPGEO 2010 como Recurso Didático no Estudo das Superfícies e Referenciais Geodésicos Adotados em Geodésia. **Revista Geográfica Acadêmica**, p. 31–47, 2013.
- EL-RABBANY, A.; EL-DIASTY, M. An Efficient Neural Network Model for De-Noising of MEMS-Based Inertial Data. **Journal of Navigation**, Cambridge University Press, v. 57, n. 3, p. 407–415, 2004.
- FARRELL, J. **Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors**. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Professional, 2008. ISBN 9780071493291,0071493298.
- FERMINO, F. **Estudo Comparativo de Métodos de Sintonia de Controladores PID**. [S.l.]: Universidade de São Paulo - USP, 2014.

FIDELES, A. H. **Estado de Arte de Sistema de Controle e Algumas Ferramentas Computacionais para Avaliação de Desempenho de Malhas de Controle**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, 2014.

GOBATO, R. **A Indicatriz Liotrópica**. Londrina - PR: Universidade Estadual de Londrina, 2012.

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P.; BARTONE, C. G. **Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 2013. ISBN 978-1-118-44700-0.

GROVES, P. D. **Principles of Integrated Navigation**. [S.l.]: Course Notes, QinetiQ Ltd., 2002.

GROVES, P. D. **Principles of GNSS, Inertial, and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems**. 2. ed. [S.l.]: Artech House, 2013. ISBN 978-1-60807-005-3.

IBGE. **O Novo Modelo de Ondulação Geoidal do Brasil MAPGEO2015**. Rio de Janeiro - RJ: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, 2015. Disponível em: <[ftp://geofp.ibge.gov.br/modelos\\_digitais\\_de\\_superficie/modelo\\_de\\_ondulacao\\_geoidal/cartograma/rel\\_mapgeo2015.pdf](ftp://geofp.ibge.gov.br/modelos_digitais_de_superficie/modelo_de_ondulacao_geoidal/cartograma/rel_mapgeo2015.pdf)>.

IBGE. **Manuais Técnicos em Geociências número 14: Acesso e Uso de Dados Geoespaciais**. Rio de Janeiro - RJ: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, 2019.

ICAO. **Manual of the ICAO Standard Atmosphere**. 3rd. ed. [S.l.]: Canda: International Civil Aviation Organization, 1994.

IMAGERY, N.; AGENCY, M. Book. **Department of Defense World Geodetic System 1984 : Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems**. 3rd ed. ed. [S.l.]: National Imagery and Mapping Agency Bethesda, MD, 1997.

JEKELI, C. **Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications**. 1. ed. [S.l.]: De Gruyter, 2000. ISBN 3110159031,9783110159035.

KARNICK, D. et al. Honeywell Gun-Hard Inertial Measurement Unit (IMU) Development. In: **PLANS 2004. Position Location and Navigation Symposium (IEEE Cat. No.04CH37556)**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 49–55.

KAYTON, M.; FRIED, W. R. **Avionics Navigation Systems**. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc, 1997.

KEMPE, V. **Inertial MEMS: Principles and Practice**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 0521766583,9780521766586.

KIRK, D. E. **Optimal Control Theory: An Introduction**. [S.l.]: Dover Publications, 2004. ISBN 9780486434841,0-486-43484-2.

KUBRAK, D.; MACABIAU, C.; MONNERAT, M. Performance Analysis of MEMS Based Pedestrian Navigation Systems. In: **ION GNSS 2005, 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation**. Long Beach, United States: [s.n.], 2005. p. 2976–2986.

LAGO, I. F. do; FERREIRA, L. D. D.; KRUEGER, C. P. GPS e GLONASS: Aspectos Teóricos e Aplicações Práticas. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 8, n. 2, 2002.

LAWRENCE, A. **Modern Inertial Technology: Navigation, Guidance, and Control**. 2nd. ed. Springer, 1998. (Mechanical Engineering Series). ISBN 9780387985077,0387985077. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=fa0e1534a2fd9e63d39868d6b79fa158>>.

LIMA, S. R. S. de. **Integração GPS/INS Utilizando Sensores Inerciais baseados em Sistemas Microeletromecânicos (MEMS)**. Curitiba: UFPR, 2005.

MAGNUSSON, N.; ODENMAN, T. Improving Absolute Position Estimates of an Automotive Vehicle Using GPS in Sensor Fusion. In: **Chalmers University of Technology**. Sweden: [s.n.], 2012.

NISE, N. S. **Control Systems Engineering, 6th Edition**. 6th. ed. [S.l.]: John Wiley, 2010. ISBN 0470547561,9780470547564,0470917695,9780470917695.

NORGIA, M.; DONATI, S. Hybrid Opto-Mechanical Gyroscope with Injection-Interferometer Readout. **Electronics Letters**, v. 37, n. 12, p. 756–758, Junho 2001. ISSN 0013-5194.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.]: Prentice Hal, 1993.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 5. ed. [S.l.]: Prentice Hal, 2010. ISBN 978-0136156734.

OLIVEIRA, D. F. de. **Implementação de um Sistema de Navegação INS/GPS, Aplicado a Agricultura de Precisão**. [S.l.]: Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2012.

OSDER, S. S. **Air-Data Systems**. 2nd. ed. [S.l.]: New York: Wiley, 1997. 393-425 p.

PANOEIRO, N. M. et al. Índices não Intrusivos Utilizados no Ensino de Controle com Técnicas de Identificação em Malha Aberta. In: **XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - COBENGE**. Belém - PA: [s.n.], 2012.

PINTO, P. V. da S. **Determinação de uma Superfície Geoidal Local Através de Posicionamento GNSS**. Belém - PA: Universidade Federal Rural da Amazônia - UFRA, 2018.

ROGERS, J. A. S. R. M. **Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems**. 2nd. ed. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003. (AIAA Education Series). ISBN 9781563476563,1563476568.

SABATINI, A.; GENOVESE, V. A Stochastic Approach to Noise Modeling for Barometric Altimeters. **Sensors (Basel, Switzerland)**, v. 13, p. 15692–15707, Novembro 2013.

SABATINI, A.; GENOVESE, V. A Sensor Fusion Method for Tracking Vertical Velocity and Height Based on Inertial and Barometric Altimeter Measurements. **Sensors (Basel, Switzerland)**, v. 14, p. 13324–47, 08 2014.

SANTANA, D. D. S. **Navegação Terrestre Usando Unidade de Medição Inercial de Baixo Desempenho e Fusão Sensorial com Filtro de Kalman Adaptativo Suavizado**. São Paulo: USP, 2011.

SANTOS, C. P.; VIEIRA, M. E. M.; JR, S. L. S. Sensores Inerciais Aplicados à Marcha Humana no Esporte. In: **SEA - Seminário de Eletrônica e Automação**. [S.l.: s.n.], 2016.



SAVAGE, P. G. **Strapdown Analytics**. [S.l.]: Strapdown Associates, 2007. v. 1.

SEO, J.; LEE, J. G.; PARK, C. G. Bias Suppression of GPS Measurement in Inertial Navigation System Vertical Channel. In: **PLANS 2004. Position Location and Navigation Symposium (IEEE Cat. No.04CH37556)**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 143–147.

SILVA, F. O. e. et al. Tuning Techniques Evaluation for Satellite Launch Vehicle Attitude Controllers. **Journal of Aerospace Technology and Management**, Scielo, v. 11, 00 2019. ISSN 2175-9146. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2175-91462019000100400&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-91462019000100400&nrm=iso)>.

SILVA, I.; SEGANTINE, P. **Topografia para Engenharia: Teoria e Prática para Geomática**. 1. ed. [S.l.]: Elsevier, 2015.

SILVA, R. M. da; SILVA, J. dos Santos Vila da; FREITAS, A. R. de. Análise de Posicionamento Absoluto com GPS de Navegação no Pantanal pós-desligamento da Disponibilidade Seletiva. In: **III Simpósio sobre Recursos Naturais e Sócio-econômicos do Pantanal**. [S.l.: s.n.], 2000.

SIOURIS, G. **Aerospace Avionics Systems: A Modern Synthesis**. [S.l.]: Academic Press, 1993. ISBN 9780126468908,0126468907.

SKALLOUD, J.; BRUTON, A. M.; SCHWARZ, K. P. Detection and Filtering of Short-Term (1/f) Noise in Inertial Sensors. **Navigation**, v. 46, n. 2, p. 97–107, 1999.

SOKOLOVIC, V.; DIKIC, G.; STANCIC, R. Integration of INS, GPS, Magnetometer and Barometer for Improving Accuracy Navigation of the Vehicle. **Defence Science Journal**, v. 63, p. 451–455, 09 2013.

STIELER, B.; WINTER, H. **AGARD Flight Test Instrumentation Series. Volume 15. Gyroscopic Instruments and Their Application to Flight Testing**. [S.l.]: Defense Technical Information Center, 1982.

TANIGAWA, M. et al. Drift-Free Dynamic Height Sensor using MEMS IMU Aided by MEMS Pressure Sensor. In: **2008 5th Workshop on Positioning, Navigation and Communication**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 191–196.

TITTERTON, D. H.; WESTON, J. L. **Strapdown Inertial Navigation Technology**. 2nd edition. ed. [S.l.]: Institution of Engineering and Technology, 2004. ISBN 978-1-59124-892-7,978-0-86341-358-2.

VIEIRA, L. A. et al. Performance Indices-based Tuning for Barometer-aided Inertial Navigation Systems. In: **2020 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2020 Brazilian Symposium on Robotics (SBR) and 2020 Workshop on Robotics in Education (WRE)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 1–6.

WIDNALL, W. S.; SINHA, P. K. Optimizing the Gains of the Baro-Inertial Vertical Channel. **Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM**, v. 3, p. 172–178, Março 1980.

WOOLVEN, S.; REID, D. B. IMU Noise Evaluation for Attitude Determination and Stabilization in Ground and Airborne Applications. In: **Proceedings of 1994 IEEE Position, Location and Navigation Symposium - PLANS'94**. [S.l.: s.n.], 1994. p. 817–822.

XSENS. **Flying High With The Xsens Test Team**. 2018. Disponível em : <<https://www.xsens.com/blog/flying-high-with-the-xsens-test-team>>. Acesso em: 20 janeiro 2021.

XSENS. **MTi-G-710 GNSS/INS**. 2021. Disponível em : <<https://www.xsens.com/mti-g-710?hsCtaTracking=697fb129-6ba5-4609-84fd-052727503045%7Cf06e52c5-d627-46ba-b294-234c0aaec0b7>>. Acesso em: 20 junho 2021.

ZHANG, M. et al. Robust Height Tracking by Proper Accounting of Nonlinearities in an Integrated UWB/MEMS-based-IMU/Baro System. In: **Proceedings of the 2012 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 414–421.

ZHANG, P. et al. Navigation with IMU/GPS/Digital Compass with Unscented Kalman Filter. In: **IEEE International Conference Mechatronics and Automation, 2005**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 3, p. 1497–1502 Vol. 3.