



JOSÉ TARCISO SOUZA SILVA JUNIOR

**FENÔMENOS COSMOLÓGICOS POR MEIO DA
GRAVITAÇÃO $f(Q)$**

LAVRAS – MG

2021

JOSÉ TARCISO SOUZA SILVA JUNIOR

FENÔMENOS COSMOLÓGICOS POR MEIO DA GRAVITAÇÃO $f(Q)$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo
Orientador

LAVRAS – MG

2021

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

Junior, José Tarciso Souza Silva
Fenômenos Cosmológicos por meio da Gravitação $f(Q)$
/ José Tarciso Souza Silva Junior. – Lavras : UFLA, 2021.
104 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade
Federal de Lavras, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo.
Bibliografia.

1. Tensor de não-metricidade. 2. Geometria de Weyl.
3. Gravidade modificada. 4. Cosmologia. 5. *Big bounce*. I.
Bufalo, Rodrigo Santos. II. Título.

JOSÉ TARCISO SOUZA SILVA JUNIOR

FENÔMENOS COSMOLÓGICOS POR MEIO DA GRAVITAÇÃO $f(Q)$

COSMOLOGICAL PHENOMENA THROUGH GRAVITATION $f(Q)$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, área de concentração em Física de Partículas e Campos, para obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 28 de Maio de 2021.

Prof. Dr. Gilson Dallabona UFLA
Profª. Dra. Tatiana Ramos Cardoso UFLA
Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto UNIFAL-MG



Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo
Orientador

LAVRAS - MG

2021

Dedico este trabalho aos meus familiares, em especial à minha mãe e ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional que me proporcionaram. Mas, em especial eu sou extremamente agradecido aos meus pais e meu irmão por todo o amor e amparo transmitido. Obrigado por tudo.

Sou imensamente agradecido a minha namorada Mery Miranda, por todo companheirismo durante este mestrado, pois sempre esteve disposta para ouvir sobre a minha pesquisa e também pelos conselhos nos momentos difíceis que foram determinantes para eu nunca desanimar.

Deixo o meu muito obrigado ao Dimas Jackson, por sempre está disponível em tirar minhas dúvidas, pelas conversas que tivemos, por me aconselhar com palavras que sempre me davam forças para prosseguir no mestrado e pelos momentos de risadas que com certeza deixaram o ambiente da pós-graduação mais leve e amistoso. Muito grato pela sua amizade meu amigo.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo por todo o conhecimento transmitido, pela paciência e compreensão perante as minhas dificuldades. E pelas críticas que sempre almejavam o melhor deste trabalho, as quais contribuíram de forma significativa para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Agradeço aos meus amigos Marcos Paulo, Ramon Alfaia, José Romão, Jesus Nunes, Paulo André, Juliana Dias, Nayara Ferreira e Pablo Lima, por todos os conselhos, incentivos, companheirismo e conversas.

Gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora, que aceitaram o convite para participar desta dissertação com as suas sugestões.

Agradeço a UFLA e ao DFI pela oportunidade e acolhimento. Aos professores do DFI por todos os ensinamentos transmitidos durante as disciplinas e pelas conversas.

Ao programa de pós-graduação em Física.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Imensamente agradecido, com os melhores cumprimentos!

“Nada é tão maravilhoso que não possa existir, se admitido pelas leis da Natureza.”

(Michael Faraday)

RESUMO

A teoria da Relatividade Geral (RG) descreve a interação gravitacional de maneira bastante satisfatória até em níveis cosmológicos, com impressionante concordância com observações experimentais. Todavia, ela apresenta alguns problemas na descrição de alguns fenômenos gravitacionais, principalmente no que concerne à formação de estruturas em nosso universo, presença de singularidades, descrição e interpretação de alguns constituintes, dentre outros. A fim de sanar essas dificuldades, teorias alternativas têm sido propostas nas últimas décadas, em geral modificações mínimas da teoria de Einstein. Em particular, a descrição de fenômenos gravitacionais a partir de geometrias alternativas a geometria riemanniana têm recebido grande atenção. Ao invés do formalismo ser construído em termos da geometria riemanniana e do tensor de curvatura, é possível desenvolver modelos análogos à relatividade geral em termos da geometria de Weitzenböck e do tensor de torção, conhecida como teoria teleparalela, ou ainda em termos da geometria de Weyl e do tensor de não-metricidade, cujo modelo é conhecido como teoria teleparalela simétrica. Esses dois modelos podem ser formulados a partir de uma teoria de *gauge*, cujo grupo de simetria é o grupo de translações, o que garante uma grande diferença no desenvolvimento formal desses modelos em diversos contextos. Após um grande interesse na análise de modelos envolvendo a torção \mathbb{T} , recentemente a teoria alternativa e análoga em termos do tensor de não-metricidade \mathbb{Q} tem sido considerada em algumas análises devido a possibilidade de acoplamentos mais gerais do que aqueles do tensor de torção. Desta forma, aproveitamos a possibilidade de explorar novos fenômenos gravitacionais no contexto da teoria teleparalela simétrica neste trabalho. Portanto, neste trabalho revisamos os principais pontos envolvendo a descrição do universo em relação a alguns fenômenos cosmológicos, e a aplicação do modelo $f(\mathbb{Q})$ na descrição do fenômeno de “*big bounce*”.

Palavras-chave: Tensor de não-metricidade. Geometria de Weyl. Gravidade modificada. Cosmologia. *Big bounce*.

ABSTRACT

The General Relativity (GR) theory describes the gravitational interaction quite satisfactorily even at cosmological levels, with impressive agreement with experimental observations. However, it presents some problems in the description of some gravitational phenomena, mainly with regard to the formation of structures in our universe, the presence of singularities, description and interpretation of some constituents, among others. In order to remedy these difficulties, alternative theories have been proposed in recent decades, in general minimal modifications to Einstein's theory. In particular, the description of gravitational phenomena from alternative geometries to Riemannian geometry has received great attention. Instead of formalism being constructed in terms of Riemannian geometry and curvature tensor, it is possible to develop models analogous to general relativity in terms of Weitzenböck geometry and torsion tensor, known as teleparallel theory, or in terms of Weyl geometry and the non-metricity tensor, whose model is known as symmetric teleparallel theory. These two models can be formulated based on a *gauge* theory, whose symmetry group is the translation group, which guarantees a big difference in the formal development of these models in different contexts. After a great interest in the analysis of models involving the \mathbb{T} torsion, recently the alternative and analogous theory in terms of the non-metricity tensor \mathbb{Q} has been considered in some analyzes due to the possibility of more general couplings than those of the torsion tensor. In this way, we took advantage of the possibility of exploring new gravitational phenomena in the context of the symmetrical teleparallel theory in this work. Therefore, in this work we review the main points involving the description of the universe in relation to some cosmological phenomena, and the application of the $f(\mathbb{Q})$ model in the description of the phenomenon of "big bounce".

Keywords: Non-metricity tensor. Weyl geometry. Modified gravity. Cosmology. *Big bounce*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Referenciais inerciais.	19
Figura 2.2 – Representação do cone de luz.	25
Figura 2.3 – Transporte paralelo de vetores sobre uma superfície curva bidimensional.	29
Figura 2.4 – Transporte paralelo de vetores.	33
Figura 2.5 – As três possíveis geometrias do Universo através da métrica FRW. a. $k = 1$ representa um Universo esférico fechado, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e o comprimento das circunferências são menores que $2\pi r$. b. $k = 0$ Universo plano, geometria euclidiana com Universo de dimensão infinita. c. $k = -1$ Universo hiperbólico aberto de tamanho infinito, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e o comprimento das circunferências são maiores que $2\pi r$	41
Figura 3.1 – Subclasses da geometria métrica-afim, dependendo das propriedades da conexão.	48
Figura 3.2 – A rotação de um vetor transportado ao longo de uma curva fechada é dada pela curvatura na geometria riemanniana.	51
Figura 3.3 – O não fechamento do circuito formado quando comparamos o vetor transportado paralelamente sob efeito de torção com a sua condição inicial no mesmo ponto.	56
Figura 3.4 – A variação do comprimento de um vetor transportado é dada pelo tensor de não-metricidade: Equivalente Teleparalelo Simétrico da Relatividade Geral.	65
Figura 4.1 – Função de onda do Universo.	87
Figura A1 – Evolução do campo t^μ (fluxo temporal) através da foliação do espaço-tempo sobre hipersuperfícies espaciais.	100

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	ASPECTOS DA RELATIVIDADE GERAL	17
2.1	Relatividade Restrita	17
2.1.1	Geometria Euclidiana	17
2.2	Relatividade Geral	25
2.2.1	Geodésicas e tensor de curvatura	31
2.2.2	Equações de campo de Einstein	34
2.3	Cosmologia	38
2.3.1	Métrica de Robertson-Walker	40
3	GEOMETRIA E MODELOS EQUIVALENTES	47
3.1	Formulações equivalentes	47
3.2	Objetos geométricos	49
3.3	Relatividade Geral	50
3.3.1	Ação da teoria da Relatividade Geral	51
3.3.2	Extensões da relatividade geral: a teoria $f(R)$	52
3.3.2.1	Formalismo Métrico	53
3.3.2.2	Formalismo de Palatini	54
3.4	Teoria teleparalela	55
3.4.1	Geometria de Weitzenböck	55
3.4.2	Noções matemáticas	57
3.4.3	Transporte paralelo e teleparalelismo	58
3.4.4	Ação e equações de campo	60
3.5	Teoria teleparalela simétrica	64
3.5.1	Geometria de Weyl	65
3.5.2	Noções matemáticas	65
3.5.3	Equações de campo	68
4	<i>BOUNCING</i> COSMOLÓGICO NA TEORIA $f(Q)$	71
4.1	Motivações à proposta <i>bouncing</i>	71
4.1.1	O problema do Horizonte	73
4.1.2	Teoria inflacionária	74
4.1.3	Proposta alternativa aos modelos inflacionários	76

4.2	Uma breve discussão sobre <i>Loop Quantum Cosmology</i>	77
4.3	Teoria $f(Q)$ e as equações de movimento	78
4.4	<i>Bouncing</i> Cosmológico a partir do método de redução de ordem	80
4.5	Cosmologia quântica na teoria $f(Q)$ e função de onda para o Universo	82
4.6	Formalismo Hamiltoniano	84
5	CONCLUSÃO	88
	REFERÊNCIAS	92
	APENDICE A – 1 Formalismo ADM da Relatividade Geral e equação de Wheeler-DeWitt	99

1 INTRODUÇÃO

O papel da geometria, seja da geometria tridimensional euclideana da física newtoniana ou ainda da geometria multidimensional da teoria de cordas, foi sempre de grande destaque na física. Podemos encontrar aplicações da geometria nas mais diferentes áreas da física como uma elegante formulação dos problemas. De fato a formulação de leis físicas no contexto de geometria tem se mostrado extremamente profícua, uma vez que o conteúdo de simetria se torna evidente e também comum em diferentes contextos. Em geral todas as formulações de problemas modernos da física buscam estabelecer justamente uma descrição geométrica, vista a robustez desta formulação. Um dos exemplos mais célebres dessa abordagem geométrica são as teorias de *gauge*, seja a eletrofraca ou gravitacional, todas podem ser formuladas na teoria de fibrados, sendo que a diferença entre elas nesse contexto se resume à escolha do conteúdo de simetria que cada uma possui (FELSAGER, 1998).

Podemos dizer, que após os trabalhos de Minkowski, o grande marco científico no uso de geometria na descrição de um sistema físico é devido à proposta de Einstein, em 1915, da interação gravitacional em termos da teoria da relatividade geral. A teoria da relatividade geral descreve a gravitação a partir da curvatura do espaço-tempo, sendo a geometria riemanniana a estrutura matemática presente nesta formulação. No desenvolvimento desta teoria, Einstein recorreu ao princípio da equivalência para estabelecer que referenciais acelerados poderiam ser análogos a referenciais em repouso em um campo gravitacional. Desta forma, Einstein estabeleceu que a gravitação é uma propriedade peculiar da geometria do espaço-tempo, tal que a matéria-energia do universo seria responsável pela curvatura do espaço-tempo. A fenomenologia da relatividade geral é extremamente rica, e suas previsões foram aplicadas em diversas observações e experimentos com enorme precisão (WILL, 2014). Podemos citar ainda recentemente as observações das ondas gravitacionais geradas a partir da colisão de buracos negros (ABBOTT et al., 2016) e também a verificação direta da própria existência dos buracos negros (EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION et al., 2019).

Apesar do sucesso na descrição de diversos fenômenos, a relatividade geral apresenta limitações na compreensão e descrição de alguns fenômenos do Universo. Por exemplo, através de dados observacionais, temos boas evidências de que o Universo está expandindo de forma acelerada e que o mesmo é formado por aproximadamente 95% das

enigmáticas energia escura e matéria escura, sendo apenas 5% a contribuição de matéria bariônica (RYDEN, 2017). Embora o modelo cosmológico padrão consiga responder até certo ponto o conteúdo de energia escura a partir da presença da constante cosmológica (embora não explique a sua origem), o problema de matéria escura permanece sem solução satisfatória (BERTONE; HOOPER, 2018). Temos ainda o problema da existência da singularidade inicial do espaço-tempo (KOLB; TURNER, 1990), além da tensão de Hubble (FREEDMAN, 2017) e da tensão σ_8 (BATTYE; CHARNOCK; MOSS, 2015).

Diante desses problemas muitas abordagens alternativas à relatividade geral foram sugeridas para resolvê-las, por exemplo, os cenários com dimensões extras, ou campos adicionais, ou outras geometrias não-riemannianas, ou ainda conteúdo de simetrias modificadas (SOTIRIOU, 2007; FARAONI, 2013; NOJIRI; ODINTSOV; OIKONOMOU, 2017). De fato, apenas alguns anos após a sua proposta, Weyl em 1918 foi o primeiro a apresentar uma modificação da relatividade geral, em sua tentativa de unificação entre a gravitação e o eletromagnetismo (GOENNER, 2004; GOENNER, 2014). Uma generalização direta da relatividade geral é a chamada de teoria $f(R)$, que apresenta termos adicionais do tensor de curvatura (R). Podemos dizer que esta proposta pode encontrar motivação em diversos modelos fenomenológicos anteriores que apresentam termos não-lineares da curvatura, por exemplo a teoria inflacionária de Starobinsky R^2 , ou ainda com os contra-termos (de derivadas de ordem-superior) no processo de renormalização da teoria gravitacional quântica R^2 e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, etc. De fato, as teorias modificadas $f(R)$ tem grande apelo fenomenológico, e são grandes candidatas para descrever os problemas das exóticas energia escura e matéria escura sem a inclusão de componentes hipotéticas (SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

Por outro lado, sabemos de geometria diferencial que existem outros objetos geométricos capazes de descrever geometria não-euclidianas além da curvatura (SHAPIRO, 2019), dentre eles o tensor de torção e o de não-metricidade. Desta forma, podemos tomar uma abordagem distinta, e construir teorias alternativas à relatividade ao usarmos geometrias diferentes. Num primeiro momento, podemos desenvolver modelos a partir destas outras geometrias que sejam equivalentes à gravitação de Einstein, onde os efeitos gravitacionais são atribuídos à torção (T) (HEHL et al., 1976) e a não-metricidade (Q) (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019). E desta forma oferecem uma visão completamente nova aos fenômenos gravitacionais. Dentre as

principais diferenças conceituais entre a relatividade e essas teorias alternativas em termos da torção e não-metricidade é que a estrutura geométrica delas é de fato uma teoria de *gauge*.

O primeiro exemplo é conhecido como teoria teleparalela, sendo que os efeitos gravitacionais são atribuídos ao tensor de torção, e que para certa configuração é equivalente à teoria de Einstein (ALDROVANDI; PEREIRA, 2013). Dentre as particularidades dessa teoria está a sua formulação intrinsecamente em termos de uma teoria de *gauge*. No teleparalelismo é considerado um transporte paralelo de forma absoluta ou seja, não depende do caminho pelo qual o vetor transcorre uma variedade. O tensor de torção tem grande destaque ao ser intrinsecamente relacionado com o spin, logo na descrição de campos fermiônicos em espaços curvos, por exemplo, necessariamente a torção é presente. Neste contexto, a geometria é descrita pela conexão Weitzenböck, uma conexão sem curvatura associada (HEHL et al., 1976; ALDROVANDI; PEREIRA, 2013). Ademais, em nível de acoplamento mínimo, a densidade Lagrangiana da teoria teleparalela difere da relatividade geral por um termo de fronteira, ou seja as ações funcionais são equivalentes. Outra característica inerente que a teoria teleparalela apresenta é que ela pode ser desenvolvida naturalmente, sem considerar o princípio da equivalência, o que resulta em um grande interesse no processo de quantização do campo gravitacional. A teoria $f(\mathbb{T})$ é uma extensão da teoria teleparalela, nesta formulação são consideradas funções arbitrárias do escalar de torção. Essa construção permite, por exemplo, uma descrição adequada para a aceleração tardia do Universo sem inclusão da constante cosmológica (CAI et al., 2016).

Um outro exemplo de teoria gravitacional equivalente à relatividade, mas com uso de uma geometria distinta, é a teoria teleparalela simétrica definida na geometria de Weyl (POULIS; SALIM, 2011; WHEELER, 2018). Que estabelece a gravitação em termos do tensor de não-metricidade $Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu}$, que demonstra a falha da conexão em ser compatível com a métrica (NESTER; YO, 1999). É interessante notar que, assim como a teoria teleparalela, a teoria simétrica é formulada em uma geometria não-riemanniana de espaço-tempo plano, apresentando uma conexão trivial. Por este fato, podemos dizer que ela é uma das formulações equivalentes mais simples. A conexão da teoria simétrica possui uma sutileza interessante, porque, através de uma transformação de *gauge* é possível simplificá-la para uma derivada parcial. Essa formulação possibilita

uma nova perspectiva, por exemplo, para as fases de aceleração e desaceleração do Universo, além das fases iniciais e finais da evolução cosmológica (XU et al., 2019) e da energia escura (HARKO et al., 2018). É possível ainda que teorias teleparalela simétricas consigam associar o conteúdo de energia escura com um caráter intrínseco relacionado a própria geometria do espaço-tempo, sem necessidades de componentes exóticas (LU; ZHAO; CHEE, 2019).

Recentemente foi proposta uma extensão da teoria teleparalela simétrica considerando a forma de funções não-lineares do escalar de não-metricidade $f(Q)$. Da mesma forma que a teoria $f(R)$, a versão com o tensor de não-metricidade possui grande interesse em aplicações fenomenológicas de um novo ponto de vista (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018; LAZKOZ et al., 2019; JIMÉNEZ et al., 2020). De fato, em nível de cosmologia no universo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) a teoria $f(Q)$ tem as mesmas interpretações da teoria $f(T)$ (sempre em termos do acoplamento mínimo) (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019). Entretanto, elas apresentam comportamentos distintos no tratamento de perturbações cosmológicas. Portanto, neste trabalho almejamos estudar o uso de diferentes geometrias na descrição de fenômenos gravitacionais, em particular na possibilidade de aplicações cosmológicas por meio da teoria $f(Q)$.

Portanto, podemos dizer que a estrutura deste trabalho é da seguinte forma: No capítulo 2, apresentamos uma revisão do modelo cosmológico padrão. Iniciamos discutindo o papel da geometria na física desde à época de Newton. Apresentamos ainda os principais resultados associados à relatividade restrita e o espaço-tempo de Minkowski. A descrição da interação gravitacional em nível relativístico proposta por Einstein é elaborada no contexto da relatividade geral, em que discutimos em detalhes o princípio da equivalência, fundamental para a teoria de Einstein. Após um estudo das equações de campo de Einstein, passamos à revisão do modelo cosmológico homogêneo e isotrópico de FLRW e conseqüentemente das equações de Friedmann, que descreverem a evolução do Universo.

Por sua vez, iniciamos no capítulo 3 uma discussão das diferentes classes geométricas que descrevem a interação gravitacional, podendo elas serem descritas dependendo da escolha das componentes da conexão. Apresentamos primeiramente as três formulações equivalentes da teoria gravitacional, a relatividade geral descrita

em termos da geometria de Riemann e curvatura, a teoria teleparalela formulada na geometria de Weitzenböck e do tensor de torção, e por fim a teoria teleparalela simétrica definida sobre a geometria de Weyl e do tensor de não-metricidade. Em nível de acoplamento mínimo essas três formulações são equivalentes, i.e., possuem a mesma ação e conseqüentemente geram as mesmas equações de campo. Contudo, em nível não-linear nos tensores geométricos, podemos definir teorias modificadas, por exemplo, $f(R)$, $f(\mathbb{T})$ e $f(Q)$, que não apresentam mais equivalência, portanto têm características únicas e também aplicações fenomenológicas distintas.

Finalizamos esse trabalho no capítulo 4 com uma discussão da teoria gravitacional $f(Q)$. Discutimos as equações de campo deste modelo que servirão primeiramente para um estudo da cosmologia deste modelo. A fim de explorar novos territórios com este modelo, analisamos o fenômeno de *big bounce*. Apresentamos uma revisão da proposta inicial de Bojowald (BOJOWALD, 2007) a fim de sanar o problema do horizonte sem a necessidade da teoria inflacionária. Esta proposta tem como elemento principal a teoria de *Loop Quantum Gravity*. Revisamos brevemente a ideia deste modelo quântico da gravitação para contextualizar este cenário. Por fim, verificamos o comportamento de *bouncing* do modelo $f(Q)$ a partir da determinação do fator de escala (em termos de uma função oscilatória) e também da função de onda do Universo a partir da equação de Wheeler-DeWitt.

2 ASPECTOS DA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo apresentaremos uma revisão de alguns fenômenos cosmológicos pertinentes para o nosso trabalho. Iniciamos primeiramente discutindo algumas características geométricas da mecânica Newtoniana e do espaço Euclideano, bem como algumas de suas limitações e a necessidade de uma teoria relativística. Do ponto de vista da interação gravitacional, discutiremos o desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral, que é construída em contexto puramente geométrico, tendo como base o princípio de equivalência. Por fim, estudaremos o princípio cosmológico, a solução de Robertson-Walker, as equações de Friedmann e as componentes do Universo.

2.1 Relatividade Restrita

2.1.1 Geometria Euclidiana

A geometria euclidiana foi sintetizada por Euclides na Grécia antiga em seu livro *Os Elementos*, no qual ele postulou vários princípios geométricos. Esta geometria perdurou por mais de 2000 anos e é nela que está fundamentada a ideia de espaço descrita por Galileu e ainda nas três leis apresentadas no trabalho *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* publicado por Newton em 1687. O espaço da geometria euclidiana é tridimensional, infinito, homogêneo e isotrópico, é o espaço que nossos sentidos experimentam. Newton fundamenta a sua teoria descrevendo o espaço como sendo absoluto e imutável, sendo que as suas leis podem determinar a trajetória de um corpo sabendo (se é conhecida) a força que atua sobre este, logo, o espaço atua como um palco e nada interfere no movimento. Assim como o espaço, o tempo também tem suas peculiaridades. Essa grandeza é considerada contínua e flui constantemente. A duração dos eventos analisados independe do observador (GOLDSTEIN, 1980).

Portanto, tempo e espaço são quantidades distintas na física newtoniana, o espaço é o cenário em que os eventos ocorrem enquanto o tempo é a grandeza que irá medir a duração desses fenômenos físicos. E isto independe se o fenômeno verificado apresenta referenciais que estão em movimento relativo. Esta é a concepção clássica de espaço e tempo. Veremos adiante que na teoria da relatividade restrita, observadores inerciais medirão o tempo e o espaço dos eventos de formas diferentes.

A distância entre dois eventos no espaço tridimensional euclidiano pode ser medida por meio da comparação entre dois pontos infinitesimalmente próximos. Então, dado um ponto com sistema de coordenadas (x, y, z) e outro ponto neste espaço localizado em $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Em coordenadas cartesianas teremos então o intervalo de comprimento definido por

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \quad (2.1)$$

Podemos notar que a distância entre pontos/eventos é independente do sistema de coordenadas, portanto, Δs é um invariante sob transformações de coordenadas.

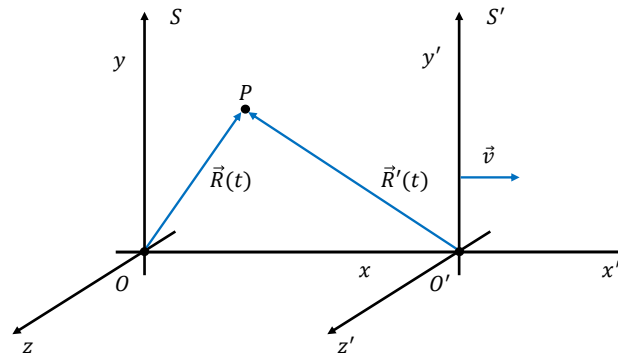
Outra característica peculiar da geometria euclidiana é a de que o espaço é plano, implicando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . E também temos válido o teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo. Porém, as aplicações dos princípios da geometria euclidiana, como o teorema mencionado anteriormente, só são válidas para espaços que têm curvatura espacial nula. Um espaço com curvatura é descrito pela geometria riemanniana e o teorema de Pitágoras deve ser reformulado.

Para uma partícula livre de ação de forças, sempre podemos considerar um sistema de coordenadas no qual a partícula está em condição inercial, ou seja, em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Estes sistemas de coordenadas, ou ainda observadores, são definidos como referencias inerciais. Consequentemente, todos os referenciais que se movem com velocidade constante em relação a um referencial inercial também são referenciais inerciais (PORTO; PORTO, 2008). Entretanto, um referencial que se move com velocidade variável, não é considerado como referencial inercial, logo, as leis de Newton não se aplicam a este referencial.

O princípio da relatividade, ou o princípio de Galileu, nos diz que as leis físicas da mecânica possuem um caráter covariante, em todos os sistemas inerciais. Ou seja, as leis físicas mantêm as mesmas características, quando mudamos de um referencial inercial para outro.

Vamos estabelecer como as coordenadas de dois sistemas inerciais se relacionam. Para isto, supomos dois sistemas S e S' , com eixos paralelos entre si, veja a figura (2.1). Adotando que o referencial S , com coordenadas (x, y, z) , está em repouso em relação à Terra e que o referencial S' , com coordenadas (x', y', z') , se move com rapidez constante v em relação a S ao longo do eixo x .

Figura 2.1 – Referenciais inerciais.



Fonte: Produção do autor (2020).

As relações entre as coordenadas desses referenciais são

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Na equação para o tempo, verificamos a característica absoluta desta grandeza, pois o tempo medido no referencial S é igual ao tempo medido no referencial S'. As equações (2.2) são conhecidas como transformações de Galileu e nos mostram como se dá a mudança de um referencial inercial para outro.

A física newtoniana é fundamentada na lei da covariância e no princípio da relatividade de Galileu. A primeira estabelece que todos os referenciais inerciais são equivalentes e capazes de descrever as leis físicas. Enquanto a segunda verifica a mudança de quantidades físicas quando mensuradas de diferentes referenciais.

Mas, com os trabalhos de James Clerk Maxwell sobre as equações do eletromagnetismo clássico por volta da metade do século XIX, algumas questões foram levantadas na época. Essas expressões previram a existência de ondas eletromagnéticas transportando energia e permite estabelecer a explicação de que a luz é de fato uma forma da onda eletromagnética propagando-se no vácuo com rapidez $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Ademais, o conhecimento da época estabelecia que a propagação ondulatória deveria ocorrer através de um meio material. Então para explicar a propagação da luz foi

sugerido a existência de um meio material que preenchesse todo o espaço, chamado de éter.

Vamos exemplificar como as equações eletromagnéticas não são invariantes sob transformações de Galileu (2.2). Por exemplo, a equação de onda vista pelo referencial S é

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

em que φ é uma função escalar e ∇^2 é o operador Laplaciano. Fazendo as devidas transformações a partir de (2.2), a equação de onda para um referencial inercial S' fica

$$\nabla'^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} + \frac{2}{c^2} \vec{v} \cdot \nabla' \frac{\partial \varphi}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \nabla') (\vec{v} \cdot \nabla' \varphi) = 0, \quad (2.4)$$

notamos que esta expressão em S' não possui a mesma forma em S , ou seja, ela não é covariante sob transformações de Galileu.

Observamos algumas inconsistências na lei de transformação das equações de onda (2.4). Para que essa expressão seja covariante é necessário que o éter exista, caso contrário, as transformações de Galileu devem ser reformuladas. Outra inquietação consistia no fato de que as equações de Maxwell pudessem ser incorretas, necessitando de modificações. Contudo, as observações experimentais descartavam essa possibilidade (EISBERG, 1979). Desta forma, um grande esforço foi realizado a fim de formular transformações de coordenadas adequadas, que preservassem a invariância das leis de Maxwell. Para isso, buscaram encontrar de formas experimentais a existência do éter, e assim averiguar à qual observador privilegiado está relacionada a velocidade da luz c .

Alguns experimentos tentaram encontrar o referencial privilegiado caracterizado pelo éter, o qual manteria as equações do eletromagnetismo válidas e conseqüentemente a sua existência, como o experimento de Michelson-Morley realizado em 1886 (NETO, 2015), através do fenômeno da interferência. Eles não tiveram sucesso em medir a velocidade da luz em relação à Terra, e assim encontrar o referencial privilegiado, mesmo tendo repetido o experimento várias vezes durante épocas diferentes do ano.

Percebemos portanto que as transformações de Galileu não são adequadas para explicar fenômenos com velocidades próximas à da luz c . Grande parte dessas afirmações deve-se a atribuição do tempo. Discutiremos a seguir um conjunto de resultados

apresentados por Lorentz, Einstein, et al, inclusive as transformações corretas entre referenciais inerciais, que permitem a descrição satisfatória da dinâmica relativística.

Para resolver os problemas que descrevemos anteriormente, Albert Einstein fez uso de dois postulados para desenvolver a teoria que deu explicações coerentes a respeito do éter e da não covariância das leis do eletromagnetismo segundo as transformações de Galileu.

Em 1905 Einstein publica a teoria da relatividade restrita e seu conteúdo é expresso na forma de dois postulados:

1. O princípio da relatividade. Todas as leis físicas são as mesmas para todos os sistemas inerciais que se movimentam uniformemente um em relação aos outros.

Este postulado é equivalente ao conceito de Galileu, pois todos os referenciais inerciais são igualmente válidos e as leis da física são as mesmas nestes referenciais inerciais.

2. A constância da velocidade da luz. O módulo da velocidade da luz no vácuo é independente da fonte e é a mesma para todos os referenciais inerciais.

A partir deste conjunto de postulados Einstein desenvolve uma generalização da teoria Newtoniana para a dinâmica agora de partículas relativísticas. Ademais, neste contexto, o éter é eliminado, uma vez que não há referenciais privilegiados.

Após uma série de trabalhos, H. Lorentz estabelece em 1904 um conjunto de transformações que deixa as equações de Maxwell invariantes. Vale a pena ressaltar que elas foram derivadas por Einstein a partir dos dois postulados da sua teoria da relatividade restrita em 1905. Por outro lado, não é possível estabelecer esses postulados a partir das transformações, ou seja, os postulados são fundamentais.

Tomemos os referenciais inerciais S e S' , onde S' se move com velocidade constante v em relação a S e paralelo à direção do eixo x . Consideremos que em $t = t' = 0$ as origens de S e S' coincidem. E que os eixos de coordenadas em x e x' coincidam e os eixos de coordenadas de y e z são paralelos a y' e z' . Os referenciais atribuídos apresentam as coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , portanto, as expressões que

relacionam o mesmo evento para os dois sistemas de coordenadas em questão são:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z, \end{cases} \quad (2.5)$$

em que é definido $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ como o fator de Lorentz, onde $\beta = v/c$. Essas são as expressões que descrevem fenômenos relativísticos como a dilatação do tempo e a contração do espaço.

O limite não relativístico das transformações de Lorentz, que pode ser obtido a partir de $v^2/c^2 \rightarrow 0$, situação em que encontramos

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \text{e} \quad t' = t, \quad (2.6)$$

que nada mais são do que as transformações de Galileu.

Objetos de extrema importância na teoria relativística são aqueles chamados de invariantes. Vamos explorar agora a invariância do intervalo entre eventos relativísticos. Veremos que este intervalo não apresenta as mesmas características de um espaço euclidiano (2.1).

Vamos mostrar que o intervalo espaço-temporal infinitesimal $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$, entre os eventos P_1 e P_2 , é invariante. Para isso vamos considerar, por simplicidade, apenas as coordenadas (t_1, x_1) e (t_2, x_2)

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (2.7)$$

No referencial S' com coordenadas descritas pela as equações (2.5), podemos mostrar que

$$\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2.$$

Segue, portanto que

$$\Delta s' = \Delta s. \quad (2.8)$$

Notemos que o intervalo espaço-temporal entre os eventos não depende do referencial em que ele é calculado, logo, ele é um invariante em relação a uma transformação de coordenadas. Desta forma, na relatividade de Einstein, o intervalo espacial não é mais invariante, como o de Galileu, e também o tempo não é absoluto, contrário à ideia de Newton, mas sim a combinação de espaço e tempo que consiste em uma quantidade invariante na relatividade de Einstein.

Iremos agora definir o intervalo ds entre dois eventos infinitesimalmente próximos. Como exemplo, podemos designar um primeiro evento que consiste na emissão de um sinal luminoso propagando-se com velocidade c a partir de um ponto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) , no instante t_1 . Enquanto o segundo evento consiste da chegada no ponto de coordenadas (x_2, y_2, z_2) no instante t_2 . Portanto, os dois eventos no espaço plano possuem o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.9)$$

onde c é a velocidade da luz, t a coordenada temporal e (x, y, z) são as coordenadas do espaço. Esta expressão é conhecida como elemento de linha de Minkowski, ou ainda intervalo do espaço-tempo, que é invariante sob as transformações de Lorentz. Fora Minkowski que em 1908 introduziu a ideia de um espaço-tempo quadridimensional como um ambiente natural para expressarmos as equações de Maxwell de forma covariante (naturalmente, este também é ambiente natural para a relatividade de Einstein).

Podemos introduzir o quadrivetor posição contravariante $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Desta forma, podemos expressar o elemento de linha como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.10)$$

em que usamos a convenção de somatória de Einstein, e $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. Este tensor métrico representa a geometria plana da relatividade restrita, e tem os seguintes elementos

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1). \quad (2.11)$$

H. Minkowski estruturou a geometria da relatividade restrita introduzindo a componente temporal ao sistema de coordenadas espaciais, propondo então para a física relativística uma geometria do espaço-tempo quadridimensional, a qual contém a métrica de Minkowski. Foi Minkowski quem introduziu primeiramente o conceito de espaço-tempo na relatividade restrita, ou seja, ele unificou o espaço e o tempo em uma só unidade no âmbito relativístico.

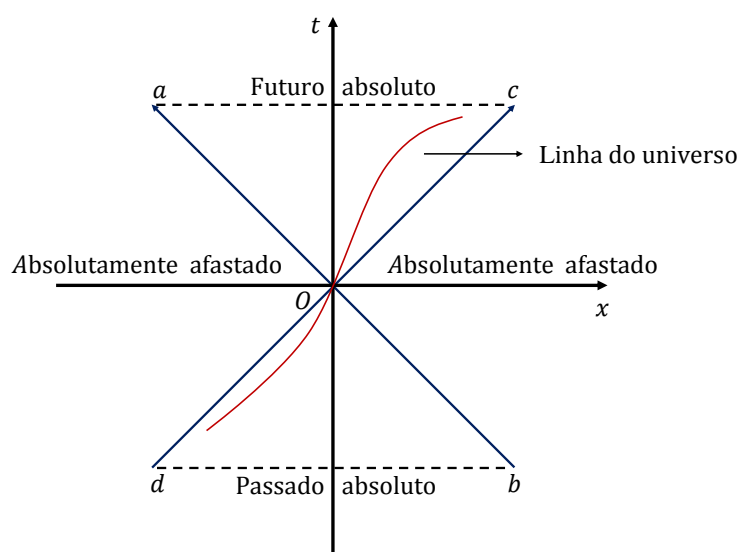
Considere um referencial em um sistema de coordenadas quadridimensional (ct, x, y, z) , com O sendo a origem deste sistema. Adotando um evento qualquer denotado por A , representando as coordenadas espaciais e temporal, que se inicia em O . Vamos agora analisar a relação dos possíveis eventos passados ou futuros, sobre a região que o sistema de coordenadas que adotamos engloba, com o evento A . Esta ideia será abordada através do diagrama de Minkowski, ou seja, faremos uma análise geométrica dos possíveis movimentos que as partículas podem seguir. Devido a isotropia espacial presente no postulado 2, consideraremos apenas o eixo x das coordenadas espaciais, enquanto a abscissa corresponde à coordenada temporal. Observe que os eixos x e t são ortogonais.

As descrições mencionadas acima permitem construir uma representação diagramática chamado de cone de luz, figura (2.2) em que as cavidades internas do cone representaram o nosso *futuro absoluto* e o nosso *passado absoluto*. Este diagrama nos ajudará a analisar a velocidade através da inclinação da reta. Chamaremos de *linha do Universo* a curva que representa geometricamente os pontos no espaço-tempo que correspondem ao movimento de uma partícula, mostrada na figura (2.2). O ângulo de inclinação θ em relação ao eixo horizontal x é dado, $\text{tg}(\theta) = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{v}{c}$.

Portanto, no caso de uma onda luminosa que se propaga com $v = c$ teremos uma reta de inclinação de 45° com os eixos, uma partícula em repouso é expressada simplesmente por uma linha na vertical. Para partículas com velocidade inferiores a da luz teremos $v < c$ portanto o ângulo de inclinação deve ser $\theta < 45^\circ$.

As retas ab e cd representam a propagação de dois sinais luminosos (velocidade c) em sentidos opostos que passam pela origem O ou seja, no ponto $x = 0$ quando $t = 0$, com inclinação θ em relação ao eixo t com $x = \pm ct$.

Figura 2.2 – Representação do cone de luz.



Fonte: Produção do autor (2020).

A dinâmica de todas as partículas físicas é definida dentro dos domínios aOc e bOd . No domínio aOc as linhas de movimento dos eventos de O a qualquer outro ponto são todas do tipo-tempo $ds^2 > 0$, e como elas ocorrem após a origem caracterizamos essa região como o *futuro absoluto*. Por outro lado, para o domínio bOd os acontecimentos ocorrem antes de O , tal que o caracterizamos como *passado absoluto* (FARAONI, 2013).

Os intervalos do tipo-espaço compreendem a região entre O e aos domínios de dOa e cOb . Esse domínio é caracterizado como absolutamente afastado perante O , porque para todos os referenciais inerciais os eventos ocorrem em pontos diferentes do espaço. Este domínio foge da nossa compreensão pois precisaríamos de partículas que viajassem mais rápido que a luz, violando assim o princípio da causalidade (FARAONI, 2013).

2.2 Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral foi apresentada por Einstein em 1915, a qual suplantou o conceito de força proposto pela teoria de Newton para a gravitação. Após desenvolver a relatividade restrita, Einstein percebeu duas questões que sua teoria abordava. A primeira consistia na classe privilegiada dos referenciais inerciais e a segunda permeava na incompatibilidade da propagação instantânea da interação

gravitacional newtoniana com o postulado da constância da luz, a partir da propagação instantânea para realizar a mediação gravitacional descrita pela teoria newtoniana.

O princípio da equivalência é o alicerce fundamental para descrever a geometrização da gravidade. Ele pode ser enunciado da seguinte forma: não há como discernir um experimento realizado por um referencial inercial em um campo gravitacional local, de um experimento realizado por um referencial acelerado em uma região ausente de campo gravitacional. Este princípio garante a equivalência entre os referenciais inerciais num campo gravitacional com referenciais acelerados ou vice-versa todos os experimentos realizados corroboraram tal hipótese (TINO et al., 2020). Portanto, todas as leis físicas são as mesmas e independem dos referenciais adotados.

Portanto, é importante enfatizar que a equivalência entre os referenciais não-inercial e gravitacional é um aspecto local, pois em regiões macroscópicas seriam notadas a inhomogeneidade do campo gravitacional, detectando assim alterações nas trajetórias dos corpos de testes, por exemplo.

Na seção anterior definimos o elemento de linha do espaço-tempo quadridimensional plano de Minkowski presente na relatividade restrita, que é expresso como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.12)$$

E como sabemos ds^2 é um invariante sobre transformações de Lorentz, ou seja, independe da escolha de sistemas de coordenadas inerciais.

Observe que em nossa discussão sobre o elemento de linha (2.12), não fizemos nenhuma menção de que os eventos estivessem ou não sujeitos a campos gravitacionais. De fato a relatividade restrita não considera efeitos gravitacionais em seu desenvolvimento.

Podemos ilustrar algumas ideias básicas de como inserir efeitos gravitacionais a partir de uma discussão de efeitos não-inerciais incluídos na métrica de Minkowski a partir de transformações de coordenadas adequadas. Para isso, faremos uso do princípio de equivalência que estabelece que localmente referenciais não-inerciais são equivalentes a referenciais gravitacionais. Pois qualquer corpo de teste, com as mesmas condições iniciais, se movimentam da mesma forma quando estão na presença de campos de gravidade, independentemente de sua massa (GASPERINI; SABBATA, 1985). Desta

forma, poderemos analisar como o elemento de linha se comporta sobre influência desse tipo de campo.

Para escrever a métrica na presença da gravidade precisamos realizar mudanças nas coordenadas espaciais e temporal, adequadamente, de um referencial inercial para um referencial não-inercial, sendo que o último será responsável por realizar a intermediação para a descrição da presença do campo gravitacional. No caso do referencial não-inercial S' , consideraremos que ele gira ao longo do eixo \hat{z} com velocidade angular constante ω e possui coordenadas (ct', x', y', z') , logo as transformações das coordenadas S e S' ficam

$$\begin{cases} x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t \\ z' = z. \end{cases} \quad (2.13)$$

Desta forma, o elemento de linha sob essas transformações fica

$$ds^2 = [c^2 - \omega(x^2 + y^2)] dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt' + 2\omega x' dy' dt'. \quad (2.14)$$

Percebemos, através da equação (2.14), que a presença de um campo de gravitação (responsável pela rotação) modifica a estrutura geométrica do espaço de Minkowski. Notamos que o elemento de linha de um referencial não-inercial é uma forma quadrática dos diferenciais dx^μ , e isto nos permite escrever (2.14) na seguinte notação

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.15)$$

Observe que o elemento de linha foi escrito em termos de um tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$, que é uma função das coordenadas do referencial não inercial. Este tensor é simétrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, logo representa dez funções das coordenadas espaciais e temporal. Portanto esse tensor nos permite medir distâncias e ângulos entre vetores tangentes no espaço-tempo curvilíneo (não-inercial), bem como as propriedades geométricas do espaço-tempo. Então, um espaço métrico é descrito pelas componentes de g que descrevem as geometrias de sistemas curvilíneos, que são reduzidas à métrica de Minkowski para um referencial inercial.

De fato, as componentes da métrica não-inercial $g(x)$ podem ser relacionadas com as componentes da métrica de Minkowski η a partir da seguinte transformação

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (2.16)$$

em que ξ são os sistemas de coordenadas localmente inerciais, enquanto x^μ o sistema de coordenadas gerais. Por sua vez, as componentes contravariantes do tensor métrico são

$$g^{\mu\nu}(x) \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}, \quad (2.17)$$

e elas satisfazem a relação

$$g_{\alpha\mu} g^{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.18)$$

Um dos problemas do cálculo tensorial é o desenvolvimento de um operador diferencial que atue em um tensor gerando assim um novo objeto que preserve as características tensoriais, i.e., são objetos matemáticos que apresentam leis de transformação homogêneas bem definidas. Para um sistema curvilíneo de coordenadas a derivada usual de um vetor dA^μ não é um vetor, assim também como a derivada parcial de um tensor $\partial_\mu A^\nu$. Isso se deve pelo fato de que as derivadas que conhecemos não são invariantes sob transformações de sistemas de coordenadas. Para sanar esse problema, introduziremos o operador chamado de derivada covariante, que possui o caráter covariante desejado e também mantém o aspecto tensorial quando ele atua em um tensor.

Temos que o diferencial de um vetor se desenvolve perante a forma

$$dA^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dA'^\nu(x') + A'^\nu(x') \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} dx'^\alpha. \quad (2.19)$$

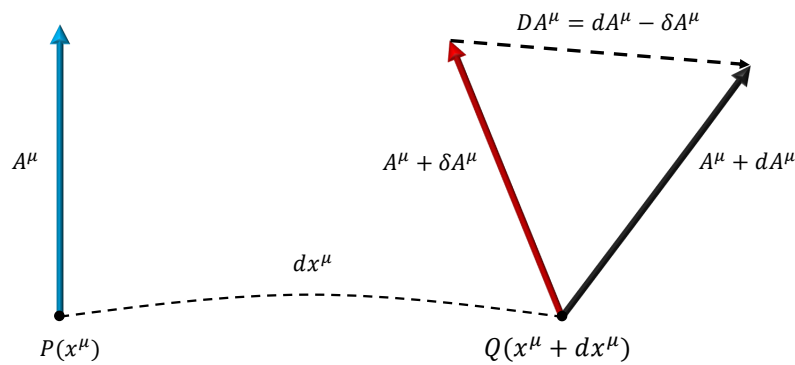
Como mencionamos, notamos que a derivada de um vetor não resulta em um tensor, a não ser que a transformação satisfaça $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu} = 0$, isto é, se x^μ forem funções lineares das coordenadas de x'^ν .

Apresentaremos a seguir como podemos generalizar o operador diferencial de tal forma que ele seja invariante sob transformações gerais de coordenadas em uma estrutura curvilínea. Dado um campo vetorial A no plano (x, y) , onde A^μ são as componentes de um vetor na posição x^μ . Transportemos este vetor em um espaço curvo,

da posição x^μ até a posição $x^\mu + dx^\mu$, ficando com as componentes $A^\mu + \delta A^\mu$ nesta última localização. Contrário ao que ocorre no caso cartesiano, o transporte paralelo de um vetor em um sistema curvilíneo geralmente alterará as componentes do vetor deslocado. De fato, esse deslocamento produzirá uma variação δA nas componentes de A^μ .

Ilustramos na figura (2.3) como se dá o transporte paralelo ao longo de uma curva sobre uma superfície bidimensional, em que o vetor A é transportado de um ponto P até um ponto Q de modo que as suas componentes assumam a variação δA . Observe que em um sistema cartesiano $\delta A^\mu = 0$.

Figura 2.3 – Transporte paralelo de vetores sobre uma superfície curva bidimensional.



Fonte: Produção do autor (2020).

Desta forma, definimos a diferença DA^μ entre dois vetores, analisados no mesmo ponto, após o transporte paralelo por meio de

$$DA^\mu(x) = dA^\mu(x) - \delta A^\mu(x). \quad (2.20)$$

Podemos impor que a variação δA^μ dependa do deslocamento dx^μ e seja linear nas componentes de A^μ ,

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\alpha(x + dx) dx^\beta \quad (2.21)$$

sendo as funções $\Gamma_{\beta\alpha}^\mu$ conhecidas como conexão afim, que nos permitem determinar a variação de um vetor conectando os pontos tangentes do espaço-tempo através do transporte paralelo.

Sempre, consideramos na Relatividade Geral a conexão com índices covariantes simétricos, neste caso temos $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$, que é conhecida como símbolo de Christoffel (GASPERINI; SABBATA, 1985). Contudo, sua forma explícita depende do sistema de coordenadas a ser adotado, pois, podemos ter um espaço-tempo com um campo

gravitacional ausente, mas, com uma conexão com componentes não nulas caso o sistema de coordenadas usado, seja, por exemplo, o sistema curvilíneo. No caso de um sistema cartesiano, em que a conexão deve ser nula $\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} = 0$, os vetores transportados em um plano são os mesmos depois do transporte paralelo porque não sofrem alterações em suas componentes, ou seja, DA^{μ} torna-se dA^{μ} . Portanto, esse é um dos motivos que implica que a conexão não é de fato um tensor, e sim um pseudo-tensor, pois se um tensor desaparece em algum sistema de coordenadas ele deve ser nulo em todos os outros sistemas.

A derivada covariante de um vetor é

$$\nabla_{\beta}A_{\mu} = \partial_{\beta}A_{\mu} - \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}A_{\alpha}. \quad (2.22)$$

Por fim, definimos a derivada covariante de um tensor misto como

$$\nabla_{\beta}A^{\mu}_{\nu} = \partial_{\beta}A^{\mu}_{\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}A^{\mu}_{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}A^{\alpha}_{\nu}. \quad (2.23)$$

Esse operador é invariante sob transformações gerais de coordenadas, preservando as características tensoriais quando um tensor é diferenciado.

Podemos escrever o símbolo de Christoffel em termos da derivada do tensor métrico

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}). \quad (2.24)$$

É importante notar que esta configuração da conexão é simplificada por que não consideramos a contribuição antissimétrica da conexão, torção $\Gamma_{[\mu\nu]}^{\alpha} = 0$, ou ainda escrevemos que o produto escalar de vetores permanece constante ao longo de um deslocamento paralelo de uma curva, que nada mais é do que a condição de metricidade $\nabla g_{\mu\nu} = 0$. De fato, curvatura, torção e não-metricidade são objetos importantes no desenvolvimento do conteúdo da geometria de teorias equivalentes ou alternativas à relatividade geral, e que serão discutidas com maiores detalhes no capítulo (3). Em particular, a teoria da relatividade geral foi desenvolvida somente em termos de curvatura, que corresponde à geometria riemanniana. Neste caso, Einstein descreve efeito dos campos gravitacionais a partir da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria.

De maneira geral, os diferentes objetos geométricos que podem estar presentes na conexão afim¹

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^{\beta} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}^{\beta} + L_{\mu\nu}^{\beta}, \quad (2.25)$$

onde $\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\}$ é outra notação para o símbolo de Christoffel, $K_{\mu\nu}^{\beta}$ é o tensor de Contorção e $L_{\mu\nu}^{\beta}$ é o tensor de Disformação (GASPERINI; SABBATA, 1985). Por exemplo, temos a teoria de Weyl em que o objeto geométrico fundamental é o tensor de não-metricidade $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} \neq 0$; temos ainda a teoria de Einstein-Cartan, em que além da curvatura, temos uma torção não-nula $\Gamma_{[\mu\nu]}^{\alpha} \neq 0$ ²; ou ainda podemos considerar que as três quantidades são não nulas, esta é conhecida como teoria de métrica afim (GASPERINI; SABBATA, 1985). Trataremos com um pouco mais de detalhes essas teorias alternativas à relatividade geral no capítulo 3.

2.2.1 Geodésicas e tensor de curvatura

Vamos agora discutir a equação de movimento de uma partícula na ausência de forças externas, sob influência somente de efeitos geométricos da gravitação. Na mecânica não relativística, descrita pela geometria euclidiana, a menor trajetória de uma partícula entre dois pontos é uma linha reta. Segundo a mecânica de Newton, são as forças que causam os movimentos dos corpos, então, neste ponto de vista, é a força gravitacional é que determina a trajetória de uma partícula. Entretanto, na relatividade geral veremos que uma partícula seguirá trajetórias curvas determinadas pela geometria do espaço-tempo, que são chamadas de geodésicas (CARROLL, 2004). Dada uma geometria curva qualquer, iremos encontrar a expressão que descreve o movimento de uma partícula entre pontos de uma superfície curva, livre de ações de forças, mas, na presença de gravidade. Então a geodésica é definida como a menor curva que conecta dois pontos em qualquer tipo de espaço, com ou sem curvatura (CARROLL, 2004).

¹ As definições dessas quantidades são dadas na seção (3.2).

² Definimos tensores antissimétricos por colchetes nos seus índices covariantes,

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}),$$

e os tensores simétricos são representados por parênteses entre seus índices covariantes,

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}).$$

Para descrever este movimento vamos partir do princípio da ação mínima. Segundo este princípio, existe uma integral S , intitulada ação, que tem seu valor mínimo para um movimento real. A ação escrita em termos do parâmetro afim $(\lambda)^3$ fica,

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (2.26)$$

Calculando $\delta S = 0$, temos:

$$\delta \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} d\lambda = 0. \quad (2.27)$$

Através do princípio de Hamilton a equação de Euler-Lagrange fica,

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}) = 0, \quad (2.28)$$

onde definimos $d\tau = -2 \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} d\lambda$, que é o tempo próprio da partícula. Agora, identificando o segundo termo de (2.28) com as componentes da conexão (2.24), chegamos à equação da Geodésica,

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.29)$$

Para um sistema cartesiano em específico onde podemos escolher que $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = 0$, neste caso a equação da geodésica fica $d^2 x^\nu / d\tau^2 = 0$, que é a expressão de uma reta no sistema euclidiano.

A relatividade geral descreve efeitos gravitacionais a partir de um objeto geométrico chamado curvatura. De um ponto de vista geométrico, o tensor de Riemann ou tensor de Curvatura, é a quantidade responsável por medir a variação na orientação que um determinado vetor sofre ao transportamos paralelamente em um espaço-tempo curvo, com efeito, observamos que ao final do seu transporte ao longo de um caminho fechado o vetor sofrerá uma rotação em relação à sua orientação inicial. Uma das maneiras de obter o tensor de Riemann é a partir do cálculo do comutador de duas derivadas covariantes (CARROLL, 2004).

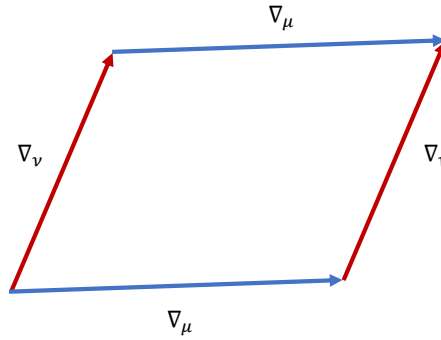
³ Parâmetro arbitrário utilizado para descrever geodésicas, e que é definido a partir da condição de que o transporte paralelo preserve vetores tangentes. Por exemplo, no caso de geodésicas do tipo-tempo o tempo próprio é um parâmetro afim.

Portanto, dadas as curvas x^μ e x^ν , representadas pelo o paralelogramo da figura (2.4), transportaremos um vetor A^α sob a curva x^μ e em seguida pela x^ν , e depois pelo o caminho inverso. Como sabemos as componentes de um vetor dependem do caminho que eles percorrem, então, se transportamos paralelamente um vetor entre dois pontos seguindo dois percursos distintos, teremos no final da trajetória orientações distintas para os vetores. Desta forma, podemos dizer que as derivadas covariantes pelos caminhos são diferentes,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha \neq \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha \quad (2.30)$$

ou seja, isto implica em dizer que as derivadas não comutam em espaços curvos.

Figura 2.4 – Transporte paralelo de vetores.



Fonte: Produção do autor (2020).

De fato, o comutador das derivadas covariantes é

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta}) A^\beta - (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) A^\beta + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} A^\beta - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\beta} A^\beta = R^\alpha_{\beta\mu\nu} A^\beta, \quad (2.31)$$

que nos dá a seguinte definição para o tensor de Riemann

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta}) - (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\beta}. \quad (2.32)$$

O tensor de Riemann, ou tensor de curvatura, fornece algumas características do espaço. Esse tensor mede a alteração de um campo tensorial por uma variedade quando é transportado por um caminho fechado. No caso específico de um espaço plano onde teremos $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$, conseqüente, o tensor de curvatura também será $R^\alpha_{\mu\nu\beta} = 0$, ou seja, teremos um espaço sem curvatura.

Uma importante relação satisfeita pelo tensor de Riemann é a identidade de Bianchi,

$$R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}{}_{;\rho} + R_{\nu\rho}{}^{\alpha\beta}{}_{;\mu} + R_{\rho\mu}{}^{\alpha\beta}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.33)$$

onde definimos a derivada covariante por meio do símbolo (;).

Ao contrairmos a equação (2.33) com dois tensores $\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu}$ encontramos a seguinte relação:

$$\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right]_{;\nu} = 0, \quad (2.34)$$

em que identificamos o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\alpha} = R_{\mu\nu}$, e o escalar de Ricci R . Podemos ainda expressar esta equação em termos do conhecido tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.35)$$

ficando da seguinte forma

$$\nabla_{\nu} G^{\nu\mu} = 0. \quad (2.36)$$

É importante comentar que o escalar de Ricci, por ser um invariante sobre transformações gerais de coordenadas, é utilizado para compor teorias gravitacionais minimamente modificadas, por exemplo $f(R)$ (FELICE; TSUJIKAWA, 2010; SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

2.2.2 Equações de campo de Einstein

A relatividade geral é uma teoria que foi desenvolvida tendo como base a geometria riemanniana, portanto uma geometria não-euclidiana onde o espaço-tempo agora apresenta curvatura. Usando experimentos mentais e com auxílio do princípio da equivalência, Einstein estabelece a equivalência de referenciais acelerados com referenciais em repouso em um campo gravitacional, o que permite concluir que a gravidade altera a estrutura do espaço-tempo por meio da curvatura. Então, na relatividade geral, a matéria é a fonte da gravitação que atua através da deformação do espaço-tempo e que conseqüentemente determina a trajetória das partículas sob ação da interação gravitacional.

Desenvolveremos as equações de campo de Einstein através do princípio variacional na formulação Lagrangiana. Para isso exigimos que a lagrangiana seja uma

função invariante sob transformações de coordenadas e contenha termos dinâmicos e de acoplamento. Para obter as equações de campo consideraremos a seguinte ação,

$$S = S_g + S_f, \quad (2.37)$$

em que S_g é a contribuição da ação referente ao campo gravitacional e S_f que considera as fontes de matéria. Seja o funcional

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.38)$$

onde Ω é um volume no espaço-tempo, g é o determinante da métrica $g = \det g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}$ uma densidade escalar de peso unitário. A parte gravitacional é dada por $\mathcal{L}_g = R$.

Temos que o princípio de mínima ação nos dá

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (2.39)$$

Abordando primeiramente a componente gravitacional da ação S ,

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.40)$$

que nada mais é que a conhecida ação de Einstein-Hilbert, cuja variação fornece

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \left[R(\delta \sqrt{-g}) + \sqrt{-g}(\delta R) \right], \quad (2.41)$$

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R(\delta g^{\mu\nu}) + R_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) \right] d^4x, \quad (2.42)$$

onde usamos que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})$ (GASPERINI; SABBATA, 1985). Ademais, a variação do tensor de Ricci nos fornece a expressão conhecida como identidade de Palatini (D'INVERNO, 1992),

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}. \quad (2.43)$$

Portanto a variação da contribuição gravitacional (2.42) fica

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R (\delta g^{\mu\nu}) + R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}) \right] d^4x. \quad (2.44)$$

Desenvolvendo apenas o terceiro termo da integral da expressão acima, observamos, após aplicar o teorema de Gauss, que

$$\mathcal{I} = \oint_S dS_{\alpha} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^{\nu}_{\mu\nu} \right),$$

onde dS_{α} é o elemento de área da hiper-superfície, é um termo de superfície que nas extremidades da hiper-superfície se anula pois as variações da métrica são zero nessa região. Por fim, temos que a ação completa fica escrita somente em termos de

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \quad (2.45)$$

onde definimos o tensor energia-momento,

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(L_f \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.46)$$

em que $\delta/\delta g^{\mu\nu}$ é a derivada funcional com respeito à métrica. É o tensor energia momento que nos dá informação sobre a distribuição de matéria, que é justamente a fonte que produz a gravitação, ou seja, a matéria é quem produz a deformação na estrutura do espaço-tempo.

Portanto, como as variações $\delta g^{\mu\nu}$ são arbitrárias, segue que as equações de campo de Einstein são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.47)$$

Ademas, podemos reescrever as equações de Einstein em termos do tensor (2.35), logo

$$\boxed{G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}}, \quad (2.48)$$

onde definimos $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Estas expressões nos mostram como o espaço-tempo reage se curvando na presença de uma fonte de energia, ou, inversamente, quando a energia é influenciada e distribuída pela curvatura do espaço-tempo do Universo.

As equações de Einstein são equações diferenciais de segunda ordem em termos do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, totalizando dez equações independentes que descrevem como a matéria influencia o comportamento da geometria do espaço-tempo, ou vice-versa.

Um caso mais simples que podemos analisar das equações gravitacionais é na ausência de matéria,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (2.49)$$

Por complementaridade, discutiremos a seguir algumas propriedades do tensor energia-momento. Vimos anteriormente que ele é responsável por caracterizar informações das fontes de gravitação nas equações, logo é importante estabelecer as suas principais características. Primeiramente, de acordo com a identidade de Bianchi $\nabla_\nu G^{\nu\mu} = 0$, segue das equações de campo (2.48) segue a lei de conservação do tensor energia-momento

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.50)$$

De fato, pelo teorema de Noether, o tensor $T^{\mu\nu}$ significa fisicamente o fluxo do quadrimomento p^μ que transcorre através da hiper-superfície constante x^ν , as quais envolvem as fontes de campo, e suas componentes são vistas como:

- $T^{00} \rightarrow$ densidade de energia, que descreve o fluxo de energia por uma superfície na direção temporal.
- $T^{i0} = T^{0i} \rightarrow$ densidade de momento linear, que descreve o fluxo de energia pela superfície x^i , em que $i = 1, 2, 3$.
- $T^{ij} \rightarrow$ pressão, fluxo pela superfície em que x^j é constante, em que $i = j = 1, 2, 3$.
- $T^{ij} \rightarrow$ tensão de cisalhamento, para $(i \neq j)$.

Em particular, na aplicação da gravitação em problemas cosmológicos supõe-se que o conteúdo de energia pode ser muito bem descrito através de uma aproximação de fluido perfeito (um fluido isotrópico que se encontra em repouso em relação ao seu sistema de referência. O fluido perfeito é o caso mais geral de um conjunto de partículas em repouso umas em relação às outras, que representam a poeira) (WEINBERG, 1972).

Um fluido perfeito é a idealização de uma quantidade que não apresenta condução térmica e nem viscosidade, o qual é escrito apenas em termos da densidade de massa de repouso ρ e a densidade de pressão p . Vimos que a componente T^{i0} descreve o fluxo de energia de um fluido, como estamos exigindo que o fluido perfeito não conduza calor através das partículas relativísticas pela superfície do hiper-volume, temos que os componentes se restringem $T^{i0} = T^{0i} = 0$. O mesmo ocorre para as tensões de cisalhamento, forças internas à superfície que também são desconsideradas.

Considerando que estamos em um sistema localmente comóvel a um elemento do sistema, o fluido que observamos ao nosso redor apresenta uma pressão isotrópica,

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

a partir de agora iremos assumir as unidades naturais, ou seja, a velocidade da luz sendo $c = 1$. Em um sistema inercial esse **fluido perfeito** pode ser expressado,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu} \quad (2.52)$$

com a quadri-velocidade do fluido sendo definida por $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$, sendo τ o tempo próprio desse observador.

Por exemplo, no caso do conteúdo de radiação, o tensor energia-momento para o campo eletromagnético é (GASPERINI; SABBATA, 1985; CARROLL, 2004)

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}_{\rho}F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.53)$$

em que o tensor eletromagnético é definido por $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, e A_{μ} é o campo de *gauge* eletromagnético.

2.3 Cosmologia

A área da física que estuda a descrição da estrutura e evolução do Universo é conhecida como cosmologia (WEINBERG, 1972; COLES; LUCCHIN, 2003). Albert

Einstein deu início à cosmologia moderna, quando publicou, em 1917, um artigo pautado na sua recém formada teoria da relatividade geral, no qual almejava explicar a evolução do Universo. Ele acreditava na concepção de um Universo estático, para isso incluiu nos seus cálculos a constante cosmológica, com o intuito dela gerar uma força repulsiva e assim proporcionar soluções para este Universo.

Os modelos cosmológicos são fundamentados a partir do princípio cosmológico, que estabelece que o Universo, quando visto a partir de uma escala suficientemente grande, possui propriedades que são as mesmas para todos os observadores. Duas consequências do princípio cosmológico são a homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas. Observações indicam que o Universo deve ser não estático se ele obedece o princípio cosmológico (WEINBERG, 1972). Alexander Friedmann foi o primeiro a seguir o princípio cosmológico, em trabalhos de 1922 e 1924 (FRIEDMANN, 1999; HUBISZ, 2014), para estabelecer as equações que descrevem a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico, as conhecidas equações de Friedmann (CARROLL, 2004). De maneira independente, Georges Lemaitre obteve as equações de um Universo em expansão em 1927 (LUMINET, 2013).

Em seu estudo da dinâmica do Universo, Friedmann introduziu uma quantidade responsável por caracterizar a expansão relativa do universo chamado de fator de escala $a(t)$, que em geral depende do conteúdo do Universo como pressão $p(t)$ e a densidade $\rho(t)$. De fato, o comportamento de $a(t)$ é uma questão dinâmica, que é determinada pelas equações de Einstein, ou ainda em termos das equações de Friedmann.

A isotropia pode ser explicada a partir de observações do Universo. Edwin Hubble notou em 1929 que as galáxias estavam se afastando uma das outras em grandes proporções (WEINBERG, 1972). Hubble constatou que a velocidade de afastamento é proporcional à distância em relação a galáxia observada e a nossa galáxia por exemplo, ou seja o Universo estava em expansão. Foram evidências como esta que permitiram considerar o Universo como sendo isotrópico. Acidentalmente Penzias e Wilson, em 1965, descobriram a radiação cósmica de fundo (PENZIAS; WILSON, 1965; GAWISER; SILK, 2000) estabelecendo a validade para o princípio cosmológico. Por sua vez, a homogeneidade implica que observadores em diferentes galáxias em um determinado instante de tempo irão observar as mesmas características do Universo ao seu redor, o que contém a ideia de que não existe um referencial privilegiado.

A nível de curiosidade, existem outros modelos cosmológicos que carregam algumas propriedades do princípio cosmológico, como por exemplo modelos cosmológicos tipo Bianchi, que descrevem Universos homogêneos mas que não são necessariamente isotrópicos em seções espaciais (ELLIS; MACCALLUM, 1969) e o modelo de Lemaître-Tolman-Bondi que considera apenas isotropia, sem homogeneidade (ENQVIST, 2008; YU; LI; WEI, 2020). Descreveremos a seguir alguns dos elementos fundamentais do modelo FLRW, em particular as suas implicações na descrição do universo.

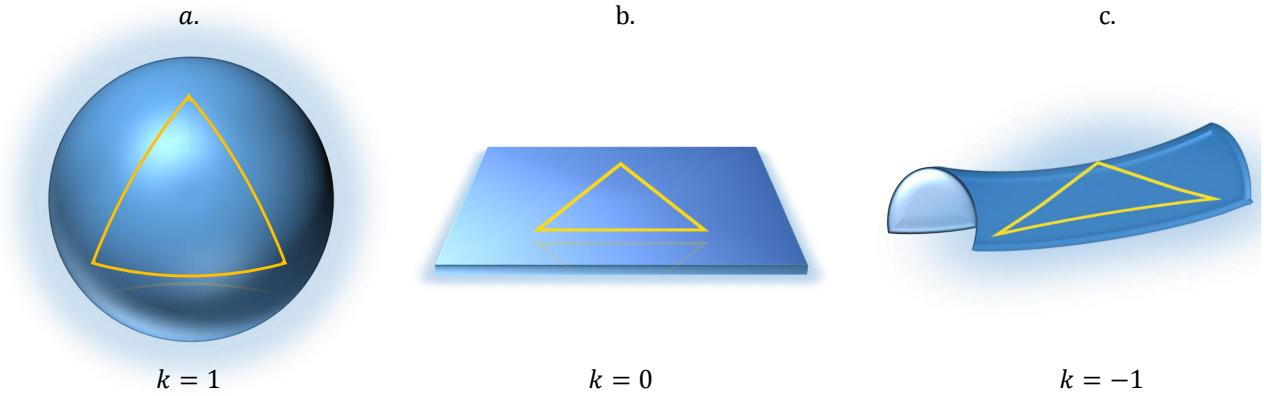
2.3.1 Métrica de Robertson-Walker

O modelo FLRW é uma descrição de um Universo homogêneo e isotrópico a partir de soluções das equações de Einstein, que contém o estado de expansão do Universo. A métrica de Robertson-Walker é o elemento de linha que descreve como é a geometria do Universo de um espaço-tempo quadrimensional. Portanto, o elemento de linha deste universo é

$$ds_{RW}^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \right]. \quad (2.54)$$

Sendo a grandeza $a(t)$ o fator de escala, que depende do tempo cósmico t , e que descreve a dinâmica da geometria do espaço-tempo. O termo t da métrica refere-se ao tempo cosmológico próprio, este é o tempo medido por um observador comóvel à expansão do Universo. O parâmetro k identifica as diferentes possibilidades de geometria do Universo, veja a figura (2.5). Teremos um Universo espacialmente plano se $k = 0$, o Universo plano apresenta características da geometria euclidiana, é espacialmente infinito e as observações atuais indicam que o nosso Universo é geometricamente plano, com uma margem de erro de apenas 0.4% (BERNARDIS et al., 2000). No caso $k = 1$ temos um espaço de geometria fechada. Enquanto que para $k = -1$ o espaço é uma geometria aberta, pois as linhas paralelas vão se distanciando umas em relação às outras.

Figura 2.5 – As três possíveis geometrias do Universo através da métrica FRW. a. $k = 1$ representa um Universo esférico fechado, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e o comprimento das circunferências são menores que $2\pi r$. b. $k = 0$ Universo plano, geometria euclidiana com Universo de dimensão infinita. c. $k = -1$ Universo hiperbólico aberto de tamanho infinito, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e o comprimento das circunferências são maiores que $2\pi r$.



Fonte: Produção do autor (2020).

Discutiremos nesta seção as equações de Friedmann, que permitem estudar características de um Universo em expansão descrito por um fluido perfeito, com densidades de energia e pressão conhecidos. Este modelo cosmológico considera que a gravitação é descrita pela teoria da relatividade geral. A partir do elemento de linha (2.54) podemos determinar as seguintes componentes para a métrica $g_{\mu\nu}$ que descreve o espaço-tempo

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Como o modelo de FLRW faz uso do princípio cosmológico em suas formulação, podemos considerar a fonte da curvatura do Universo como um fluido perfeito. Portanto, consideraremos que este fluido não conduz calor, não apresenta cisalhamento e viscosidade, considerações sustentadas pela isotropia. Desta forma o tensor energia-momento é escrito sobre forma (2.52)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

sendo $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ o vetor de quadri-velocidade de um observador comóvel no fluido.

Vamos agora derivar a partir das equações de campo de Einstein as expressões responsáveis pela dinâmica do Universo de FLRW. Considerando como ponto de partida as componentes da métrica (2.55), podemos calcular as componentes não nulas do símbolo de Christoffel, que permitem por fim determinar as seguintes componentes do tensor de Ricci (CARROLL, 2004),

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{(1-kr^2)}, \\ R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), & R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Por fim, temos ainda que o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (2.58)$$

Por sua vez, as componentes não nulas do tensor de energia-momento são diagonais

$$T_{tt} = \rho, \quad T_{rr} = \frac{a^2}{1-kr^2}p, \quad T_{\theta\theta} = a^2r^2p, \quad T_{\phi\phi} = a^2r^2\sin^2\theta p. \quad (2.59)$$

Agora temos todas as quantidades necessárias para encontrarmos as equações de campo de Einstein, desenvolvidas por Friedmann. Para isso vamos substituir as equações (2.57) e as equações (2.59) nas equações de Einstein. As duas soluções encontradas por Friedmann são, para a componente temporal,

$$\boxed{H^2 = \frac{\kappa\rho}{3} - \frac{k}{a^2}}, \quad (2.60)$$

e para componente espacial

$$\boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa p - (H)^2 - \frac{k}{a^2}}, \quad (2.61)$$

onde definimos o parâmetro de Hubble, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, que identifica a taxa de expansão do Universo, com o ponto correspondendo à derivada em relação ao tempo cósmico.

Ademais, podemos ainda obter, através da combinação das equações (2.60) e (2.61), a seguinte relação linear do parâmetro de Hubble com os constituintes de energia

e pressão

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)}, \quad (2.62)$$

e

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = -\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}}. \quad (2.63)$$

Notamos na equação (2.62) que tanto a pressão como a densidade de energia são a causa da taxa de expansão da parte espacial do Universo; de fato, o caso $\rho + 3p < 0$ representa uma aceleração do Universo, pois temos que $d^2a/dt^2 > 0$. Por outro lado, se $\rho + 3p > 0$ fornece um Universo que está desacelerando pois $d^2a/dt^2 < 0$.

Temos ainda a partir da lei de conservação do tensor energia-momento (2.50) a seguinte relação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.64)$$

que é conhecida como a equação da continuidade do fluido cósmico e como em qualquer outro sistema fechado ela expressa a conservação da energia. Frequentemente, podemos escolher uma equação de estado para expressar as características do fluido que adotarmos. De fato, a equação de estado permite estabelecer uma relação entre as variáveis p e ρ para assim expressar as componentes do fluido perfeito que constitui o Universo (CARROLL, 2004). Como um exemplo, podemos descrever a chamada matéria bariônica, parte constituinte do nosso universo, como um gás composto por partículas massivas não-relativísticas (CARROLL, 2004).

As componentes mais relevantes que formam o Universo são: radiação, matéria e constante cosmológica. Portanto, assumimos na cosmologia a existência da equação de estado (CARROLL, 2004)

$$p = \omega\rho, \quad (2.65)$$

onde ω é um parâmetro que não depende, necessariamente, do tempo. Desenvolvendo a equação de energia do fluido (2.64), temos que

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.66)$$

sendo ω é um parâmetro livre da teoria, e em geral depende do conteúdo de matéria. A partir da suposição de que ω seja uma constante, podemos realizar uma integração, de tal forma que podemos avaliar como se dá a evolução temporal dos parâmetros que

caracterizam a distribuição de matéria,

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.67)$$

Diferentes valores de ω fornecem indicadores para verificar o comportamento da dinâmica de um Universo em diferentes épocas. Os valores de interesse do parâmetro ω são obtidos a partir de análises do comportamento dos constituintes do Universo (WEINBERG, 1972).

A radiação e a poeira (matéria não-relativística fracamente interagente, logo com pressão nula) são os exemplos mais comuns de fluidos usados na cosmologia. Dizemos que um Universo tenha domínio de poeira se ele apresenta $\omega = 0$. As estrelas e as galáxias comuns são exemplos de matéria cuja a pressão é desprezível em comparação com a densidade de energia.

Quando escolhemos que $\omega = 0$, a equação (2.67) é escrita como

$$\rho_M(t) \propto a^{-3}, \quad (2.68)$$

esta expressão nos mostra o comportamento decrescente da densidade de energia da matéria em relação ao parâmetro a .

Por sua vez, a época de radiação corresponde à era em que a energia do Universo era dominada pelos fótons, que interagiam com prótons, elétrons e núcleos (parte significativa do Universo à época). De fato, o tensor de momento-energia $T_{\mu\nu}$ dado por (2.56) possui traço nulo $T^\mu_\mu = 0$. Isto implica que a radiação tem a seguinte equação de estado

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (2.69)$$

Logo, para um Universo cuja a densidade de energia está sob a forma de radiação, temos que $\omega = 1/3$, e o caracterizamos como sendo dominado pela radiação.

Caso $\omega = 1/3$, vemos que a densidade de energia se comporta como

$$\rho_R(t) \propto a^{-4}. \quad (2.70)$$

Observamos que a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente em comparação com a densidade de matéria. Atualmente, a contribuição da densidade de

radiação é consideravelmente menor do que a da matéria. Tudo indica que no passado, quando o Universo era menor, a densidade de radiação era dominante (CARROLL, 2004), estabelecendo a era da radiação.

Einstein, baseado em observações experimentais da época, desenvolveu um modelo cosmológico em 1917 que possuía características de um Universo estático. Contudo, tendo em vista que as suas equações de campo descreviam um Universo acelerado ou desacelerado então, para compensar os efeitos atrativos da gravidade o que levaria a um Universo em contração e conseqüentemente adequar sua teoria com as observações, ele incluiu em seu desenvolvimento uma constante, sendo ela responsável em produzir uma força repulsiva para balancear a atração gravitacional e assim reproduzir o seu Universo estático. Mas, apesar das descobertas de um Universo em expansão por Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929) terem desbancado os trabalhos de Einstein, atualmente, no modelo cosmológico padrão, a constante cosmológica está relacionada com uma densidade de energia do vácuo sendo uma forte candidata para descrever a expansão acelerada do Universo.

No caso em que a constante cosmológica Λ é considerada, as equações de campo de Einstein são escritas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa}\right). \quad (2.71)$$

Usualmente, considerar a constante cosmológica no lado direito da equação de campo é associá-la a um conteúdo de “matéria”, melhor dizendo vácuo. Definimos assim, o tensor de momento-energia do vácuo $T_{\mu\nu}^{(V)} = \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa}$, de tal forma que podemos escrever

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{(V)}\right). \quad (2.72)$$

Naturalmente, o tensor do vácuo quando escrito na forma de um fluido perfeito leva à:

$$\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\kappa}. \quad (2.73)$$

Portanto, a partir da densidade de energia (2.65) temos, então, que a equação de estado é $\omega = -1$, e neste caso a densidade de energia é

$$\rho_{\Lambda}(t) \propto a^0, \quad (2.74)$$

essa expressão caracteriza um Universo dominado pelo vácuo. Vale a pena comentar que, no contexto do modelo Λ CDM, ela pode representar a expansão acelerada do Universo evidenciada pela energia escura onde $\rho_\Lambda = \text{const.}$ De fato, o domínio da contribuição da energia do vácuo no Universo é descrito pelas soluções de De Sitter (GASPERINI; SABBATA, 1985).

Podemos levar em consideração a contribuição da constante cosmológica nas equações de Friedmann. Neste caso, encontramos que

$$H^2(t) = \frac{\kappa\rho(t)}{3} - \frac{k}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.75)$$

e também

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [\rho(t) + 3p(t)] + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.76)$$

Temos o parâmetro de aceleração escrito com a constante cosmológica. Estas são as expressões para o Universo estático de Einstein.

A fim de resolver as equações (2.75) e (2.76) é necessário especificar o tipo de equação de estado estamos considerando, ou ainda, que época do universo estamos interessados em descrever por meio de escolhas da equação de estado do fluido, bem como as funções de densidade de energia e/ou pressão.

3 GEOMETRIA E MODELOS EQUIVALENTES

Discutiremos neste capítulo alguns objetos geométricos apresentados anteriormente e que são presentes na geometria curva, e que são úteis para o desenvolvimento de teorias alternativas à relatividade geral. Abordaremos o fato de que a conexão em sua forma mais geral pode ser escrita em termos de quantidades além do símbolo de Christoffel, para auxiliar na formulação de teorias modificadas em termos de geometria não-riemannianas. De maneira complementar, apresentaremos algumas características da ação dos tensores de torção e de não-metricidade no transporte de vetores sobre uma determinada variedade a fim de elucidar o seu conteúdo físico.

Por complementaridade, discutiremos alguns modelos gravitacionais alternativos (equivalentes e extensões da relatividade geral) que levam em consideração esses objetos geométricos para além da curvatura.

3.1 Formulações equivalentes

A partir da geometria afim, é possível obter todas as geometrias riemanniana e não-riemannianas por meio de certas condições sobre as componentes da conexão, veja a ilustração na figura (3.1).

Explicitamente, é possível considerarmos condições sobre a conexão (GASPERINI; SABBATA, 1985; JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019),

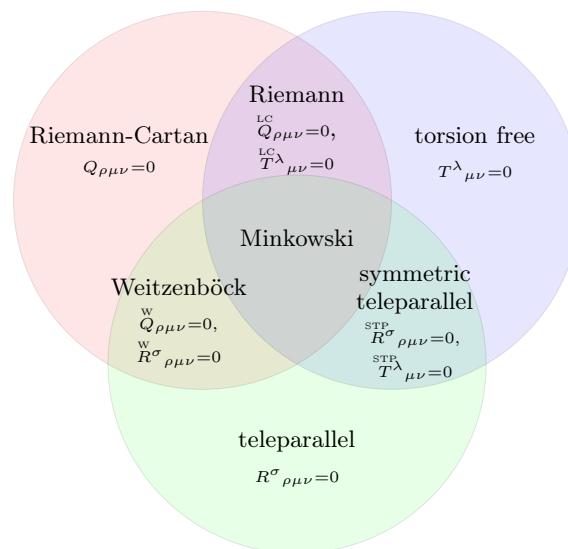
$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^{\alpha}_{\mu\nu} + L^{\alpha}_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

obtendo as seguintes formulações:

1. A geometria de Riemann-Cartan é obtida ao tomarmos a componente da não-metricidade nula, ou seja $\mathbb{Q} = 0$, mantendo apenas com a curvatura $R \neq 0$ e a torção $\mathbb{T} \neq 0$;
2. A geometria teleparalela desconsidera a curvatura $R = 0$, a parte simétrica da conexão, considerando apenas as componentes de torção $\mathbb{T} \neq 0$ e de não-metricidade $\mathbb{Q} \neq 0$, esta geometria tem como característica que o transporte de vetores é independente do caminho;

3. A geometria livre de torção é obtida ao excluirmos a torção $\mathbb{T} = 0$, e expressarmos a conexão apenas em termos do tensor de não-metricidade $\mathbb{Q} \neq 0$ e de curvatura $R \neq 0$;
4. Na geometria de Riemann, desconsideramos as componentes de torção $\mathbb{T} = 0$ e não-metricidade $\mathbb{Q} = 0$, e a conexão fica escrita apenas em termos da curvatura $R \neq 0$, e é conhecida como conexão de Levi-Civita (LC);
5. A geometria Weitzenböck (W) considera somente a componente de torção $\mathbb{T} \neq 0$, removendo curvatura $R = 0$ e não-metricidade $\mathbb{Q} = 0$;
6. A geometria teleparalela simétrica apresenta somente a componente de não-metricidade $\mathbb{Q} \neq 0$, sendo as demais nulas, curvatura $R = 0$ e torção $\mathbb{T} = 0$;
7. Por fim, considerando todas as componentes da conexão nulas, curvatura $R = 0$, torção $\mathbb{T} = 0$ e não-metricidade $\mathbb{Q} = 0$ temos o espaço de Minkowski.

Figura 3.1 – Subclasses da geometria métrica-afim, dependendo das propriedades da conexão.



Fonte: (JÄRV et al., 2018)

Podemos agora caracterizar diferentes espaço-tempo com o uso dos objetos geométricos mencionados anteriormente:

- O **espaço métrico** explora a conexão compatível com a métrica $\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} = 0$. No espaço métrico o transporte paralelo dos vetores é conservado. O tensor de

não-metricidade $Q_{\mu\nu\alpha} \equiv \nabla_{\mu}g_{\nu\alpha}$ é o objeto responsável por medir o comprimento dos vetores sob deslocamento paralelo.

- O **espaço sem torção** explora a conexão simétrica, em que o tensor de torção é nulo $T^{\alpha}_{\mu\nu}(\Gamma) = 0$. O tensor de torção é responsável por medir o não fechamento de uma curva fechada realizada por vetores sob deslocamento paralelo.
- O **espaço plano** tem-se que o tensor de curvatura é nulo $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = 0$. Estes espaços são úteis porque durante o transporte paralelo os vetores não sofrem rotação, ocorrendo somente translação. Este fato ajuda na comparação de vetores distribuídos em diferentes pontos do espaço-tempo.

3.2 Objetos geométricos

O objeto fundamental para iniciarmos o desenvolvimento de teorias mais gerais para a gravitação é a conexão afim. Como é bem conhecido, é a conexão a quantidade responsável pela mediação da gravidade, logo modificações em sua estrutura permitem a descrição de novos modelos gravitacionais (LU; ZHAO; CHEE, 2019).

Vamos lembrar de alguns objetos geométricos presentes na conexão afim. A conexão afim é expressa em termos de três componentes,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^{\alpha}_{\mu\nu} + L^{\alpha}_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

O primeiro termo é símbolo de Christoffel, componente simétrica da conexão,

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}), \quad (3.3)$$

esta quantidade é compatível com a métrica. Por sua vez, o segundo termo é o tensor de contorção dado por,

$$K_{\mu\nu}^{\beta} = T_{\nu}^{\beta}{}_{\mu} - T^{\beta}_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{\beta}, \quad (3.4)$$

sendo a componente anti-simétrica da conexão, em que a torção é definida $T_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{[\mu\nu]}^{\alpha} = -T_{\nu\mu}^{\alpha}$. Por fim temos o tensor disformação,

$$L_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu}^{\beta} - Q_{\nu}^{\beta}{}_{\mu} - Q^{\beta}_{\mu\nu}), \quad (3.5)$$

definido em termos do tensor de não-metricidade

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\alpha} \equiv Q_{\mu\nu\alpha}, \quad (3.6)$$

que corresponde à falha da conexão em não ser métrica compatível, ou ainda que atesta o fato de os comprimentos e ângulos de vetores não serem preservados sob transporte paralelo.

Vale a pena observar que a contorção e a disformação são tensores verdadeiros, segundo a lei de transformação geral de coordenadas, enquanto o símbolo de Christoffel é um pseudo-tensor. Além disso, eles apresentam aspectos tensoriais quando são submetidas a transformações de coordenadas.

3.3 Relatividade Geral

O tensor métrico, definido a partir de um dado elemento de linha, determina em cada ponto da variedade riemanniana um produto interno

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu}(x) \cdot h_{\nu}(x) = h_{\mu}^a(x) \cdot h_{\nu}^b(x) \eta_{ab}, \quad (3.7)$$

sendo h_{μ}^a versores desta variedade. Ademais, esse elemento é essencial para calcularmos distâncias e ângulos, e conseqüentemente determinar a geometria do sistema físico. A relatividade geral é uma teoria puramente da geometria curva, livre de torção $\mathbb{T} = 0$ e do tensor de não-metricidade $\mathbb{Q} = 0$. Neste caso a conexão é simplesmente a conexão de Levi-Civita (ou símbolos de Christoffel),

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}), \quad (3.8)$$

que consiste na situação em que escrevemos a conexão apenas em termos da métrica.

Lembramos que o tensor de Curvatura é definido por

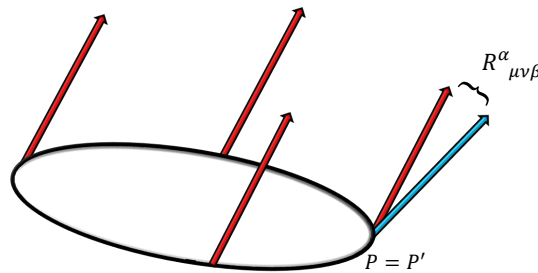
$$R_{\beta\nu\mu}^{\alpha} = (\partial_{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - (\partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}. \quad (3.9)$$

Portanto, com as informações sobre os objetos que compõem a geometria riemanniana, construímos as equações de campo da relatividade geral,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}.$$

As equações de campo de Einstein que encontramos são descritas puramente por uma variedade que apresenta curvatura do espaço-tempo, ou seja, são propriedades da geometria riemanniana, e as quantidades que caracterizam essa geometria são a conexão de Christoffel e o tensor de Riemann, por exemplo. Uma das características da curvatura está presente no efeito sobre o deslocamento de um vetor ao longo de um circuito fechado: o vetor transportado ao ser comparado com o vetor inicial apresentará uma variação, de fato uma rotação, descrita pelo tensor de curvatura R , veja a figura (3.2).

Figura 3.2 – A rotação de um vetor transportado ao longo de uma curva fechada é dada pela curvatura na geometria riemanniana.



Fonte: Produção do autor (2020).

3.3.1 Ação da teoria da Relatividade Geral

Começemos pela formulação desenvolvida por Einstein para descrever os efeitos gravitacionais. Apresentaremos a ação de Einstein-Hilbert, que estabelece que a dinâmica do espaço-tempo é descrita pelo escalar de curvatura

$$S_{\text{RG}(4)} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R(g) \quad (3.10)$$

sendo $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ o escalar de curvatura da conexão Levi-Civita (3.8). Nesta ação a métrica é a quantidade fundamental, que possui 10 componentes indeterminadas. Uma característica desta ação está na sua invariância sob Difeomorfismo (Diffs), que nos fornece uma simetria de *gauge* sobre quatro parâmetros. Mas, ao fixarmos um *gauge*, ou seja, se realizarmos uma escolha adequada de coordenadas, isso nos dará a liberdade

de limitar outras quatro componentes da métrica, reduzindo assim o número de graus de liberdade de uma propagação física para $10 - 4 - 4 = 2$; esses 2 graus de liberdade correspondem a uma partícula de spin 2 sem massa. Em um nível mais aprofundado e técnico, para uma conexão simétrica e sem torção, é adequado adicionar aos campos multiplicadores de Lagrange, que impõe explicitamente as restrições na ação como a seguir (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019)

$$S_{RG(2)} = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + \lambda_{\alpha}{}^{\mu\nu} T^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \hat{\lambda}^{\alpha}{}_{\mu\nu} Q_{\alpha}{}^{\mu\nu} \right]. \quad (3.11)$$

Podemos recuperar a ação (3.10) ao resolvermos as restrições impostas à conexão integrável e determinar os multiplicadores de Lagrange λ e $\hat{\lambda}$, e substituir os resultados na equação (3.11).

Algumas dificuldades surgem naturalmente através desta formulação na descrição de um espaço-tempo curvo, e estão relacionadas com o formalismo hamiltoniano desta teoria. Sabemos que a ação de Einstein-Hilbert (3.10) contém derivadas segundas da métrica, fazendo com que o princípio variacional não seja bem definido. Essa questão é resolvida pela inclusão do termo de fronteira Gibbons-Hawking-York (GHY) de acordo com a referência (GIBBONS; HAWKING, 1977), estabelecendo assim um formalismo hamiltoniano consistente, e permitindo a definição de energia e momento angular do sistema de acordo com a referência (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019).

3.3.2 Extensões da relatividade geral: a teoria $f(R)$

Após a proposta da teoria da relatividade geral em 1915, ocorreram muitas motivações de tentativas de unificação da relatividade geral com outras áreas da física (GOENNER, 2004; GOENNER, 2014). Como vimos Weyl sugeriu uma nova geometria para tentar unificar a gravitação ao eletromagnetismo, assim como a descrição do spin a partir do conceito de torção. Podemos dizer que modificar a teoria da gravitação é uma maneira de encontrarmos equações de campo que generalizem as equações de campo da relatividade geral de Einstein. Por exemplo, a fim de descrever os conteúdos de energia escura e matéria escura, relacionados respectivamente com a expansão acelerada do universo, curvas de rotação de galáxias, formação de estruturas, etc, são propostas

modificações das mais diferentes formas da teoria gravitacional de Einstein (NOJIRI; ODINTSOV; OIKONOMOU, 2017).

Uma extensão bastante estudada para descrever a interação gravitacional são as teorias $f(R)$, que consideram funções não lineares do tensor escalar de curvatura R (FELICE; TSUJIKAWA, 2010; SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Por exemplo, essa teoria possibilita explicar a expansão acelerada do Universo, sem a necessidade de incluir componentes hipotéticos de matéria e energia escura. Vale a pena enfatizar que a motivação deste capítulo é discutir as necessidades de modificar a teoria gravitacional e quais os métodos usados para formular essas teorias alternativas.

Em geral, a ação para a teoria $f(R)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_f. \quad (3.12)$$

Podemos representar esta função por uma série (SOTIRIOU; FARAONI, 2010)

$$f(R) = \dots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} \dots, \quad (3.13)$$

onde α_i e β_i são constantes com dimensões adequadas.

Conhecemos dois métodos equivalentes de determinar as equações de campo a partir da ação de Einstein-Hilbert, o formalismo métrico e o de Palatini (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; FELICE; TSUJIKAWA, 2010). A formulação métrica consiste na variação somente do tensor métrico, enquanto que a formulação de Palatini considera a métrica e a conexão como objetos independentes. Quando aplicadas à relatividade geral, estas duas interpretações fornecem as mesmas equações de campo. Porém, no caso de modelos alternativos, por exemplo a teoria $f(R)$, as equações que encontraremos dependerão do método usado para formular a ação.

3.3.2.1 Formalismo Métrico

Desenvolvendo a variação da ação (3.12), encontramos por meio do formalismo métrico a seguinte equação de campo

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R + g_{\mu\nu} \square f_R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

sendo a notação $\frac{\delta f}{\delta R} \equiv f_R$, também define-se que $\square \equiv \nabla^\lambda \nabla_\lambda$. A equação de campo de Einstein é recuperada ao escolhermos $f(R) = R$.

Sabemos que as equações de campo na relatividade geral apresentam derivadas parciais de segunda ordem da métrica. Por sua vez, podemos verificar a partir das expressões obtidas (3.14), elas também são equações diferenciais parciais, porém agora de quarta ordem.

3.3.2.2 Formalismo de Palatini

No formalismo de Palatini a métrica e a conexão são tratadas como quantidades independentes (CARROLL, 2004). Desta forma, vemos que para aplicarmos este formalismo é necessário considerarmos dois campos independentes para descrever a gravitação: o campo métrico simétrico e uma conexão afim. De fato, a ideia por trás deste formalismo é elucidar que o uso dos símbolos de Christoffel na ação de Einstein-Hilbert não precisa ser uma suposição adicional, mas que realmente esta informação já está naturalmente presente na construção.

Para enfatizar o fato de que a conexão não está necessariamente definida em termos da métrica, ou seja, as conexões escritas como o símbolo de Christoffel, indicamos as derivadas covariantes associadas a esta conexão por $\hat{\nabla}$.

Portanto, pelo princípio variacional chegamos às equações para o campo métrico

$$f_R R_{(\mu\nu)}(\Gamma) - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

e também para a conexão afim Γ

$$-\hat{\nabla}_\rho \left(\sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_R g^{\sigma(\mu} \delta^{\nu)}_\rho \right) = 0. \quad (3.16)$$

Agora, o tensor $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ pode ser escrito em termos das suas componentes simétrica e antissimétrica. Mas como $R_{[\mu\nu]}(\Gamma)g^{\mu\nu} = 0$ temos que apenas a sua parte simétrica $R_{(\mu\nu)}(\Gamma)$ é presente na equação (3.15). Por sua vez, a equação (3.16) nos fornece a dinâmica dos coeficientes $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ em termos dos campos g . Vemos assim que a equação (3.15) é a generalização das equações de Einstein.

3.4 Teoria teleparalela

H. Weyl em 1918, após a formulação da relatividade geral, trabalhou na unificação da gravitação e do eletromagnetismo (GOENNER, 2004; GOENNER, 2014). Apesar do trabalho de Weyl não ter obtido êxito, Einstein enxergou nessa proposta uma oportunidade para tentar desenvolver uma teoria unificadora. Sua ideia foi introduzir um outro campo que daria a dinâmica para a geometria sem ser a métrica, e esses campos são os *vierbein*. Os campos *vierbein* são bases ortogonais construídas a partir de um conjunto de vetores linearmente independentes, desenvolvidos sobre cada ponto de uma variedade, para assim descrever o espaço quadrimensional (ALDROVANDI; PEREIRA, 2013).

As tentativas em descrever uma teoria unificada possibilitaram introduzir noções de teoria de *gauge* à gravitação. A partir da condição teleparalela Kenji Hayashi e Takeshi Shirafuji em 1979, desenvolveram uma teoria de *gauge* do grupo de translações para a gravitação divulgada por “New General Relativity” (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979). Neste novo formalismo o espaço-tempo é globalmente plano e a mediação gravitacional é descrita exclusivamente pelo tensor de torção. Teorias gravitacionais que são construídas por meio deste tensor carregam um cenário propício para incluir o spin à gravidade, devido o spin ser a fonte do tensor de torção (HAMMOND, 2002).

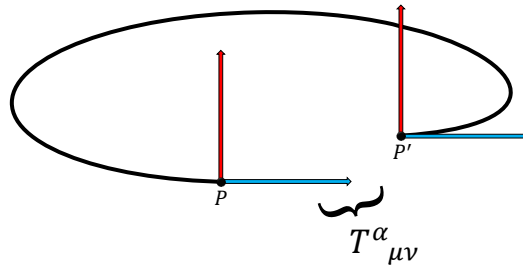
Discutiremos a seguir como a teoria teleparalela tem as mesmas equações de campo da relatividade geral, sendo que suas ações diferenciam-se apenas por um termo de derivada total. Entretanto, diferentemente da relatividade geral onde a noção de força é desprezível, na teoria teleparalela a torção exerce uma força análoga a força de Lorentz do eletromagnetismo. Logo, na teoria teleparalela equivalente da relatividade geral não temos geodésicas.

3.4.1 Geometria de Weitzenböck

A geometria de Weitzenböck está intrinsecamente vinculada à torção, ou melhor, à translação de vetores, sendo representada em uma variedade de Weitzenböck W^4 , ou seja, temos pontos relacionados localmente ao espaço tangente que são descritos por um espaço de Minkowski. Como vimos anteriormente, a torção se relaciona ao fato de um percurso no espaço ambiente não apresentar uma curva fechada em um

plano tangente à variedade. Na figura (3.3) podemos visualizar o transporte de dois vetores infinitesimais em um circuito fechado, mostrando que não conseguimos realizar o fechamento no plano tangente.

Figura 3.3 – O não fechamento do circuito formado quando comparamos o vetor transportado paralelamente sob efeito de torção com a sua condição inicial no mesmo ponto.



Fonte: Produção do autor (2020).

A conexão escrita em termos da métrica e da torção, fica

$${}^T\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\alpha_{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

este objeto é conhecido como conexão de Weitzenböck, traremos um pouco mais de detalhes desda quantidade futuramente, sendo que $K^\alpha_{\mu\nu}$ é o tensor de contorção.

Podemos caracterizar dois tipos de geodésicas, uma delas é a geodésica métrica que é definida como a menor distância entre dois pontos de uma curva. Então, dado um elemento de linha ds e a métrica associada, desenvolvemos a equação da geodésica métrica

$$\ddot{x}^\alpha + \overset{C}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (3.18)$$

onde o ponto (·) significa a derivada em relação ao tempo próprio, sendo que neste contexto representaremos o símbolo de Christoffel por $\overset{C}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu}$.

Por outro lado, podemos ter a geodésica afim, também conhecida como autoparalela, que é entendida como a curva mais curta de uma superfície da geometria. Esta nova geodésica pode ser obtida a partir do conceito de derivada covariante

$$\ddot{x}^\alpha + \overset{T}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (3.19)$$

A distinção entre as geodésicas métrica e afim, na geometria riemanianna, é irrelevante pois as duas apresentam como definição a menor distância de uma curva. Contudo, em outras geometrias elas são quantidades distintas.

Para introduzirmos spin em uma teoria gravitacional é necessário considerarmos um espaço geométrico que apresente torção, por exemplo a geometria de Riemann-Cartan. Isto se dá pelo fato de que podemos considerar que a fonte de torção é o spin. Portanto, podemos dizer que a grande motivação de se estudar teorias da relatividade com torção é a possível inserção do spin à gravidade (HEHL et al., 1976).

3.4.2 Noções matemáticas

Para discutimos a teoria teleparalela para a gravitação precisamos descrever o formalismo de *vierbein* sobre uma variedade do espaço-tempo. Teremos em cada ponto da variedade um espaço tangente, caracterizado na geometria de Minkowski, descrito pela métrica

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Assumimos a notação de que as letras gregas, como μ, ν, α, \dots , descreverão o espaço-tempo físico, enquanto que as letras latinas, $a, b, c, \dots, i, j, \dots$ designarão o espaço tangente.

Os campos dinâmicos da teoria paralela, ou seja, os *vierbein*, podem ser escritos através da relação com a métrica do espaço quadridimensional

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_{\mu}(x) h^b{}_{\nu}(x) \quad (3.20)$$

enquanto que a sua inversa é identificada da seguinte forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} H_a{}^{\mu}(x) H_b{}^{\nu}(x), \quad (3.21)$$

onde $H_a{}^{\mu}$ é a inversa do campo *vierbein* $h^a{}_{\mu}$. Ademais, elas satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\begin{cases} h^a{}_{\mu}(x) H_a{}^{\nu}(x) = \delta_{\mu}^{\nu} \\ h^b{}_{\mu}(x) H_a{}^{\mu}(x) = \delta_a^b. \end{cases} \quad (3.22)$$

Portanto, no contexto do teleparalelismo, as coordenadas do espaço-tempo serão representadas por x^{μ} na variedade W^4 , enquanto que x^a as coordenadas do espaço

tangente. Desta forma, vemos que x^a são coordenadas localmente inerciais, e que são relacionadas com o espaço-tempo de Minkowski.

O elemento de linha do espaço W^4 é descrito por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (3.23)$$

por sua vez, o elemento de linha invariante do espaço tangente é descrito pela expressão a seguir

$$d\sigma^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b. \quad (3.24)$$

Estas expressões explicitam a relação entre o tensor métrico da variedade W^4 com o tensor métrico de Minkowski.

Devido ao fato de que os *vierbein* são definidos sob transformações de Lorentz no espaço tangente, essas compreendendo 6 graus de liberdade, a quantidade de componentes independentes deste campo é reduzido para 10 de um total de 16. Isso correspondente ao mesmo número de graus de liberdade do tensor métrico. Portanto, os campos *vierbein* correspondem às mesmas informações do que o tensor métrico, só que definidos em uma variedade de Weitzenböck W^4 .

3.4.3 Transporte paralelo e teleparalelismo

A fim de definirmos a conexão Weitzenböck, faremos uso do conceito de transporte paralelo, em que iremos deslocar o campo h sobre a variedade W^4 . Seja dado o *vierbein* h^a_μ localizado no ponto x^μ , vamos deslocar este campo até uma posição infinitesimalmente próxima $x^\mu + dx^\mu$, tal que $h^a_\mu + dh^a_\mu$, em que δh^a_μ será a sua variação. A diferenciação invariante entre os campos fica

$$\overset{W}{D}h^a_\mu = dh^a_\mu + \delta h^a_\mu. \quad (3.25)$$

Caso a condição teleparalela seja mantida verdadeira, o comprimento do vetor transportado em paralelo será preservado.

Podemos remover efeitos da curvatura em (3.17), para isso precisamos admitir um *paralelismo absoluto* dos *vierbein* ao longo da variedade espaço-temporal, quando são

transportadas paralelamente entre pontos infinitesimalmente próximos

$$\nabla_\nu h^\alpha{}_\mu = \partial_\nu h^\alpha{}_\mu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} h^\alpha{}_\sigma \equiv 0. \quad (3.26)$$

Vemos assim que a teoria que exige que as componentes do *vierbein* permaneçam paralelas durante o deslocamento é conhecida como teoria teleparalela, sendo a conexão de Weitzenböck presente neste desenvolvimento.

A conexão de Weitzenböck escrita em termos dos vierbeins pode ser obtida diretamente da condição de ortogonalidade

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = H_a{}^\lambda \partial_\nu h^a{}_\mu. \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.20) na conexão de Levi-Civita, obtemos então

$$\overset{T}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\alpha{}_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

em que definimos por conveniência

$$K^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[T_\nu{}^\sigma{}_\mu + T_\mu{}^\sigma{}_\nu - T^\sigma{}_{\mu\nu} \right]. \quad (3.29)$$

Portanto, temos uma conexão em termos da torção na variedade W^4 , com tensor de torção representado por

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^\sigma{}_a \left[\partial_\mu h^a{}_\nu - \partial_\nu h^a{}_\mu \right]. \quad (3.30)$$

Por fim, ao realizarmos o cálculo explícito da curvatura, relacionado com a conexão (3.28), obteremos que ela é identicamente nula,

$$R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu}(\Gamma) \equiv 0.$$

Esta é chamada de condição de teleparalelismo.

Desta forma, a interação gravitacional descrita pela teoria teleparalela é mediada exclusivamente pelo tensor de torção, numa geometria plana para o espaço-tempo.

Devemos notar, todavia, que ao usarmos a conexão (3.17) o tensor de curvatura na geometria em questão é descrito em termos de duas contribuições distintas

$$R^\alpha{}_{\beta\nu\mu} = \overset{C}{R}{}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \overset{W}{R}{}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0, \quad (3.31)$$

sendo que $\overset{C}{R}{}^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ é o tensor de Riemann usual em termos do símbolo de Christoffel, enquanto

$$\overset{W}{R}{}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \nabla_\nu K^\alpha{}_{\mu\beta} - \nabla_\mu K^\alpha{}_{\nu\beta} + K^\rho{}_{\mu\beta} K^\alpha{}_{\nu\rho} - K^\rho{}_{\nu\beta} K^\alpha{}_{\mu\rho}, \quad (3.32)$$

está escrito exclusivamente em termos da conexão de Weitzenböck.

Podemos observar que este tensor de Riemann definido com a conexão (3.28) não possui as mesmas simetrias do que o tensor definido na geometria riemanniana, por exemplo

$$\overset{W}{R}{}_{\alpha\beta\nu\mu} \neq \overset{W}{R}{}_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (3.33)$$

Isto implica que o tensor de Ricci definido através da contração do tensor de Riemann (3.9), $R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}$, não é mais simétrico. Consequentemente isso faz com que o tensor de Einstein também não seja mais simétrico.

3.4.4 Ação e equações de campo

O Teleparalelismo métrico é uma teoria alternativa à relatividade geral, sendo que a sua principal estrutura geométrica atribuída à gravidade é o tensor de torção ao invés da curvatura. Neste caso, temos a geometria de Weitzenböck.

A fim de desenvolvermos a ação funcional relacionada com esta teoria, podemos fazer uso de uma combinação irreduzível envolvendo o tensor de torção. Essa combinação tem forma quadrática e paridade par, logo (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018)

$$\mathbb{T} \equiv c_1 T_{\alpha\mu\nu} T^{\alpha\mu\nu} + c_2 T_{\alpha\mu\nu} T^{\mu\alpha\nu} + c_3 T_\alpha T^\alpha \quad (3.34)$$

sendo c_i os parâmetros livres da teoria, enquanto $T_\mu = T^\alpha{}_{\mu\alpha}$ é o traço do tensor de torção. As restrições na ação são efetuadas através da inserção adequada de multiplicadores de Lagrange (que são definidos por convenção, como densidades tensoriais), de maneira

que a ação quadrática fica,

$$S_{\mathbb{T}} = - \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \mathbb{T} + \lambda_{\alpha}^{\beta\mu\nu} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \hat{\lambda}^{\alpha}_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} \right]. \quad (3.35)$$

O próximo passo consiste em verificarmos a possibilidade de recuperar a relatividade geral através de uma escolha adequada dos parâmetros do modelo. Para isso, podemos usar a relação (3.32), para escrever

$$R = \overset{C}{R} + \overset{\dagger}{\mathbb{T}} + 2\nabla_{\mu} T^{\mu} = \overset{C}{R} + \overset{\dagger}{\mathbb{T}} - \frac{2}{h} \partial_{\mu} (hT^{\mu}), \quad (3.36)$$

em que $\overset{\dagger}{\mathbb{T}}$ é a representação do tensor \mathbb{T} equação (3.34), entretanto, com a configuração $c_3 = -2c_2 = -4c_1 = -1$.

Observe que as constantes c_1 , c_2 e c_3 da equação (3.34), oferecem possibilidades para o desenvolvimento de outras teorias. De fato, existem outros modelos resultantes de valores específicos destes parâmetros; esses modelos são construídos de tal forma a concordar com observações experimentais e também com propostas de fenomenologia futura (BLAGOJEVIC, 2001). Apresentamos a seguir alguns cenários obtidos a partir de (3.34), que correspondem à relatividade geral na aproximação linear de campo fraco, que possuem significativo interesse (BLAGOJEVIC, 2001; HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979):

$$i) \ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0, \text{ para } c_3 = -1. \quad (3.37)$$

Esta família descreve uma teoria gravitacional equivalente à relatividade geral para matéria sem spin (BLAGOJEVIC, 2001). Outra escolha relevante é descrita pela condição

$$ii) \ 2c_1 - c_2 = 0. \quad (3.38)$$

No âmbito gravitacional, esta configuração leva à Lagrangiana de Einstein-Hilbert $\mathcal{L}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R$ com aspectos da geometria riemanniana, por meio da expressão (3.36).

Caso a variedade seja desprovida de curvatura, ou seja, dotado de uma geometria de Weitzenböck, isto implica que a Lagrangiana é equivalente à Lagrangiana da relatividade geral, somente se os valores das constantes forem

$$c_1 = \frac{1}{4}, \ c_2 = \frac{1}{2}, \ c_3 = -1. \quad (3.39)$$

Estes valores estão de acordo com os requisitos expressos em (3.37) e (3.38). Essa configuração dos parâmetros, aplicada a (3.39) com $R = 0$, é chamada de *teoria teleparalela*, que discutiremos a seguir. Outro exemplo que tem como formulação a Lagrangiana $\mathcal{L}_{EC} = - \int d^4x \sqrt{-g} R$ onde R é o invariante dado pela expressão (3.36) é conhecida como *teoria de Einstein-Cartan*, com o formalismo matemático definido pela geometria de Riemann-Cartan (SCIAMA, 1962; SCIAMA, 1964; HEHL et al., 1976; KHANAPURKAR, 2018).

Explicitamente, temos que

$$\mathring{\mathbb{T}} = \frac{1}{4} T^{\mu\nu\alpha} T_{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu\alpha} T_{\nu\mu\alpha} - T^\mu T_\mu, \quad (3.40)$$

Essa quantidade é chamada de escalar de torção, sendo ela escrita em termos do ‘vetor’ de torção $T_\mu = T^\alpha{}_{\mu\alpha}$.

Considerando a condição teleparalela, ou seja espaço plano com $R = 0$, a equação (3.36) é expressa por

$$\overset{C}{R} = -\mathring{\mathbb{T}} + F_T \quad (3.41)$$

onde definimos $F_T = \frac{2}{\hbar} \partial_\mu (h T^\mu)$ como sendo o termo de fronteira. Portanto, a ação da formulação teleparalela da teoria gravitacional é escrita como

$$S_{\text{Tel}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x h \mathring{\mathbb{T}} + S_m [h^a{}_\mu, \psi], \quad (3.42)$$

em que $h = \det(h^a{}_\mu) = \sqrt{-g}$ é o determinante do campo de *vierbein*, $\mathring{\mathbb{T}}$ é o escalar de torção e S_m é a ação de matéria.

Finalmente, como a ação de Einstein-Hilbert é linear no escalar de Ricci e a ação do teleparalela também é linear ao escalar de torção, isso significa que as duas ações satisfazem a seguinte relação

$$\begin{aligned} S_{\text{EH}} - S_{\text{Tel}} &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x (R + \mathring{\mathbb{T}}) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \partial_\mu (h T^\mu), \end{aligned} \quad (3.43)$$

ou seja as ações de Einstein-Hilbert e a teleparalela diferem apenas por uma derivada total, o termo de fronteira F_T . Essas relações indicam que as equações de campo

das teorias são iguais, o que prova que a teoria teleparalela é equivalente à teoria da relatividade geral.

A equação de campo da teoria teleparalela pode ser obtida variando a ação (3.42) com respeito ao *vierbein*, obtendo (ALDROVANDI; PEREIRA, 2013)

$$\frac{1}{h} \partial_\mu (h S_\alpha^{\nu\mu}) - T^\lambda_{\nu\alpha} S_\lambda^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathbb{T} H_a^\mu = 4\pi G T_a^\mu \quad (3.44)$$

com o tensor de energia-momento definido a partir de $T_a^\lambda = \frac{1}{h} \frac{(\mathcal{L}_m)}{h^a_\lambda}$, enquanto definimos o *superpotencial* através de

$$S_\alpha^{\mu\nu} = -S_\alpha^{\nu\mu} = \frac{1}{2} (K_\alpha^{\mu\nu} + \delta_\alpha^\nu T^\mu - \delta_\alpha^\mu T^\nu). \quad (3.45)$$

O superpotencial (3.45) também é usado para reescrever o escalar de torção como

$$\mathbb{T} = S_\sigma^{\mu\nu} T^\sigma_{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

o que permite expressar a ação em uma maneira mais compacta.

Analogamente à teoria $f(R)$ da relatividade geral, onde se desenvolve a ação com respeito a uma função arbitrária do escalar de Ricci, na teoria teleparalela a ação também pode ser desenvolvida a partir de uma função do escalar de torção, é a teoria conhecida como $f(\mathbb{T})$. Ingenuamente, dada a equivalência das teorias, era de se esperar que a teoria $f(\mathbb{T})$ também fosse equivalente a teoria $f(R)$, mas de fato elas são bastantes diferentes, ou seja, podem gerar conteúdo físico completamente diferentes (DIALEKTOPOULOS, 2019).

A ação generalizada da teoria $f(\mathbb{T})$ é escrita como

$$S_{f(T)} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x h f(\mathbb{T}) + S_m, \quad (3.47)$$

e, novamente, variando a ação com respeito ao campo *vierbein*, teremos as equações de campo

$$4h f_{TT} (\partial_\nu \mathbb{T}) S_\mu^{\nu\sigma} + 4h^a_\nu \partial_\mu (h S_\alpha^{\mu\lambda}) f_T - 4h f_T T^\sigma_{\mu\nu} S_\sigma^{\lambda\mu} - h f(\mathbb{T}) \delta^\lambda_\nu = 16\pi G h T_\nu^\lambda, \quad (3.48)$$

onde $f_T = \frac{\delta f(\mathbb{T})}{\delta T}$ e T_μ^ρ é o tensor de energia-momento. Podemos recuperar as equações de campo da teoria teleparalela para a escolha $f(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{T}$.

Podemos ver acima que as equações de campo da teoria $f(\mathbb{T})$ são de segunda ordem, enquanto da teoria $f(R)$ é de quarta ordem (XU et al., 2019), elas são bastantes usadas na cosmologia para explicar a expansão acelerada do universo em um período tardio, sem a necessidade de suposições de componentes hipotéticas (CAI et al., 2016).

3.5 Teoria teleparalela simétrica

Discutimos anteriormente que a teoria da relatividade geral desenvolvida por Einstein é estabelecida na geometria Riemanniana, nessa teoria o efeito da gravidade é mediada por uma curvatura da geometria do espaço-tempo. Também, apresentamos a gravitação teleparalela, uma teoria que se baseia na torção para descrever as interações gravitacionais. Essa formulação pode ser desenvolvida por uma teoria de *gauge* para o grupo de translações. Mas, como já reafirmamos existe também uma terceira formulação equivalente à relatividade geral, conhecida como a teoria teleparalela simétrica (NESTER; YO, 1999; ADAK; KALAY; SERT, 2006; MOL, 2017; LU; ZHAO; CHEE, 2019; XU et al., 2019; DIALEKTOPOULOS, 2019). As extensões do teleparalelismo simétrico como teorias modificada da gravidade de $f(Q)$ foram abordadas recentemente nos artigos (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018; JIMÉNEZ et al., 2020).

O objeto geométrico principal deste formalismo é o tensor de não-metricidade Q , expressa a falha da conexão em ser compatível com métricas, e é definida na geometria de Weyl (POULIS; SALIM, 2011; WHEELER, 2018). Esta teoria equivalente é atribuída a uma geometria não-Riemanniana, porém plana por conta do teleparalelismo, isso nos garante uma curvatura nula $R = 0$. Ademais, ela também é simétrica, caso a conexão afim seja tal que a efeitos de torção T são desconsiderados. Uma observação de efeitos físicos do teleparalelismo simétrico é que nesta abordagem é possível separar os efeitos gravitacionais dos inerciais (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019).

Alguns aspectos interessantes da descrição da interação gravitacional a partir de $f(Q)$ são: possibilidade da expansão acelerada do Universo, sem a necessidade de componentes exóticas ou campos extras (LU; ZHAO; CHEE, 2019; XU et al., 2019); é possível remover a conexão da geometria de Weyl a partir de uma transformação adequada de coordenadas (LU; ZHAO; CHEE, 2019).

3.5.1 Geometria de Weyl

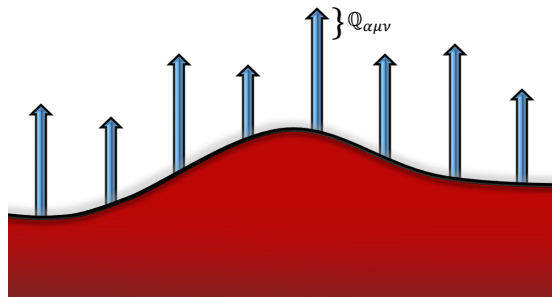
Ao estudarmos o transporte paralelo de vetores na geometria de Weyl, necessariamente um campo compensador $A_\mu dx^\mu$ deve ser introduzido, provocando a condição de não-metricidade na conexão. Surpreendentemente, Weyl identificou que A_μ era o quadripotencial eletromagnético (surgimento do princípio de *gauge*). No espaço de Weyl quando um vetor é deslocado paralelamente através da variedade ele tem seu comprimento alterado, e isto dependerá do caminho percorrido entre os diferentes pontos do circuito.

O grande diferencial desta geometria está em torno do tensor de não-metricidade, que expressa a falha da conexão em ser compatível com métricas,

$$Q_{\mu\nu\alpha} \equiv \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \neq 0.$$

Este tensor expressa geometricamente o cálculo da variação do comprimento de vetores transportados paralelamente através de uma variedade (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019), veja ilustração na figura (3.4).

Figura 3.4 – A variação do comprimento de um vetor transportado é dada pelo tensor de não-metricidade: Equivalente Teleparalelo Simétrico da Relatividade Geral.



Fonte: Produção do autor (2020).

Portanto, na geometria riemanniana os vetores têm seu módulo mantido constantes e direções alteradas, enquanto no espaço de Weyl seus módulos são modificados e as direções são preservadas.

3.5.2 Noções matemáticas

Nesta seção discutiremos como algumas grandezas geométricas podem ser reescritas em termos do tensor $Q_{\alpha\mu\nu}$. Na geometria de Weyl a conexão (3.2) é escrita

somente em termos da não-metricidade, logo

$$\overset{L}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\mu\nu} = \{\alpha{}_{\mu\nu}\} + L^\alpha{}_{\mu\nu}. \quad (3.49)$$

Esta é conhecida como a conexão com não-metricidade $\overset{L}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\mu\nu}$, em que $L^\alpha{}_{\mu\nu}$ é chamado de tensor disformação, e corresponde à conexão que depende apenas do tensor de não-metricidade, (3.5). Lembramos que a disformação $L^\alpha{}_{\mu\nu} = L^\alpha{}_{\nu\mu}$ e conseqüentemente a conexão é simétrica $\overset{L}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\mu\nu} = \overset{L}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\nu\mu}$.

A geodésica afim, também conhecida como autoparalela, é entendida neste contexto como a menor curva que assemelha-se a uma reta da geometria. Podemos obter esta geodésica a partir do conceito de derivada covariante

$$\ddot{x}^\alpha + \overset{L}{\Gamma}{}^\alpha{}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (3.50)$$

Considerando novamente a forma quadrática de segunda ordem mais geral com paridade par, mas agora escrita em termos tensor de não-metricidade, encontramos a sua decomposição sobre a forma de

$$\mathbb{Q} = \frac{c_1}{4} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{c_2}{2} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\beta\alpha\gamma} - \frac{c_3}{4} Q_\alpha Q^\alpha + (c_4 + 1) \tilde{Q}_\alpha \tilde{Q}^\alpha + \frac{c_5}{2} Q_\alpha \tilde{Q}^\alpha, \quad (3.51)$$

onde os dois traços independentes do tensor de não-metricidade são definidos por, $Q_\alpha = g^{\mu\lambda} Q_{\alpha\mu\lambda} = Q_{\alpha\lambda}{}^\lambda$ e $\tilde{Q}_\alpha = g^{\mu\lambda} Q_{\mu\alpha\lambda} = Q^\lambda{}_{\alpha\lambda}$. Desta forma, a teoria teleparalela simétrica para a gravitação pode ser formulada em termos da ação quadrática com os multiplicadores de Lagrange apropriados

$$S_Q = - \int_\Omega d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \mathbb{Q} + \lambda_\alpha{}^{\beta\mu\nu} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \lambda_\alpha{}^{\mu\nu} T^\alpha{}_{\mu\nu} \right]. \quad (3.52)$$

Observamos que o conjunto da forma quadrática tem cinco parâmetros livres, e a conexão novamente também é arbitrária. Isso nos permitir explorar a teoria em geral e analisar a possibilidade de algum caso em particular que nos forneça uma teoria equivalente à relatividade geral.

Podemos expressar de maneira geral o tensor de Riemann afim em termos dos tensores de disformação e contorção, assim

$$\begin{aligned} \overset{L}{R}{}^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = & \overset{C}{R}{}^\alpha{}_{\mu\beta\nu} + \nabla_\beta (K^\alpha{}_{\nu\mu} + L^\alpha{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (K^\alpha{}_{\beta\mu} + L^\alpha{}_{\beta\mu}) + \\ & + (K^\rho{}_{\nu\mu} + L^\rho{}_{\nu\mu})(K^\alpha{}_{\beta\rho} + L^\alpha{}_{\beta\rho}) - (K^\rho{}_{\beta\mu} + L^\rho{}_{\beta\mu})(K^\alpha{}_{\nu\rho} + L^\alpha{}_{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (3.53)$$

com a ∇ sendo a derivada covariante usual em termos da conexão afim Γ . Desta forma podemos encontrar o escalar de Ricci como

$$\begin{aligned} \overset{L}{R} = & \overset{C}{R} + \nabla_\beta (K^\beta{}_{\nu\mu} + L^\beta{}_{\nu\mu}) g^{\mu\nu} - \nabla_\nu (K^\beta{}_{\beta\mu} + L^\beta{}_{\beta\mu}) g^{\mu\nu} + \\ & + g^{\mu\nu} (K^\rho{}_{\nu\mu} + L^\rho{}_{\nu\mu})(K^\beta{}_{\beta\rho} + L^\beta{}_{\beta\rho}) - g^{\mu\nu} (K^\rho{}_{\beta\mu} + L^\rho{}_{\beta\mu})(K^\beta{}_{\nu\rho} + L^\beta{}_{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ademais, para uma conexão livre de torção $T^\alpha{}_{\nu\mu} = 0$, podemos escrever a expressão acima sob a forma

$$\overset{L}{R} = \overset{C}{R} + \mathbb{Q} + \nabla_\alpha (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha). \quad (3.55)$$

Portanto, sob a condição de teleparalelismo, ou seja que $\overset{L}{R} = 0$, a relação do escalar de Ricci com a abordagem mais geral do escalar de não-metricidade, é fornecida pela seguinte relação

$$\overset{C}{R} = \mathbb{Q} - \nabla_\alpha (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha). \quad (3.56)$$

A partir deste resultado podemos encontrar a relação que corresponde à equivalência da teoria teleparalela simétrica com a relatividade geral

$$\overset{C}{R} = \mathring{\mathbb{Q}} - \nabla_\alpha (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha), \quad (3.57)$$

neste caso, o escalar irreduzível do tensor de não-metricidade é escrita como

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \frac{1}{4} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\beta\alpha\gamma} - \frac{1}{4} Q_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha \tilde{Q}^\alpha, \quad (3.58)$$

com a seguinte escolha de valores dos parâmetros: $c_4 = 0$, e $-c_1 = c_2 = -c_3 = -2c_5 = 1/2$ na equação (3.51). Temos então que a ação equivalente à teoria da relatividade geral é

$$S_Q = - \int_\Omega d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \mathring{\mathbb{Q}} \right]. \quad (3.59)$$

No contexto da teoria teleparalela simétrica, o termo de fronteira é dado por

$$F_Q = \nabla_\alpha (Q^\alpha + \tilde{Q}^\alpha). \quad (3.60)$$

A partir da expressão $\overset{C}{R} = \overset{C}{\mathbb{Q}} - F_Q$ podemos averiguar algumas diferenças com respeito à relatividade geral. Primeiramente, a ação de Einstein-Hilbert difere desta teoria por um termo de fronteira $F_Q = \nabla_\alpha (Q^\alpha + \tilde{Q}^\alpha)$, o que mostra que resultará em equações de campos equivalentes. O *superpotential* é descrito na teoria pelo conjugado da não-metricidade, que satisfaz a seguinte relação

$$P^{\alpha\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial Q_{\alpha\mu\nu}}. \quad (3.61)$$

Temos explicitamente que este tensor possui a seguinte forma

$$\boxed{P^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} L^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \left(\tilde{Q}^\alpha g_{\mu\nu} - Q^\alpha g_{\mu\nu} + \delta_{(\mu}^\alpha Q_{\nu)} \right)}. \quad (3.62)$$

Discutiremos a seguir algumas características da teoria gravitacional formulada no contexto do teleparalelismo simétrico, em particular a sua estrutura de *gauge*.

3.5.3 Equações de campo

Primeiramente, podemos observar que o escalar irreduzível (3.51) pode ser escrito em termos do superpotencial (3.62), logo

$$\mathbb{Q} = Q_{\alpha\mu\nu} P^{\alpha\mu\nu}, \quad (3.63)$$

esta é a expressão fundamental que devemos incluir na ação. No caso particular, de equivalência com relatividade geral, temos que a ação é escrita como

$$S_Q = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \overset{C}{\mathbb{Q}} + S_M, \quad (3.64)$$

que nos fornece as seguintes equações de campo

$$\nabla_\alpha P^{\alpha}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu Q_\nu + Q_{[\alpha\beta](\mu} Q^{\alpha\beta}_{\nu)} - \frac{1}{2} Q_\alpha P^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\mathbb{Q} + \nabla_\alpha (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha) \right] = -2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Vamos agora explorar o conteúdo de simetria da teoria, discutindo algumas restrições que podemos utilizar para simplificar essa formulação (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018). Devido à condição teleparalela, a variedade apresenta uma geometria plana, portanto a conexão tem um aspecto puramente inercial, isso indica que podemos realizar uma transformação de *gauge* do grupo linear $GL(4, \mathbb{R})$ parametrizada por $\Lambda^\alpha{}_\mu$ (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019)

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta \partial_{[\mu} \Lambda^\beta{}_{\nu]}. \quad (3.66)$$

Neste caso, a conexão tem um aspecto mais simples, tal que a matriz de transformação satisfaz $(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta \partial_{[\mu} \Lambda^\beta{}_{\nu]} = 0$. Desta forma, podemos parametrizar essa transformação através de $\Lambda^\alpha{}_\mu = \partial_\mu \xi^\alpha$, onde ξ^α é um campo vetorial arbitrário. Portanto, o conjunto de funções que parametrizam a conexão na geometria teleparalela simétrica, descrita pelo elemento geral do $GL(4, \mathbb{R})$, é

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\rho} \partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho. \quad (3.67)$$

Este resultado mostra como a conexão trivial muda sob uma transformação de coordenadas, fazendo com que ela possa ser anulada por um diffeomorfismo (DIALEKTOPOULOS, 2019). A transformação de *gauge* que faz com que a conexão seja anulada é denominada de condição de *gauge* coincidente, pois para que a relação (3.67) seja nula, devemos ter que $\xi^\lambda = x^\lambda$, desde que a origem do espaço tangente, que é parametrizado por ξ^λ , coincide com a origem do espaço-tempo físico. Essa condição de *gauge* é definida por uma transformação linear afim $x^\mu \rightarrow ax^\mu + b$, com constantes a e b . Finalmente, podemos concluir por meio das restrições discutidas acima temos que $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathring{\mathbb{Q}}(r, \xi)$ é de fato uma transformação de *gauge* geral.

A ação (3.64) pode ser escrita equivalentemente em termos do tensor disformação

$$S_{\text{Coinc}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(L^\alpha{}_{\beta\mu} L^\beta{}_{\nu\alpha} - L^\alpha{}_{\beta\alpha} L^\beta{}_{\mu\nu} \right). \quad (3.68)$$

Observe, contudo, que devido à trivialidade da conexão e o *gauge* coincidente, obtemos a seguinte relação

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = -L^\alpha{}_{\mu\nu}. \quad (3.69)$$

Desta forma, a ação (3.64), pode ser escrita em termos do símbolo de Christoffel (3.69), o que nos fornece

$$S_{\text{Coinc}} = S_{\text{Q}}[\Gamma = 0] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \right). \quad (3.70)$$

A equação (3.70) é chamada de ação coincidente da teoria de Einstein (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019), que reproduz a equação da relatividade geral sem os termos de contorno de Gibbons-Hawking e York.

Assim como na teoria teleparalela, a teoria simétrica também apresenta uma simetria adicional. Para o caso do *gauge* coincidente, a simetria adicional aparece como uma simetria de difeomorfismo. Diferentemente da teoria teleparalela, em que a métrica e a conexão são relacionadas, na teoria simétrica a conexão é fundamentalmente inercial e a dinâmica do sistema é determinada exclusivamente pela métrica, por um espaço-tempo físico trivial, equação (3.70). Podemos destacar que os campos ξ^λ em (3.67), que parametrizam a conexão, interpretam o papel dos campos de Stückelberg.¹

¹ Os campos de Stückelberg são uma composição de campos introduzidos para compensar qualquer invariância do *gauge*.

4 BOUNCING COSMOLÓGICO NA TEORIA $f(Q)$

Discutiremos neste capítulo que apesar do modelo cosmológico de concordância descrever boa parte da evolução do Universo e tendo sua teoria estabelecida pelas observações experimentais, este modelo apresenta alguns problemas que motivaram a construção de teorias complementares, como o cenário inflacionário. Embora a proposta inflacionária tenha resolvido alguns problemas cosmológicos, trazendo novas perspectivas, ela não aborda o problema da singularidade do *big bang*. Portanto, neste contexto, algumas propostas foram sugeridas para esclarecer os detalhes do início do Universo, como, por exemplo, considerar efeitos quânticos a fim de regularizar este regime. Então, é nesta circunstância que discutiremos uma proposta para obter soluções do tipo *bouncing* a partir da teoria $f(Q)$, que são apreciadas porque evitam a singularidade do *big bang*.

4.1 Motivações à proposta *bouncing*

A fim de contextualizar a motivação física para a proposta de *bouncing*, faremos uma breve discussão sobre os problemas que levaram à uma extensão do modelo cosmológico padrão, conhecida como teoria inflacionária. Este paradigma descreve muito bem o cenário inicial do Universo além de resolver alguns dos problemas inexplicados pelo modelo cosmológico. Contudo, esta formulação não se preocupa em resolver a singularidade, além de apresentar alguns problemas. Estes pretextos motivaram uma nova abordagem para descrever a evolução cosmológica, conhecida como *big bouncing* (BOJOWALD, 2007). Neste modelo a singularidade não é alcançada, pois o salto cosmológico¹ ocorre quando o Universo atinge um raio mínimo durante uma fase de contração.

Na seção (2.3) deste trabalho discutimos o modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que também é conhecido como Modelo Cosmológico Padrão (MCP). Atualmente, é a teoria que melhor descreve a evolução do Universo e está em boa concordância com os dados observacionais. Na construção do MCP é feito uso do princípio cosmológico. Este princípio considera que o Universo

¹ A teoria do *big bouncing* explica que o Universo passa por longos períodos de expansão e contração, e durante um processo de implosão os efeitos quânticos predominantes provocam uma expansão, i.e. um grande salto cosmológico.

é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, ou seja, as propriedades do Universo não dependem dos observadores que acompanham a expansão cosmológica (GRØN; HERVIK, 2007).

Nesse contexto o Universo parte da singularidade inicial do *big bang*, seguindo por um processo inflacionário, decorrente de uma expansão acelerada, onde o campo responsável pela inflação (ínflaton) decai em partículas do modelo padrão, iniciando a fase conhecida como era da radiação (BAUMANN, 2009; KINNEY, 2003; KINNEY, 2009). Estima-se que este processo durou até os primeiros elementos leves serem formados (BAUMANN, 2009; KINNEY, 2003; KINNEY, 2009). E, conforme o Universo foi se expandindo e conseqüentemente se resfriando, a densidade de radiação foi diminuindo a tal ponto que a dinâmica do Universo passou a ser descrita pela matéria. Atualmente o Universo encontra-se em expansão acelerada, supostamente governada pela constante cosmológica (GRØN; HERVIK, 2007).

Contudo, para compreender melhor os períodos evolutivos (ou ainda épocas) do Universo o MCP pode ser estudado de forma sequencial: o cenário inflacionário, *Hot Big Bang*² (HBB) e o modelo Λ CDM (GRØN; HERVIK, 2007). Esta abordagem é bastante adequada para analisar as fases evolutivas do Universo sem perdas de coerência, uma vez que cada um destes períodos evolutivos têm suas próprias fontes de energia (GRØN; HERVIK, 2007).

A descrição da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (RCFM)³ é uma das evidências que corroboram o fato de HBB ser um modelo bem sucedido para retratar a

² Modelo cosmológico descrito pelas equações de Friedmann (2.62) e (2.63) que explicam praticamente todo o período evolutivo do Universo, tendo na RCFM e a expansão do Universo as principais evidências que lhe consolidam (COLES; LUCCHIN, 2003; GRØN; HERVIK, 2007).

³ Radiação eletromagnética que chega à terra em todas as direções, pois, esta radiação está presente em todo o Universo, tendo sua origem durante o processo de recombinação. A RCFM foi prevista por Gamow, Alpher e Herman (GAMOW, 1948), em 1948, sendo descoberta por Arno Penzias e Robert Wilson (PENZIAS; WILSON, 1965). Sua formação pode ser estimada durante o Universo primordial, que apresentava condições extremas de densidade e temperatura. Conforme o Universo foi se expandindo, o seu plasma inicial composto por matéria e fótons possibilitou a formação dos primeiros átomos leves. Isto significa que a radiação passou a interagir cada vez menos com a matéria (com elétrons por exemplo) até um certo ponto em que esta interação passou a ser insignificante. Ou seja, a radiação passou a percorrer livremente todo o Universo, este processo é conhecido como desacoplamento da radiação com a matéria. Portanto a RCFM é uma evidência da superfície de espalhamento desta radiação com a matéria e que atualmente são verificadas a partir de observações experimentais (WRIGHT, 2004).

evolução do Universo (DODELSON, 2003). A fim de elucidar o caráter da singularidade de *big bang* vamos considerar a condição de que a densidade de energia ρ depende do fator de escala conforme a equação (2.67),

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (4.1)$$

onde

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}(1+w)}, \quad (4.2)$$

note que $a(t) \rightarrow 0$ conforme regredimos no tempo, ou seja, quando $t \rightarrow 0$ observamos que $\rho \rightarrow \infty$. Logo, teremos uma singularidade inicial do Universo (*big bang*) acarretando em valores infinitos para a densidade e temperatura. Estas peculiaridades levam a uma quebra da predibilidade da relatividade geral neste regime (WEINBERG, 1972).

Apesar do modelo cosmológico descrever grande parte da evolução do Universo e está em concordância com observações experimentais, uma descrição do estado inicial do Universo ainda permanece sem respostas satisfatórias (KOLB; TURNER, 1990).

Com o propósito de elucidar os principais problemas que motivaram o desenvolvimento de teorias alternativas para sanar os problemas relacionados do modelo cosmológico padrão, iremos discutir brevemente o problema do horizonte e posteriormente a teoria inflacionária. (SHANKS et al., 2012).

4.1.1 O problema do Horizonte

As observações atuais nos mostram que são apenas pequenos desvios na temperatura da RCFM, da ordem de 10^{-5} , que diferenciam regiões do Universo observável que estão extremamente afastadas, i.e. apresentam uma anisotropia (WRIGHT, 2004). O modelo cosmológico não é capaz de explicar essa homogeneidade na radiação em largas escalas, pois, uma vez havendo um horizonte cosmológico, não se esperava uma grande semelhança entre as regiões que estavam causalmente desconexas no passado (WRIGHT, 2004). De fato, esperava-se que tais regiões mostrassem indicações de temperaturas diferentes, contudo, as observações da RCFM nos mostram uma homogeneidade da temperatura (BAUMANN, 2009). Este é conhecido como problema do horizonte, ou ainda problema da homogeneidade.

A descoberta feita por Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929) foi determinante para explicar a expansão do Universo. Tais evidências levaram George Gamow (GAMOW, 1948), com seus alunos a Ralph Alpher e Robert Herman (ALPHER; HERMAN, 1948), à proposta da radiação cósmica de fundo em microondas (RCFM). Esta radiação foi observada experimentalmente por Arnold A. Penzias e Robert W. Wilson em 1965 (PENZIAS; WILSON, 1965). Portanto, a análise da RCFM confirmou a hipótese de que em grandes escalas o Universo é homogêneo e isotrópico, isto está de acordo com o princípio cosmológico.

Inicialmente o Universo era composto de uma estrutura extremamente densa e quente, portanto, a temperatura neste período era tão extrema a tal ponto de que os elétrons e prótons não conseguiam se ligar para formar os primeiros átomos, como o hidrogênio e o hélio (KOLB; TURNER, 1990). Neste ambiente, as flutuações iniciais da densidade primordial provocaram pequenas diferenças na temperatura deste conteúdo em diferentes regiões.

Então, quando o Universo tinha aproximadamente 380.000 anos e temperatura por volta de 3000 K ele já havia se expandido e resfriado o suficiente para formar os primeiros átomos leves (KINNEY, 2003). Tais condições fizeram com que a radiação se separasse da interação com a matéria, conseqüentemente os fótons começaram a se propagar livremente pelo espaço (KINNEY, 2003). Este processo é conhecido como recombinação (COLES; LUCCHIN, 2003). Portanto, as observações atuais da RCFM apresentam as evidências da última superfície de espalhamento (WRIGHT, 2004).

4.1.2 Teoria inflacionária

Discutimos nas seções anteriores como o MCP não consegue explicar de maneira satisfatória toda a evolução cosmológica, apresentando significativa limitação para descrever a formação inicial do Universo. Foi neste contexto que Alan Guth formulou a teoria inflacionária em 1981 (GUTH, 1981), com a proposta de resolver os problemas relacionados com as condições iniciais do Universo. A teoria proposta por Guth é chamada de *inflação velha*, pois atualmente existe uma gama de modelos inflacionários (KINNEY, 2009; BAUMANN, 2009; SENATORE, 2016).

A abordagem inflacionária também descreve a dinâmica das perturbações cosmológicas quando o Universo ainda era jovem, permitindo assim explicar a formação

das estruturas em grandes escalas (BAUMANN, 2009; KINNEY, 2009). Realmente, esta proposta não se limitou em resolver apenas os problemas do *big bang*, mas também propôs uma explicação para a origem das estruturas observadas atualmente, bem como também previu a anisotropia da temperatura da RCFM (BAUMANN, 2009; KINNEY, 2009; SENATORE, 2016).

O cenário inflacionário estima que o Universo inicialmente se expandiu de forma exponencialmente acelerada após o *big bang* e antes da nucleossíntese (KOLB; TURNER, 1990). Esta proposta tem como principal ingrediente o campo escalar que permeava o Universo, chamado de *ínflaton*, atuando como a fonte que impulsiona este processo (BORDE; GUTH; VILENKIN, 2003). Modelos atuais da inflação estimam que este episódio durou uma pequena fração de segundos, ocorrendo em 10^{-34} s após o *big bang* (BAUMANN, 2009), e durante este intervalo o Universo aumentou o fator de escala por uma ordem de 10^{50} do seu tamanho original (BOTHUN, 1998).

A proposta de Guth para descrever a dinâmica do Universo primordial considera que o *ínflaton* domina a densidade de energia do Universo (CARROLL, 2004; BAUMANN, 2009; SENATORE, 2016). O *ínflaton* é caracterizado por um campo escalar que é minimamente acoplado à gravitação, de tal forma que

$$\mathcal{S}(\phi) = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + V(\phi) \right], \quad (4.3)$$

onde ϕ é campo escalar real e homogêneo do *ínflaton* minimamente acoplado à gravidade e $V(\phi)$ é a energia potencial associada ao campo ϕ , sendo que a forma do potencial $V(\phi)$ dependerá da teoria inflacionária assumida (GUTH, 1981).

O problema do horizonte, apresentado na seção (4.1.1), foi solucionado com a teoria da inflação (GUTH, 1981; ALBRECHT; STEINHARDT, 1982). A solução consiste na seguinte interpretação: a expansão exponencial causada pela inflação deformou o espaço-tempo, alongando as pequenas regiões do espaço a tamanhos exorbitantes em comparação com seus tamanhos originais (GUTH, 1981). Desta forma as inhomogeneidades, curvatura e anisotropia foram suavizadas, ficando naturalmente pequenas. Logo, o processo inflacionário apresenta uma explicação para ao fato de que as regiões separadas do Universo atual têm as mesmas propriedades: elas estavam conectadas causalmente no período anterior à inflação (KINNEY, 2003; KINNEY, 2009; BAUMANN, 2009).

4.1.3 Proposta alternativa aos modelos inflacionários

Contudo, mesmo com o êxito em descrever os problemas cosmológicos mencionados anteriormente, foi verificado que o processo inflacionário possui alguns problemas conforme os estudos se intensificavam sobre este tema (IJJAS; STEINHARDT; LOEB, 2013). Por exemplo, a maioria dos modelos inflacionários estão sujeitos à inflação eterna, criando espectros de universos-bolha com propriedades físicas completamente diferentes (STEINHARDT, 1983).

Sabemos que o MCP assume que os componentes do Universo têm origem a partir de uma singularidade do espaço-tempo do *big bang*. Mesmo que a inflação descreva apenas uma pequena fração de segundos do tempo do Universo após o *big bang* ela não muda a existência da singularidade (BORDE; GUTH; VILENKIN, 2003).

Algumas soluções alternativas ao MCP foram desenvolvidas para tentar descrever os estágios iniciais do Universo. Alguns desses modelos almejam descrever os problemas cosmológicos modernos. Neste contexto, uma das propostas mais interessantes diz que o Universo passou por um período de expansão seguido por uma fase de contração acelerada até atingir um raio mínimo. Este processo de transição de um regime de contração para o atual cenário de expansão acelerada do Universo é conhecido como "*big bounce*" (BOJOWALD, 2007; NOVELLO; BERGLIAFFA, 2008; BATTEFELD; PETER, 2015).

Então, os principais problemas cosmológicos no contexto *bouncing* são resolvidos durante a fase de contração por meio de um mecanismo de suavização, desde que as regiões do Universo atual estivessem em conexão causal durante este processo (BRANDENBERGER, 2010; BATTEFELD; PETER, 2015). Além disso, este formalismo traz uma nova abordagem para modelar o Universo inicial fornecendo uma nova perspectiva em evitar os problemas do MCP sem a necessidade de considerar um processo inflacionário (BOJOWALD, 2007).

Modelos de *big bounce* têm recebido uma grande atenção nas últimas décadas em diferentes contextos. Esses modelos têm o fenômeno de *bouncing* oriundos de modificações quânticas (NOVELLO; BERGLIAFFA, 2008). A gravidade quântica tem como principais objetivos revelar a natureza da singularidade no início do Universo, descrever a origem da matéria, campos gravitacionais e a natureza do espaço-tempo. Em teorias de *Loop Quantum Cosmology* (LQC), soluções do tipo *bouncing* aparecem

naturalmente, podendo descrever toda uma dinâmica cosmológica a partir do *bouncing* (BOJOWALD, 2007). Os estudos sobre LQC mostram que saltos cosmológicos são alcançados após a curvatura do espaço-tempo atingir a escala de Planck (ASHTEKAR; SINGH, 2011).

4.2 Uma breve discussão sobre *Loop Quantum Cosmology*

Algumas propostas alternativas à relatividade geral foram sugeridas para evitar o regime da singularidade do *big bang*, onde as condições de densidade de matéria e temperatura, assim como a curvatura, são levadas a valores exorbitantes. Neste contexto, as equações da relatividade geral perdem toda a sua validade. É nesse âmbito que são sugeridas modificações na estrutura da teoria da relatividade geral com a intenção de desenvolver uma teoria mais completa. Em uma das principais correntes de pensamento, espera-se que no regime de alta curvatura efeitos quânticos sejam uma proposta promissora para resolver os problemas cosmológicos.

O *Loop Quantum Cosmology* (LQC) é uma proposta para a cosmologia quântica. Pois por assim dizer, o LQC é uma extensão direta dos efeitos quânticos descritos pelo *Loop Quantum Gravity* (LQG) que são aplicados em espaços-tempos cosmológicos. O LQG foi desenvolvida inicialmente por Ashtekar em 1986 (ASHTEKAR, 1986), almejando descrever uma quantização completa da teoria da gravitação de Einstein. Atualmente esta teoria encontra-se bem consolidada devido ao intenso desenvolvimento que lhe sucederam. Posteriormente, Carlo Rovelli e Ashtekar mostraram que o espaço-tempo é descrito por linhas de loops do campo gravitacional, onde o espaço passa a ser composto agora por pequenas estruturas conhecidas como *quanta* de gravidade ou *quantum* de espaço-tempo (ROVELLI; VIDOTTO, 2014).

No contexto cosmológico do LQC o *big bang* é substituídos pelo *bounce* (BOJOWALD, 2007). No LQC os observáveis físicos não são infinitos quando analisamos o Universo próximo a uma provável singularidade, pelo contrário após o Universo atingir um raio mínimo um salto quântico ocorre. Mostraremos brevemente que a dinâmica evolutiva no contexto do LQC é mediada pela relação da densidade de energia ρ com ρ_c ⁴. Portanto, as técnicas de quantização realizadas no LQC permitem soluções

⁴ Descreve a densidade de matéria máxima a ser alcançada. Quando a densidade de matéria alcança a densidade crítica, dentro do regime Planckiano, o salto cosmológico ocorre (CRAIG, 2013).

não-singulares quando são aplicadas à cosmologia (ASHTEKAR; PAWLOWSKI; SINGH, 2006). Podemos ter uma breve perspectiva deste cenário analisando a equação de Friedmann descrita pelo LQC que fica reduzida à: (ASHTEKAR; BIANCHI, 2021)

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2\pi G}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad (4.4)$$

onde $\rho_c = \sqrt{3}/(32\pi^2\gamma^3 G l_{pl}^2)$ conhecida como densidade crítica, sendo que γ é definido como o parâmetro de Barbero–Immirzi e l_{pl} é o comprimento de Planck (GAMBINI; PULLIN, 2011).

Observe que esta expressão difere da teoria da RG por um termo quadrático da densidade de energia ρ^2/ρ_c , i.e. um termo de correção quântica (ASHTEKAR; BIANCHI, 2021), o que implica em consequências determinantes na evolução inicial do Universo. Contudo, agora \dot{a} pode assumir valor igual a zero, diferentemente da relatividade geral onde temos apenas que \dot{a} pode assumir somente valores positivos ou negativos, isso quer dizer que o Universo se expande ou se contrai, *big bang* e *big crunch*, respectivamente. O fato da teoria LQC permitir $\dot{a} = 0$, obtemos como consequência o *bouncing* cosmológico (ASHTEKAR; SINGH, 2011), isto ocorre quando a correção quântica aproxima-se do valor de $\rho = \rho_c$ (ASHTEKAR; BIANCHI, 2021). Este evento só é possível devido ao sinal negativo na correção quântica e que durante o regime de Planck⁵ desencadeia uma *força repulsiva efetiva* (ASHTEKAR; BIANCHI, 2021).

Portanto, apresentaremos a seguir um estudo sobre a possibilidade da teoria $f(Q)$ gerar soluções cosmológicas do tipo *bouncing*. Ademais, consideramos o formalismo Arnowitt - Deser - Misner (ADM) na ação da Teoria Teleparalela Simétrica modificada com o intuito em desenvolver uma Cosmologia Quântica de gravidade em $f(Q)$. Desenvolvendo o formalismo hamiltoniano para a teoria $f(Q)$ conseguimos determinar a função de onda do universo por meio da equação de Wheeler-DeWitt (ROVELLI, 2015).

4.3 Teoria $f(Q)$ e as equações de movimento

A teoria de gravidade $f(Q)$ é uma extensão não-linear da Teoria Teleparalela Simétrica (3.64), equivalente à relatividade geral. Ela é construída em analogia à teoria

⁵ Estado com alto grau energético, onde a relatividade geral não é mais adequada.

$f(R)$, só que em termos do escalar de não-metricidade, garantindo assim maior liberdade para aplicações fenomenológicas desta teoria (LAZKOZ et al., 2019).

Agora, podemos usar o escalar de não-metricidade (3.63), para a proposta de uma ação não-linear

$$S_Q = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\frac{1}{2} f(\overset{\circ}{Q}) + \mathcal{L}_m \right]. \quad (4.5)$$

Uma condição sobre essa ação é que no caso em que $f(\overset{\circ}{Q}) = \overset{\circ}{Q}/8\pi G$, esta ação deve recuperar os resultados da relatividade geral. Desta forma, ela possui um vínculo bastante forte sobre a sua forma funcional. A partir deste ponto, omitiremos o símbolo (\circ) no escalar de não-metricidade, apenas para não sobrecarregar a notação.

A partir da variação da ação com respeito à métrica obtemos as seguintes equações de campo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} f_{QQ}(\mathbb{Q}) \nabla_\alpha Q \left(Q_{(\mu \nu)}^\alpha - \frac{1}{2} Q^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2} Q^\alpha g_{\mu\nu} - \delta_{(\mu}^\alpha \tilde{Q}_{\nu)} \right) + \\ & + f_Q(\mathbb{Q}) \left[\left(\nabla_\alpha - \frac{1}{2} Q_\alpha \right) L^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu Q_\nu - L^\alpha_{\beta\mu\nu} L^\beta_{\alpha\nu} \right] + \\ & - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[f(\mathbb{Q}) + f_Q(\mathbb{Q}) \nabla_\alpha (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha) \right] = \kappa T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde usamos a seguinte notação $f_Q \equiv \frac{\delta f(\mathbb{Q})}{\delta \mathbb{Q}}$.

Por sua vez, as equações de campo também podem ser obtidas através do formalismo de Palatini (JIMÉNEZ et al., 2020), tal que

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha \left(\sqrt{-g} f_Q(\mathbb{Q}) P^\alpha_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\mathbb{Q}) + f_Q(\mathbb{Q}) \left(P_{\mu\alpha\nu} Q^\alpha{}^\beta - 2 Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_\nu \right) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Neste caso, o tensor que faz o papel da conexão no formalismo de primeira ordem é o tensor conjugado $P^\alpha_{\mu\nu}$ (3.61).

A fim de expressar as equações de movimento para a cosmologia de $f(\overset{\circ}{Q})$, vamos considerar seguinte métrica de FLRW

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) dx_i dx^i, \quad (4.8)$$

onde $N(t)$ é a função de lapso que mede a variação do tempo próprio em relação ao tempo t e $a(t)$ é o fator de escala. Ao usarmos os elementos da métrica (4.8) na definição

do escalar de não-metricidade (3.63), podemos escrever a ação (4.5) da seguinte forma

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathbb{Q}) = -\frac{1}{16\pi G} \int d^3x dt N a^3 f\left(\frac{6\dot{a}^2}{a^2 N^2}\right) \quad (4.9)$$

que contém uma invariância de reparametrização no tempo $t \rightarrow \zeta(t)$, $N(t) \rightarrow N(t)/\dot{\zeta}(t)$ para uma função arbitrária de $\zeta(t)$.

Para a escolha $N = 1$ ⁶, as equações de campo de um universo descrito por uma densidade ρ e pressão p são dadas por (JIMÉNEZ et al., 2020)

$$6f_{\mathbb{Q}}H^2 - \frac{1}{2}f(\mathbb{Q}) = 8\pi G\rho, \quad (4.10)$$

e

$$(12f_{\mathbb{Q}\mathbb{Q}}H^2 + f_{\mathbb{Q}})\dot{H} = 4\pi G(\rho + p). \quad (4.11)$$

Essas equações de campo, permitem uma descrição completa de fenômenos cosmológicos no contexto da teoria $f(\mathbb{Q})$.

4.4 *Bouncing* Cosmológico a partir do método de redução de ordem

Como discutimos anteriormente, soluções do tipo *bouncing* são apreciadas porque evitam uma singularidade inicial do *big bang*. Neste modelo, o Universo é representado de forma cíclica onde uma expansão é seguida por uma contração.

Portanto, para dar início ao desenvolvimento deste tópico vamos adotar o elemento de linha (FLRW) espacialmente plano com a função de lapso $N(t)$ e fator de escala $a(t)$ (4.8) para encontrar soluções cosmológicas de *bouncing* para a teoria $f(\mathbb{Q})$. Porém, como em qualquer teoria modificada, soluções das equações de campo são analiticamente desafiadoras. Então, recorreremos ao método da redução de ordem das equações de campo (SIMON, 1992) onde as quantidades geométricas são escritas em uma expansão perturbativa. Neste caso, consideraremos o termo de ordem mais baixa, que é responsável por gerar soluções perturbativamente próximas à relatividade geral.

⁶ Esta escolha mantém a consistência do princípio cosmológico, evitando assim que o observador não presencie a aceleração nem a dilatação do tempo, e também que a expansão do Universo a uma taxa constante.

Podemos parametrizar a função $f(Q)$ utilizando o método de redução

$$f(Q) = \kappa Q + \epsilon \phi(Q). \quad (4.12)$$

Atente que consideramos a condição $\epsilon \phi(Q) \ll \kappa Q$, ou seja, recuperamos a Teoria Teleparalela Simétrica ao tomarmos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, este parâmetro controla o quanto a nossa função difere das equações de Einstein (BAJARDI; VERNIERI; CAPOZZIELLO, 2020).

Agora vamos substituir a equação (4.12) na equação de Friedmann (4.10)

$$3\kappa \mathcal{H}^2 + 6\epsilon \phi_Q(Q) \mathcal{H}^2 - \frac{1}{2}\epsilon \phi(Q) = \rho. \quad (4.13)$$

Observe que para ordens mais baixas, em que $\epsilon \rightarrow 0$, nós recuperamos a Teoria Teleparalela Simétrica pois, a expressão (4.13) nos dá a equação de Friedmann da Teoria Teleparalela Simétrica em termos de Q (BAJARDI; VERNIERI; CAPOZZIELLO, 2020)

$$\rho = \frac{\kappa}{2} Q. \quad (4.14)$$

Essa expressão nada mais é que a solução em ordem zero de (4.12). A expressão (4.14) na Teoria Teleparalela Simétrica é a própria equação de Friedmann escrita em termos do escalar de não-metricidade.

Podemos reescrever a equação (4.13) da seguinte forma

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\rho}{3\kappa} + \frac{\epsilon}{3\kappa} \left[-6\phi_Q(Q) \mathcal{H}^2 + \frac{1}{2}\phi(Q) \right]. \quad (4.15)$$

Haja visto que cenários *bouncing* são uma consequência direta do LQC, vamos comparar a expressão (4.15) com a equação de Friedmann da teoria LQC equação (4.4) a fim de introduzir seus efeitos na teoria $f(Q)$. Desta forma, lembremos da equação de Friedmann na teoria LQC (4.4) que apresenta a seguinte forma:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\rho}{3\kappa} \left[1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right]. \quad (4.16)$$

Comparando as expressões (4.15) e (4.16), e também usando o valor para a densidade (4.14), encontramos

$$-\phi_Q(Q)Q + \frac{1}{2}\phi(Q) + \frac{1}{4}\frac{(\kappa Q)^2}{\epsilon\rho_c} = 0, \quad (4.17)$$

cuja a solução para $\phi(Q)$ é

$$\phi(Q) = \frac{1}{6}\frac{(\kappa Q)^2}{\epsilon\rho_c} + c_1\sqrt{Q}, \quad (4.18)$$

sendo c_1 uma constante de integração.

Substituindo a expressão (4.18) em (4.12) encontramos a função

$$f(Q) = \kappa Q + \frac{1}{6}\frac{(\kappa Q)^2}{\rho_c} + \tilde{c}_1\sqrt{Q}, \quad (4.19)$$

em que definimos $\tilde{c}_1 \equiv \epsilon c_1$. Portanto, esta é a função que pode descrever soluções em uma cosmologia *bouncing* na Teoria Teleparalela Simétrica associada à cosmologia quântica em loop. Munidos da solução (4.19) procederemos agora à análise do fator de escala e também da função de onda do Universo no formalismo hamiltoniano.

4.5 Cosmologia quântica na teoria $f(Q)$ e função de onda para o Universo

Procederemos agora para a análise do fator de escala. A partir da (4.9) temos que $\mathcal{S} = -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g}f(Q)d^4x$. Ademais, dentre as diferentes configurações do sistema, estamos interessados naquelas que satisfazem a métrica FLRW, i.e. o elemento de linha (4.8). Neste caso, encontramos

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2\kappa} \int \left\{ a^3 N f(Q) - \lambda \left[Q - \frac{6}{N^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \right\} dt. \quad (4.20)$$

Observe que fizemos uso do multiplicador de Lagrange a fim de impor a configuração desejada do sistema. Além disso, devemos notar que não estamos mais trabalhando com uma densidade Lagrangeana, mas sim com uma Lagrangeana, pois todas as quantidades dependem somente do tempo. Vemos também que a variação com respeito ao escalar de não-metricidade nos fornece o seguinte valor para o multiplicador de Lagrange: $\lambda = a^3 N f_Q$.

A partir de (4.20), podemos identificar a seguinte Lagrangeana

$$L = -\frac{1}{2}a^3N(f(Q) - Qf_Q) - 3\frac{a\dot{a}^2}{N}f_Q. \quad (4.21)$$

É importante mencionar que esta expressão, além de permitir determinar o fator de escala a partir das equações de movimento, ela é ponto chave para a discussão da equação de Wheeler-DeWitt na próxima seção (4.6).

No que segue, devemos notar que estamos considerando um espaço de variáveis tridimensional que depende apenas das seguintes variáveis $S = \{a, N, Q\}$. Portanto, o espaço de configuração tem dimensão menor do que o esperado, pois ele depende apenas de quatro variáveis: $\mathcal{TS} = \{a, N, Q, \dot{a}\}$ pois o Lagrangeano é independente de \dot{Q} e \dot{N} (BAJARDI; VERNIERI; CAPOZZIELLO, 2020).

O sistema de equações diferenciais desenvolvidas a partir da equação de Euler-Lagrange são

$$a \rightarrow -a^2N^3(f(Q) - Qf_Q) + 2N\dot{a}^2f_Q + 4Na\ddot{a}f_Q - 4a\dot{a}f_Q\dot{N} + 4Na\dot{a}\dot{Q}f_{QQ} = 0, \quad (4.22)$$

$$N \rightarrow 6\frac{a\dot{a}^2}{N}f_Q - a^3N(f(Q) - Qf_Q) = 0, \quad (4.23)$$

$$Q \rightarrow Q = 6\frac{1}{N^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (4.24)$$

Perceba, que a expressão (4.24) é a equação obtida na Teoria Teleparalela Simétrica a qual é expressa em termos do escalar de não-metricidade.

Considerando que a função de lapso seja $N = 1$, simplificamos as equações acima, sem modificar seu conteúdo. Desta forma

$$a \rightarrow -a^2(f(Q) - Qf_Q) + 2\dot{a}^2f_Q + 4a\ddot{a}f_Q + 4a\dot{a}\dot{Q}f_{QQ} = 0, \quad (4.25)$$

$$N \rightarrow 6a\dot{a}^2f_Q - a^3(f(Q) - Qf_Q) = 0, \quad (4.26)$$

$$Q \rightarrow Q = 6\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (4.27)$$

Substituindo o escalar (4.27) na expressão (4.26) obtemos a primeira equação de campo da teoria

$$\boxed{6\mathcal{H}^2f_Q - \frac{1}{2}f(Q) = 0.} \quad (4.28)$$

Agora, derivando a equação (4.26) em relação ao tempo, obtemos

$$12\dot{a}\ddot{a}f_{\mathbb{Q}} - 12\frac{\dot{a}^3}{a}f_{\mathbb{Q}} + 12\dot{a}^2\dot{\mathbb{Q}}f_{\mathbb{Q}\mathbb{Q}} = 0,$$

Por fim, substituindo $\dot{\mathbb{Q}} = 12\left(\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3}\right)$, na expressão acima, encontramos a segunda equação de campo

$$\boxed{12\mathcal{H}^2 f_{\mathbb{Q}\mathbb{Q}} + f_{\mathbb{Q}} = 0}. \quad (4.29)$$

Portanto, o conjunto de equações de campo que descrevem a teoria $f(\mathbb{Q})$ é

$$6\mathcal{H}^2 f_{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2}f(\mathbb{Q}) = 0, \quad (4.30)$$

$$12\mathcal{H}^2 f_{\mathbb{Q}\mathbb{Q}} + f_{\mathbb{Q}} = 0, \quad (4.31)$$

que são as equações de campo da teoria no vácuo. Portanto, usando a forma funcional (4.19), que corresponde a uma teoria $f(\mathbb{Q})$ sujeita a efeitos da LQC, no conjunto de equações (4.30) e (4.31), encontramos uma solução exponencial para $a(t)$ com o seguinte comportamento:

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{\rho_c}{\kappa}}t}, \quad (4.32)$$

$$\mathbb{Q}(t) = -2\frac{\rho_c}{\kappa}. \quad (4.33)$$

Observamos na solução (4.32) para $a(t)$ que, para o caso em que $\rho_c/3\kappa > 0$, tem um comportamento oscilatório. De fato, isto mostra que a teoria $f(\mathbb{Q})$, sob as devidas condições, possui as soluções cosmológicas do tipo *bouncing*.

4.6 Formalismo Hamiltoniano

Após verificar explicitamente o comportamento *bouncing* de $f(\mathbb{Q})$ a partir da expressão para o fator de escala $a(t)$ (4.32), procedemos agora para a análise da equação de Wheeler-DeWitt para a teoria $f(\mathbb{Q})$. Para isso, devemos passar da descrição Lagrangeana para a Hamiltoniana. Desta forma, devemos calcular os momentos canonicamente conjugados às variáveis (a, N, \mathbb{Q}) . Contudo, notamos que o único momento conjugado será definido por

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{\kappa^2 a \dot{a}}{\rho_c N} \left[6\frac{\rho_c}{\kappa} + 2\mathbb{Q} + 3\tilde{c}_1 \frac{\rho_c}{\kappa^2 \sqrt{\mathbb{Q}}} \right]. \quad (4.34)$$

Desta forma, podemos inverter a relação, e expressar a velocidade em termos do momento

$$\dot{a} = -\frac{N\rho_c}{a\kappa^2\zeta}\pi_a, \quad (4.35)$$

onde definimos $\zeta = 6\frac{\rho_c}{\kappa} + 2Q + 3\tilde{c}_1\frac{\rho_c}{\kappa^2\sqrt{Q}}$.

Pela definição a Hamiltoniana é dada por meio de uma transformada de Legendre da Lagrangeana

$$H = \sum p_i\dot{q} - L. \quad (4.36)$$

Portanto, ao usarmos a Lagrangeana (4.21) e o momento (4.35), temos que a hamiltoniana para este sistema é escrita como

$$H = -\frac{N\rho_c}{a\kappa^2\zeta}\pi_a^2 + \frac{1}{2}a^3N(f(Q) - Qf_Q) + 3\frac{a\dot{a}^2}{N}f_Q, \quad (4.37)$$

observe que não há momentos relacionados com N e Q . Ademais, substituindo a forma funcional (4.19) para $f(Q)$, encontramos

$$H = -N \left[\frac{1}{12}a^3 \left(\frac{(\kappa Q)^2}{\rho_c} - 3\tilde{c}_1\sqrt{Q} \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_c\sqrt{Q}\pi_a^2}{a(6\kappa\rho_c + \kappa^2\sqrt{Q} + 2Q^{3/2} + 3\tilde{c}_1\rho_c)} \right]. \quad (4.38)$$

Agora que estamos de posse da Hamiltoniana podemos desenvolver a equação de Wheeler-DeWitt⁷. Neste contexto, temos uma interpretação de quantização para a cosmologia a partir de funções de onda que são autovetores do operador hamiltoniano. A equação de Wheeler-DeWitt tem a seguinte forma

$$\hat{\mathcal{H}}(x)|\psi\rangle = 0, \quad (4.39)$$

onde ψ é a função de onda e $\hat{\mathcal{H}}(x)$ é o operador que descreve uma teoria da gravitação quantizada. Em termos do operador (4.38), temos que

$$\frac{a^4}{6} \left(\kappa^2 \frac{Q^2}{\rho_c} - 3\sqrt{Q}\tilde{c}_1 \right) \psi(a, Q) - \left(\frac{\rho_c\sqrt{Q}}{6\kappa\rho_c + \kappa^2\sqrt{Q} + 2Q^{3/2} + 3\tilde{c}_1\rho_c} \right) \frac{\partial^2 \psi(a, Q)}{\partial a^2} = 0, \quad (4.40)$$

com $\psi(a, Q)$ descrevendo a função de onda do Universo, que é um objeto matemático pertencente ao espaço de Hilbert. Ademais, como estamos trabalhando no espaço

⁷ Apresentamos no apêndice (A) uma breve discussão da equação de Wheeler-DeWitt.

de configuração, fizemos uso da identificação do operador momento com a derivada: $\hat{\pi}_a = -i\frac{\partial}{\partial a}$. Com o intuito de simplificarmos a forma funcional da equação diferencial acima definimos

$$\alpha(Q, N) = \frac{6\rho_c \sqrt{Q}}{\left(\kappa^2 \frac{Q^2}{\rho_c} - 3\sqrt{Q}\tilde{c}_1\right)(6\kappa\rho_c + \kappa^2 \sqrt{Q} + 2Q^{3/2} + 3\tilde{c}_1\rho_c)}. \quad (4.41)$$

Desta forma, a equação (4.40) apresenta uma forma mais compacta

$$a^4\psi(a, Q) - \alpha(Q, N)\frac{\partial^2\psi(a, Q)}{\partial a^2} = 0, \quad (4.42)$$

de modo que esta expressão fica reduzida a uma equação de Bessel. De fato, a solução completa de (4.42) consiste na superposição de linear de funções de Bessel de primeiro tipo

$$\psi(\alpha, a) = \frac{\sqrt{a}}{\alpha^{1/12}} \left[C_2 \sqrt{a} J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) + C_3 \sqrt{a} J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right], \quad (4.43)$$

sendo que C_2 e C_3 são coeficientes complexos, enquanto $J_n(x)$ representa a função de Bessel do primeiro tipo e $\Gamma(z)$ é a função gama de Euler.

A fim de termos uma melhor visualização do comportamento da solução (4.43) iremos expressá-la em termos das integrais de Schlafli (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965),

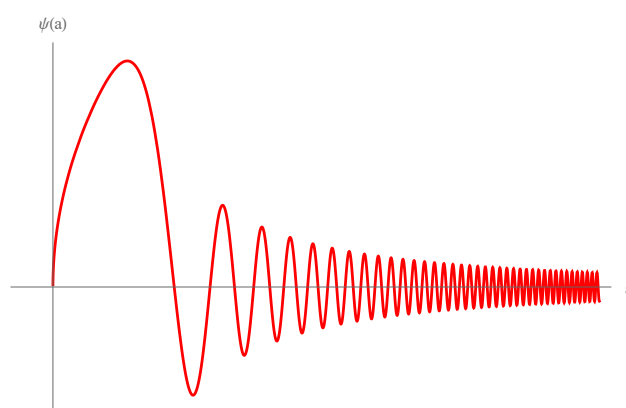
$$\begin{aligned} \psi(\alpha, a) = \frac{\sqrt{a}}{\pi\alpha^{1/12}} & \left\{ C_2 \int_0^\pi \cos\left[-\frac{x}{6} - \left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \operatorname{sen}x\right] dx + \frac{C_2}{2} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \operatorname{sen}x + \frac{1}{6}x} dx + \right. \\ & \left. + C_3 \int_0^\pi \cos\left[\frac{x}{6} - \left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \operatorname{sen}x\right] dx - \frac{C_3}{2} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \operatorname{sen}x - \frac{1}{6}x} dx \right\}. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expressão um pouco mais ao escolhermos $C_2 = C_3 \equiv c$. Esta escolha arbitrária não gera qualquer implicação no comportamento da função de onda, pois o comportamento da função de onda resultante é o mesmo independente dos valores das constantes. Neste caso, ficamos com

$$\psi(\alpha, a) = \frac{c\sqrt{a}}{\pi\alpha^{1/12}} \left\{ \int_0^\pi 2\cos\left[-\frac{x}{6} - \left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \operatorname{sen}x\right] \cos\left(\frac{x}{6}\right) dx + \int_0^\infty e^{-\left(\frac{a^3}{3\sqrt{a}}\right) \operatorname{sen}x} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{6}x\right) dx \right\}. \quad (4.45)$$

Desta forma, podemos construir o gráfico da uma função de onda para o Universo, sem perdas de generalidade, a fim de obter uma caracterização qualitativa da equação (4.44).

Figura 4.1 – Função de onda do Universo.



Fonte: Autor, 2021.

Esta função de onda foi gerada a partir de funções de Bessel do primeiro tipo, onde admitimos como expressão analítica apenas a representação integral. Observe que a frequência de oscilações da função de onda aumenta à medida que aumenta o valor de a . Conforme o gráfico se prolonga os universos clássicos podem ser recuperados ao preservarmos o critério de Hartle, obtendo uma oscilação assintoticamente perfeita (BAJARDI; VERNIERI; CAPOZZIELLO, 2020).

5 CONCLUSÃO

Discutimos nesta dissertação a possibilidade da descrição de efeitos gravitacionais a partir de diferentes geometrias não Riemannianas. As geometrias de Weitzenböck e de Weyl são caracterizadas pelos tensores de torção e de não-metricidade, respectivamente. Além da conhecida descrição na geometria Riemanniana, efeitos gravitacionais podem ser descritos de maneira equivalente em nível linear nessas geometrias. Contudo, quando passamos ao nível não-linear verificamos um comportamento distinto em cada classe de modelo, permitindo assim a descrição de fenômenos gravitacionais bastante interessantes. O pseudotensor conexão tem um papel fundamental na elaboração desses modelos, pois é por meio de sua configuração que podemos estabelecer geometrias além da Riemanniana que descreveram outras teorias gravitacionais.

Teorias que são desenvolvidas a partir do tensor de torção apresentam como motivação a possibilidade de incluir o spin à gravitação (HEHL et al., 1976). Neste trabalho, apresentamos uma discussão sobre a teoria teleparalela equivalente da relatividade geral que é descrita apenas pelo tensor de torção, sendo a geometria Weitzenböck a estrutura matemática desse espaço-tempo. Mostramos que a ação desta teoria difere da ação de Einstein-Hilbert apenas por um termo de fronteira, conseqüentemente esta característica revela que as equações de campo são as mesmas da teoria da relatividade geral, i.e., são teorias completamente equivalentes.

Entretanto, o principal foco deste trabalho foi no desenvolvimento da teoria em que os efeitos gravitacionais são atribuídos ao tensor de não-metricidade. Isto implica que os vetores transportados pela variedade tem seus módulos alterados, sendo desenvolvida a partir da geometria de Weyl (POULIS; SALIM, 2011; WHEELER, 2018). Outra particularidade fascinadamente no uso desse tensor é que, para um determinado caso, podemos ter outra formulação gravitacional equivalente à relatividade geral. Esta é conhecida como Teoria Equivalente Teleparalela Simétrica. Entretanto, assim como a Teoria Teleparalela, a Teoria Teleparalela Simétrica também equivale à teoria da relatividade geral a menos de um termo de derivada total, isto significa que tal teoria também apresenta as mesmas equações de campos da teoria de Einstein.

Para finalizar a discussão destas teorias mostramos que mesmo que elas sejam equivalentes em nível linear, notamos grandes diferenças na suas extensões não-lineares

$f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{T})$ e $f(\mathbb{Q})$. Então, foram mostrados as equações de campo dessas teorias que, quando aplicadas no contexto cosmológico, podem descrever a evolução do Universo.

Contudo, modelos que apresentam funções arbitrárias do escalar de curvatura ou do escalar de torção já foram extensivamente estudados. Apesar do tensor de não-metricidade ser conhecido há bastante tempo, teorias que envolvem este objeto matemático têm ganhado repercussão apenas recentemente (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019). Dentre as diferentes motivações, podemos destacar a recente formulação da extensão $f(\mathbb{Q})$ (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2018), trazendo um novo terreno de exploração e que motivaram a comunidade científica em desenvolver novas abordagens gravitacionais. Outros fatores que tornam a Teoria Teleparalela Simétrica atraente, são que ela é bastante simples quando comparada com as outras formulações, além de ser desenvolvida em um espaço-tempo plano. Também é possível realizar uma escolha adequada de coordenadas na estrutura geométrica desta geometria que faz com que a conexão desapareça, chamada de *gauge* coincidente (JIMÉNEZ et al., 2020).

Após discutirmos as diferentes classes de geometrias equivalentes para a descrição de efeitos gravitacionais, passamos ao capítulo (4), onde apresentamos uma descrição do problema de *bouncing* na teoria $f(\mathbb{Q})$, isto é na geometria de Weyl. Iniciamos o capítulo explorando a problemática em torno do MCP que levou a proposta do cenário inflacionário, o qual explica as primeiras frações de segundo do início do Universo. A teoria inflacionária foi inicialmente sugerida por Guth (GUTH, 1981). Durante a inflação uma extrema pressão negativa desencadeou uma expansão acelerada do Universo. Esse fenômeno consiste em uma resolução elegante dos problemas cosmológicos da planura e do horizonte por exemplo, além de abordar outros aspectos relevantes para a cosmologia como a formação das estruturas. Contudo, logo verificou-se que ela também apresenta algumas limitações, ademais, ela não soluciona o problema da singularidade inicial do Universo.

Ainda neste contexto, um outro ponto de vista sugere que efeitos quânticos sejam responsáveis por esclarecer os fenômenos citados acima. Portanto, para uma compreensão física mais adequada, não apenas para tratar da singularidade mas também com a intenção de construir uma teoria mais completa, não podemos desprezar as características da mecânica quântica. É neste ambiente, que modelos quânticos

gravitacionais foram propostos. O melhor exemplo é a *Loop Quantum Gravity*, que quando aplicada à cosmologia, permite descrever que o Universo apresenta uma fase de contração e também de expansão, que corresponde ao *bouncing*. Isto é alcançado quando a curvatura do espaço-tempo atinge um raio mínimo ou seja, coincide com a escala de Planck. O surpreendente é que neste modelo a singularidade é evitada, uma vez que as grandezas relevantes ficam finitas próximo do *bouncing*.

Para alcançar soluções cosmológicas do tipo *bouncing* a partir de $f(\mathbb{Q})$, mostramos por meio do método de redução de ordem que podemos escrever as quantidades geométricas da Teoria Teleparalela Simétrica em uma expansão perturbativa de ordem mais baixa, para apresentar soluções perturbativas próximas à relatividade geral. Este recurso nos permite encontrar dentre as possíveis formas para a função $f(\mathbb{Q})$ a única que evita a singularidade do *big bang* e conseqüentemente descreve um salto cosmológico. A análise se concentrou nas equações de movimento da teoria $f(\mathbb{Q})$, cuja soluções permitiu determinarmos o fator de escala, que neste caso corresponde a uma solução exponencial que apresenta um comportamento oscilatório. Para finalizar, discutimos brevemente uma solução da equação de Wheeler-DeWitt no contexto Hamiltoniano, o que permitiu determinarmos a função de onda do Universo. Observamos que esta função de onda admite um comportamento assintoticamente periódico, devido temos como solução uma combinação linear de funções de Bessel de primeiro tipo. Apesar da função de onda não ter uma interpretação esclarecedora, ela nos permite inferir um comportamento sobre o Universo primitivo assim como nos permite identificar a passagem do comportamento quântico para o clássico (BAJARDI; VERNIERI; CAPOZZIELLO, 2020).

Portanto, nesta dissertação realizamos uma revisão das teorias equivalentes da relatividade geral, conhecidas como trindade da relatividade (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2019). Dentre elas escolhemos a extensão $f(\mathbb{Q})$ da Teoria Teleparalela Simétrica sendo o tensor de não-metricidade o principal objeto matemático responsável pelos efeitos gravitacionais. Também estudamos e discutimos os efeitos cosmológicos numa nova abordagem que considera efeitos quânticos para modelar a evolução do Universo. Apesar de estarmos distantes de encontrarmos respostas para todos os problemas relacionados ao Universo e ainda não termos a teoria final que unifique todas as forças da natureza, esperamos que o desenvolvimento de estudos sobre a teoria de *big bounce* por meio da teoria $f(\mathbb{Q})$ possa deixar mais transparente os problemas

conceituais e matemáticos envolvendo os aspectos cosmológicos, além de instigar o uso de geometrias não-Riemannianas e motivar os estudos por meio desta teoria.

Como comentário final, cabe mencionar que iremos escrever um artigo de revisão sobre o uso de diferentes geometrias para a descrição de efeitos gravitacionais, bem como de modelos equivalentes.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 116, p. 061102, fev. 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>.

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. New York, United States: Dover Publications, 1965. (Applied mathematics series).

ADAK, M.; KALAY, M.; SERT, Ö. Lagrange Formulation of the Symmetric Teleparallel Gravity. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 15, n. 05, p. 619–634, set. 2006. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271806008474>>.

ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 48, p. 1220–1223, abr. 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220>>.

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Teleparallel Gravity: An Introduction**. Dordrecht, Netherlands: Springer Science & Business Media, 2013. v. 173. 214 p. (Fundamental Theories of Physics, v. 173).

ALPHER, R. A.; HERMAN, R. Evolution of the Universe. **Nature**, v. 162, n. 4124, p. 774–775, 1948.

ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. **General relativity and gravitation**, Springer US, Boston, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, ago. 2008. ISSN 0001-7701. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1>>.

ASHTEKAR, A. New variables for classical and quantum gravity. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 57, p. 2244–2247, nov. 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.2244>>.

ASHTEKAR, A.; BIANCHI, E. A short review of loop quantum gravity. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 84, n. 4, p. 042001, mar. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6633/abed91>>.

ASHTEKAR, A.; PAWLOWSKI, T.; SINGH, P. Quantum nature of the big bang. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 96, p. 141301, abr. 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.141301>>.

ASHTEKAR, A.; SINGH, P. Loop Quantum Cosmology: a status report. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 28, n. 21, p. 213001, set. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/21/213001>>.

BAJARDI, F.; VERNIERI, D.; CAPOZZIELLO, S. Bouncing cosmology in $f(Q)$ symmetric teleparallel gravity. **European Physical Journal Plus**, v. 135, n. 11, p. 912, nov. 2020.

BATTEFELD, D.; PETER, P. A critical review of classical bouncing cosmologies. **Physics Reports**, v. 571, p. 1–66, abr. 2015. ISSN 0370-1573. A critical review of classical bouncing cosmologies. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157314004505>>.

BATTYE, R. A.; CHARNOCK, T.; MOSS, A. Tension between the power spectrum of density perturbations measured on large and small scales. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 91, p. 103508, mai. 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.103508>>.

BAUMANN, D. Tasi lectures on inflation. **arXiv preprint arXiv:0907.5424**, 2009.

BERNARDIS, P. de et al. A Flat Universe from high resolution maps of the Cosmic Microwave Background Radiation. **Nature**, v. 404, p. 955–959, abr. 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/35010035>>.

BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 90, p. 045002, out. 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.045002>>.

BLAGOJEVIC, M. **Gravitation and Gauge Symmetries**. London, United Kingdom: CRC Press, 2001.

BOJOWALD, M. What happened before the Big Bang? **Nature Physics**, v. 3, n. 8, p. 523–525, jul. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nphys654>>.

BORDE, A.; GUTH, A. H.; VILENKIN, A. Inflationary spacetimes are incomplete in past directions. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 90, p. 151301, abr. 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.151301>>.

BOTHUN, G. **Modern Cosmological Observations and Problems**. London, United Kingdom: Taylor & Francis, 1998. ISBN 9780748406456.

BRANDENBERGER, R. H. Introduction to Early Universe Cosmology. **PoS, ICFI2010**, p. 001, 2010.

CAI, Y.-F. et al. $f(T)$ Teleparallel Gravity and Cosmology. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 79, n. 10, p. 106901, set. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0034-4885%2F79%2F10%2F106901>>.

CARROLL, S. **Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity**. [S.l.]: Benjamin Cummings, 2004.

COLES, P.; LUCCHIN, F. **Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure**. New York, United States: John Wiley & Sons, 2003.

CRAIG, D. A. Dynamical eigenfunctions and critical density in loop quantum cosmology. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 30, n. 3, p. 035010, jan. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/3/035010>>.

DIALEKTOPOULOS, K. F. **Geometric Foundations of Gravity and Applications**. Tese (Doutorado) — Università degli Studi di Napoli Federico II, 2019.

D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford, United Kingdom: Clarendon Press, 1992.

DIRAC, P. A. M. The Theory of Gravitation in Hamiltonian Form. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 246, n. 1246, p. 333–343, ago. 1958. Disponível em: <<http://doi.org/10.1098/rspa.1958.0142>>.

DODELSON, S. **Modern Cosmology**. San Diego, United States: Elsevier Science Publishing Co Inc, 2003.

EISBERG, R. M. Fundamentos da Física Moderna, Ed. **Guanabara Dois SA**, 1979.

ELLIS, G. F. R.; MACCALLUM, M. A. H. A Class of Homogeneous Cosmological Models. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 12, n. 2, p. 108 – 141, jun. 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01645908>>.

ENQVIST, K. Lemaitre-Tolman-Bondi Model and Accelerating Expansion. **General Relativity and Gravitation**, v. 40, p. 451–466, dez. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-007-0553-9>>.

EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 875, n. 1, p. L1, abr. 2019. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7>>.

FARAONI, V. **Special Relativity**. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2013.

FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(R)$ theories. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 13, n. 1, p. 3, jun. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2010-3>>.

FELSAGER, B. **Geometry, Particles, and Fields**. New York, NY, United States: Springer-Verlag New York Inc, 1998. (Graduate Texts in Contemporary Physics).

FREEDMAN, W. L. Cosmology at a Crossroads. **Nature Astronomy**, v. 1, p. 0121, mai. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41550-017-0121>>.

FRIEDMANN, A. English translation: On the Curvature of Space. **General Relativity and Gravitation**, v. 31, p. 1991, dez. 1999.

GAMBINI, R.; PULLIN, J. **A first course in Loop Quantum Gravity**. Oxford, United Kingdom: Oxford University Press, 2011.

GAMOW, G. The Evolution of the Universe. **Nature**, v. 162, n. 4122, p. 680–682, out. 1948. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/162680a0>>.

GASPERINI, M.; SABBATA, V. D. **Introduction to Gravitation**. Singapore, Singapore: World Scientific, 1985.

GAWISER, E.; SILK, J. The Cosmic Microwave Background Radiation. **Physics Reports**, Elsevier, v. 333, p. 245–267, ago. 2000. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00025-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00025-9)>.

GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 15, p. 2752–2756, mai. 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2752>>.

GOENNER, H. F. On the History of Unified Field Theories. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 7, n. 1, p. 2, dez. 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2004-2>>.

GOENNER, H. F. On the History of Unified Field Theories. Part II.(ca. 1930–ca. 1965). **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 17, n. 1, p. 5, dez. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2014-5>>.

GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. United States of America, USA: Addison-Wesley, 1980.

GOURGOULHON, É. **3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity**. Berlin, Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Lecture Notes in Physics). ISBN 9783642245244.

GRØN, Ø.; HERVIK, S. **Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology**. New York, USA: Springer, 2007. ISBN 978-0-387-69200-5.

GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, jan. 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>>.

HAMMOND, R. T. Torsion Gravity. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 65, n. 5, p. 599–649, mar. 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0034-4885/65/5/201>>.

HARKO, T. et al. Coupling Matter in Modified Q Gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 98, p. 084043, out. 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.084043>>.

HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New General Relativity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 19, p. 3524–3553, jun. 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.3524>>.

HEHL, F. W. et al. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 48, p. 393–416, jul. 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.393>>.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the national academy of sciences**, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>>.

HUBISZ, J. L. Cosmological constants: Papers in modern cosmology. **The Physics Teacher**, v. 52, n. 5, p. 319–319, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.4872432>>.

IJJAS, A.; STEINHARDT, P. J.; LOEB, A. Inflationary paradigm in trouble after planck2013. **Physics Letters B**, v. 723, n. 4-5, p. 261–266, jun. 2013. Disponível em: <<https://app.dimensions.ai/details/publication/pub.1053245785andhttps://dash.harvard.edu/bitstream/1/41461284/1/79363%201304.2785.pdf>>.

JÄRV, L. et al. Nonmetricity Formulation of General Relativity and its Scalar-tensor Extension. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 97, p. 124025, jun. 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.124025>>.

JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. Coincident General Relativity. **Physical Review D**, APS, v. 98, n. 4, p. 044048, ago. 2018. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.98.044048>>.

JIMÉNEZ, J. B. et al. Cosmology in $f(Q)$ Geometry. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 101, p. 103507, mai. 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.103507>>.

JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. The Geometrical Trinity of Gravity. **Universe**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 5, n. 7, p. 173, jul. 2019. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/5/7/173>>.

KHANAPURKAR, S. M. **The Einstein-Cartan-Dirac (ECD) Theory**. Tese (Doutorado) — IISER Pune, 2018.

KINNEY, W. H. Cosmology, inflation, and the physics of nothing. **NATO Science Series II**, v. 123, p. 189–243, 2003.

KINNEY, W. H. TASI Lectures on Inflation. 2 2009. Disponível em: <<http://export.arxiv.org/abs/0902.1529v2>>.

KOLB, E.; TURNER, M. **The Early Universe**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1990. (Frontiers in physics).

LAZKOZ, R. et al. Observational Constraints of $f(Q)$ Gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 100, p. 104027, nov. 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.104027>>.

LU, J.; ZHAO, X.; CHEE, G. Cosmology in Symmetric Teleparallel Gravity and its Dynamical System. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 79, n. 6, p. 530, jan. 2019. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1140/epjc/s10052-019-7038-3#citeas>>.

LUMINET, J.-P. Editorial note to: Georges Lemaître, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. **General Relativity and Gravitation**, v. 45, n. 8, p. 1619–1633, jun. 2013. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10714-013-1547-4>>.

MOL, I. The Non-metricity Formulation of General Relativity. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 27, n. 3, p. 2607–2638, jan. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00006-016-0749-8>>.

NESTER, J. M.; YO, H.-J. Symmetric Teleparallel General Relativity. **Chinese Journal of Physics**, v. 37, n. 2, p. 113, abri. 1999. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1999ChJPh..37..113N>>.

NETO, J. B. **Teoria Eletromagnética - Parte Clássica**. [S.l.]: Livraria da Física, 2015.

NOJIRI, S.; ODINTSOV, S.; OIKONOMOU, V. Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution. **Physics Reports**, Elsevier, v. 692, p. 1–104, jun. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.06.001>>.

NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. P. Bouncing cosmologies. **Physics Reports**, v. 463, n. 4, p. 127–213, jul. 2008. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001373>>.

PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, jul. 1965. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1965ApJ...142..419P>>.

POISSON, E. An advanced course in general relativity. **lecture notes at University of Guelph**, 2002.

PORTO, C. M.; PORTO, M. Uma Visão do Espaço na Mecânica newtoniana e na Teoria da Relatividade de Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 30, p. 1603.1 – 1603.8, jun. 2008. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000100017&nrm=iso>.

POULIS, F. P.; SALIM, J. M. Weyl geometry as characterization of space-time. **International Journal of Modern Physics: Conference Series**, v. 03, p. 87–97, jul. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S2010194511001176>>.

ROVELLI, C. The Strange Equation of Quantum Gravity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 12, p. 124005, jun. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124005>>.

ROVELLI, C.; VIDOTTO, F. **Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2017.

SCIAMA, D. W. **On the Analogy between Charge and Spin in General Relativity**. [S.l.]: Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press and Warszawa: PWD, Oxford, 1962. 415 p.

SCIAMA, D. W. The physical structure of general relativity. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 36, p. 463–469, jan. 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.463>>.

SENATORE, L. Lectures on Inflation. In: **Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings**. [S.l.: s.n.], 2016.

SHANKS, T. et al. **Observational tests of cosmological inflation**. Dordrecht, Netherlands: Springer Science & Business Media, 2012. v. 348.

SHAPIRO, I. L. **A Primer in Tensor Analysis and Relativity**. Cham, Switzerland: Springer, 2019.

SIMON, J. Z. No Starobinsky inflation from self-consistent semiclassical gravity. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 45, p. 1953–1960, mar. 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.1953>>.

SOTIRIOU, T. P. **Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology**. Tese (Doutorado) — International School for Advanced Studies, 2007.

SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ Theories of Gravity. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 82, p. 451–497, mar. 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451>>.

STEINHARDT, P. J. Natural inflation. In: **Very Early Universe**. [S.l.: s.n.], 1983. p. 251–266.

SUNDERMEYER, K. **Constrained Dynamics: with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model**. Berlin, Germany: Springer Berlin Heidelberg, 1982. (Lecture Notes in Physics).

TINO, G. et al. Precision Gravity Tests and the Einstein Equivalence Principle. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 112, p. 103772, mai. 2020. ISSN 0146-6410. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641020300193>>.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. New York, United States: John Wiley and Sons, New York, 1972.

WHEELER, J. T. Weyl geometry. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science and Business Media LLC, v. 50, n. 7, jun. 2018. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-018-2401-5>>.

WILL, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 17, n. 1, p. 4, dez. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4>>.

WRIGHT, E. L. Theoretical Overview of Cosmic Microwave Background Anisotropy. In: Freedman, W. L. (Ed.). **Measuring and Modeling the Universe. Carnegie Observatories Astrophysics Series**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. p. 291.

XU, Y. et al. $f(Q,T)$ gravity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 79, n. 8, p. 708, ago. 2019. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1140/epjc/s10052-019-7207-4>>.

YU, Z.-X.; LI, S.-L.; WEI, H. Lemaître-Tolman-Bondi Static Universe in Rastall-like Gravity. **Nuclear Physics B**, v. 960, p. 115179, nov. 2020. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321320302650?via%3Dihub>>.

APÊNDICE A – 1 Formalismo ADM da Relatividade Geral e equação de Wheeler-DeWitt

Discutimos nesta seção uma breve introdução aos principais resultados do formalismo ADM para relatividade geral e conseqüentemente a definição da equação de Wheeler-DeWitt.

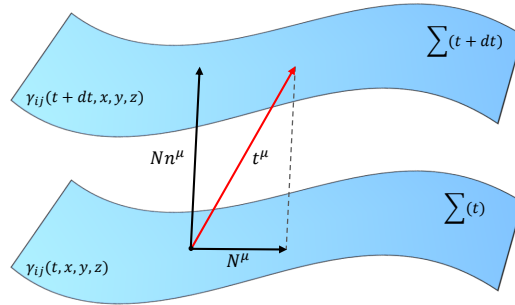
Tendo como base a mecânica quântica, vemos a necessidade de formular a relatividade geral no contexto hamiltoniano a fim de descrever o seu comportamento quântico. Além disso, antes de obtermos a descrição, é necessário desenvolver o formalismo de Dirac para sistemas singulares (SUNDERMEYER, 1982), que é o caso da relatividade geral (DIRAC, 1958). Desta forma, podemos impor as relações de comutação a um Hamiltoniano quantizado e neste caso encontrar a função de onda do universo.

A abordagem padrão para a descrição Hamiltoniana da teoria gravitacional é a do formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM), que consiste em uma abordagem dinâmica da relatividade geral, e considera uma decomposição do espaço-tempo por meio de hipersuperfícies espaciais arbitrárias tridimensionais (ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008). Nesse procedimento o espaço-tempo é decomposto como uma união em espaço mais tempo. Portanto, esta abordagem fornece uma descrição alternativa da densidade Lagrangeana da relatividade geral.

Para iniciar uma breve discussão deste formalismo destacaremos algumas quantidades relevantes. Por exemplo, as hipersuperfícies espaciais serão denotadas por Σ_t , N é a função de lapso, N_i é o vetor, e γ_{ij} é a métrica tridimensional dessa hipersuperfície. A função de lapso calcula a taxa na mudança do tempo em relação a coordenada do tempo em Σ_t . Portanto, γ_{ij} , N e N^i serão os objetos matemáticos utilizados para desenvolver a formulação canônica.

Vamos agora discutir como podemos calcular a distância entre dois pontos de uma hipersuperfície entre os instantes t e $t + dt$.

Figura A1 – Evolução do campo t^μ (fluxo temporal) através da foliação do espaço-tempo sobre hipersuperfícies espaciais.



Fonte: Produção do autor (2021).

Em cada hipersuperfície temos uma métrica espacial decomposta em

$$\gamma_{ij} = g_{ij} + n_i n_j, \quad (1)$$

em que n são os vetores unitários, e $i, j = 1, 2, 3$. Portanto, a distância (espacial) entre pontos de uma hipersuperfície é dada por

$${}^{(3)}ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2)$$

O campo do vetor normal unitário n^μ obedece as relações

$$n^\mu = -N \frac{\partial t}{\partial x_\mu}, \quad (3)$$

$$g_{\mu\nu} n^\nu n^\mu = -1. \quad (4)$$

A segunda expressão corresponde à condição de paralelismo entre dois vetores unitários n^ν e n^μ . Por sua vez, segue que a função de lapso é

$$N = -g_{\mu\nu} t^\mu n^\nu, \quad (5)$$

onde o fluxo temporal t^μ é definido a partir de

$$t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}. \quad (6)$$

O movimento tangente em relação à hipersuperfície é caracterizado pela função *shift*

$$N^i = \gamma^i_j t^j. \quad (7)$$

A partir dessas definições da função lapso e *shift*, podemos escrever o elemento de linha, distância entre os pontos de duas hipersuperfícies como (GOURGOULHON, 2012):

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) \quad (8)$$

A partir do elemento de linha (8) podemos escrever o tensor métrico em termos de N e N^i (GOURGOULHON, 2012)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(N^2 - N_i N^i) & N_j \\ N_j & \gamma_{ij} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

No processo de foliação, além da curvatura intrínseca, temos a presença de uma curvatura extrínseca¹ que é definir por

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x^j} + \frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ki}^j N^k - h_{ij} \right], \quad (10)$$

logo o escalar de Ricci pode ser escrito em termos de quantidades tridimensionais, o tensor de curvatura extrínseca e do tensor de curvatura intrínseca

$$R = (\gamma_{ij} \gamma_{kl} - \gamma_{ik} \gamma_{jl}) K^{ij} K^{kl} - {}^{(3)}R.$$

Desta forma, a densidade Lagrangeana pode ser reescrita sob a forma

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\gamma} N \left(K^{ij} K_{ij} - (K_i^i)^2 + {}^{(3)}R \right). \quad (11)$$

onde ${}^{(3)}R$ é a curvatura tridimensional intrínseca e γ é o determinante da métrica tridimensional γ^{ij} dado pela relação $\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma} N$.

A densidade Lagrangeana pode ser reescrita em termos da supermétrica,

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} N \left(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{\gamma} {}^{(3)}R \right), \quad (12)$$

¹ Curvatura extrínseca corresponde à curvatura devido ao processo de incorporar hipersuperfícies (de dimensão D) para descrever o espaço-tempo (de dimensão D+1).

sendo que a supermétrica é definida por

$$G^{ijkl} = \sqrt{\gamma} \left[\frac{1}{2} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} + \gamma^{il} \gamma^{jk}) - \gamma^{ij} \gamma^{lk} \right]. \quad (13)$$

Agora que temos a densidade Lagrangeana, onde identificamos os graus de liberdade dinâmicos como N , N^i e γ^{ij} , obtemos as seguintes densidades de momentos (GOURGOULHON, 2012)

$$\pi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0, \quad (14)$$

$$\pi^i \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}^i} = 0, \quad (15)$$

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\gamma}^{ij}} = \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{2} (K \gamma^{ij} - K^{ij}) = G^{ijkl} K_{kl}. \quad (16)$$

Note que as duas primeiras expressões são nulas, como é de ser esperar uma vez que (12) não depende das velocidades de N e N^i . Ademais, elas também nos fornecem os vínculos primários desta teoria.

Podemos calcular a densidade Hamiltoniana para este sistema a partir de

$$\mathcal{H} = \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}. \quad (17)$$

Em que a Hamiltoniana canônica é definida por

$$H_c = \int \left(\pi \dot{N} + \pi^i \dot{N}^i + \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} \right) - \frac{\kappa}{2} \sqrt{\gamma} N \left(K^{ij} K_{ij} - (K^i_i)^2 + {}^{(3)}R \right) d^3x, \quad (18)$$

Definimos a Hamiltoniana total, que fica reduzida devido aos seus vínculos a seguinte expressão (POISSON, 2002)

$$H_T = \int \left(N \mathcal{H}_0 + N_i \mathcal{H}^i + \lambda \pi + \lambda_i \pi^i \right) d^3x$$

em que também é conveniente definimos a super-Hamiltoniana e o super-momento:

$$\mathcal{H}_0 \equiv G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{\gamma} {}^{(3)}R; \quad (19)$$

$$\mathcal{H}^i \equiv -2 \nabla_j \pi^{ij}. \quad (20)$$

Agora escreveremos as relações por meio dos parênteses de Poisson das variáveis canônicas $N, N_i, \gamma_{ij}, \pi, \pi^i$ e π^{ij} ,

$$\{N(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (21)$$

$$\{N_i(t, \vec{x}), \pi^j(t, \vec{y})\} = \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (22)$$

$$\{\gamma_{ij}(t, \vec{x}), \pi^{kl}(t, \vec{y})\} = \delta_{ij}^{kl} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (23)$$

A imposição de que a evolução temporal dos vínculos primários seja nula nos dá as seguintes relações

$$\dot{\pi}(t, \vec{x}) = \{\pi(t, \vec{x}), H_T(t, \vec{z})\} = \int d^3z \{\pi(t, \vec{x}), N(t, \vec{z})\} \mathcal{H}_0(t, \vec{z}) = -\mathcal{H}_0(t, \vec{x}) \approx 0, \quad (24)$$

$$\dot{\pi}^i(t, \vec{x}) = \{\pi^i(t, \vec{x}), H_T(t, \vec{z})\} = \int d^3z \{\pi^i(t, \vec{x}), N_j(t, \vec{z})\} \mathcal{H}_0^j(t, \vec{z}) = -\mathcal{H}_0^i(t, \vec{x}) \approx 0. \quad (25)$$

Que nos fornecem os vínculos secundários $\mathcal{H}_0 \approx 0$ e $\mathcal{H}^i \approx 0$. Portanto, podemos confirmar que todos os parênteses de Poisson são fracamente nulos além de que todos os vínculos são de primeira classe, uma vez que todos os vínculos possuem parênteses de Poisson nulos entre si (SUNDERMEYER, 1982).

Em posse da hamiltoniana do sistema, podemos proceder para a sua quantização. A fim de implementar o processo de quantização, utilizaremos o princípio da correspondência que toda função clássica torna-se um operador autoadjunto atuando no espaço de Hilbert, e ainda que todos parênteses de Poisson fundamentais são elevados a relações de comutação desses operadores. Não trataremos os detalhes deste formalismo com todo seu rigor pois está além do escopo deste trabalho, mas, ele pode ser obtido na seguinte referência (SUNDERMEYER, 1982). Algumas relações são relevantes no processo de quantização canônica, dentre elas, temos a atuação dos vínculos hamiltonianos nas funções de onda

$$\hat{\pi} \psi = 0, \quad (26)$$

$$\hat{\pi}^i \psi = 0, \quad (27)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \psi = 0, \quad (28)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^i \psi = 0. \quad (29)$$

Dando sequência ao desenvolvimento, o próximo passo para resolvermos as equações (26) - (29) no espaço de configuração, é a identificação dos operadores momento em termos de diferenciais funcionais

$$\hat{\pi} = -i \frac{\delta}{\delta N}, \quad (30)$$

$$\hat{\pi}^i = -i \frac{\delta}{\delta N_i}, \quad (31)$$

$$\hat{\pi}^{ij} = -i \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}}, \quad (32)$$

de modo que temos as seguintes relações de comutação fundamentais

$$[\hat{\gamma}_{ij}(x), \hat{\pi}^{kl}(y')] = i \delta_{ij}^{kl} \delta^3(x - y'), \quad (33)$$

$$\delta_{ij}^{kl} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k), \quad (34)$$

todas as demais relações são identicamente nulas.

Das relações dos vínculos, ou melhor, do vínculo da super Hamiltoniana (28), encontramos a condição que determina a dinâmica do sistema

$$\hat{\mathcal{H}} |\psi\rangle = 0, \quad (35)$$

que corresponde a uma equação do tipo Schroedinger. Por fim, elevando a função super-hamiltoniano (19) a nível de operadores por meio da equação (32), e substituindo seu resultado em (35), encontramos a conhecida equação Wheeler-DeWitt

$$\left[\nabla^2 - \frac{\kappa^2}{4} \sqrt{\gamma} {}^{(3)}R \right] |\psi\rangle = 0. \quad (36)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta}{\delta \gamma_{lk}}, \quad (37)$$

sendo ψ a função de onda do Universo que depende apenas da 3-geometria da hipersuperfície.