



MÍRIAN ROSA

**ANÁLISE DE CURVAS DE LACTAÇÃO UTILIZANDO
MODELOS LINEARES E NÃO LINEARES**

LAVRAS - MG

2020

MÍRIAN ROSA

**ANÁLISE DE CURVAS DE LACTAÇÃO UTILIZANDO MODELOS LINEARES E
NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes

Orientador

LAVRAS - MG

2020

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Rosa, Mírian.

Análise de curvas de lactação utilizando modelos lineares e não lineares / Mírian Rosa. – Lavras : UFLA, 2020.

64 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico)–Universidade Federal de Lavras, 2020.

Orientador: Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes.

Bibliografia.

1. Leite. 2. Girolando. 3. Regressão. I. Fernandes, Tales Jesus. II. Título.

MÍRIAN ROSA

**ANÁLISE DE CURVAS DE LACTAÇÃO UTILIZANDO MODELOS LINEARES E
NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 30 de julho de 2020.

Prof. DSc. Joel Augusto Muniz UFLA
Prof. DSc. Adriele Aparecida Pereira UNIFAL

Prof. DSc. Tales Jesus Fernandes
Orientador

**LAVRAS - MG
2020**

Ao meu amor José Willer do Prado.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

À Deus e a Nossa Senhora por sempre iluminar meus passos, me dando sempre muita saúde para eu seguir minha caminhada.

Ao meu marido José Willer do Prado, por sempre acreditar em mim, pelo amor, carinho que sempre tem comigo e por sempre cuidar tão bem de mim.

Ao meu pai Sebastião e minha mãe Maria, ao meu irmão Milton e minha irmã Márcia pelas orações e carinho que sempre depositam em mim. À minha cunhada Elzira por todo o apoio e minha sobrinha Júlia por todo carinho apesar da distância.

Ao meu orientador Tales Jesus Fernandes pelos ensinamentos, orientações e paciência, por não medir esforços em me auxiliar durante o mestrado.

Aos membros do Grupo de Estudos em Regressão Não linear, por sempre estarem disponíveis em ajudar e principalmente serem essas pessoas maravilhosas que irei levar na memória e no coração pelo resto da minha vida.

Aos vários amigos que conheci durante essa caminhada, uns já voltaram para suas casas e por aqui só deixou saudades. Em especial a Kelly Lima (Kellyzona) por todo auxílio, por não medir esforços para auxiliar nas diversas dúvidas que surgiam.

À Adrielly Andrade por ter sido uma grande amiga que me deu forças e me ajudou muito a conciliar mestrado e graduação.

À Universidade Federal de Lavras pela oportunidade concedida para realização do mestrado e aos professores do Departamento de Estatística pelos ensinamentos transmitidos.

Aos membros da banca avaliadora Joel Augusto Muniz e Adriele Aparecida Pereira pela dedicação e sugestões para melhoria deste trabalho.

À Nádia, que sempre esteve disposta a tirar todas as dúvidas, ajuda sempre os mais necessitados e sempre me alegrou com suas histórias.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Obrigada!!

*"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes".
(Isaac Newton)*

RESUMO

O leite é um dos principais alimentos consumidos no mundo, isto devido aos seus atributos nutricionais e organolépticos. Sua composição se altera conforme a raça, alimentação, tempo de gestação e alguns outros fatores característicos da vaca em lactação, e ainda sofre influência do local de produção, tais como clima e a pastagem. A produção de leite pode ser representada graficamente durante a lactação de uma vaca, essa representação é denominada curva de lactação. Neste sentido, o objetivo deste trabalho foi classificar os principais modelos utilizados para descrever as curvas de lactação em lineares e não lineares indicando o modelo mais adequado de cada grupo, além de avaliar a não linearidade dos modelos não lineares na descrição das curvas de lactação da raça Girolando. Foram utilizados dados de 165 lactações de 89 vacas 3/4 Holandesa + 1/4 Gir criadas em sistema de produção de leite a pasto com suplementação, calculou-se a média de produção de 20 em 20 dias até os 310 dias de lactação. Foram utilizados dezessete modelos de curvas de lactação disponíveis na literatura. A estimação dos parâmetros dos modelos foi feita por meio do método de mínimos quadrados, sendo que os não lineares foi necessário o método iterativo de Gauss-Newton, também denominado método de linearização, e os valores iniciais dos métodos iterativos foram definidos com base na literatura sobre curvas de lactação de outras raças. Entre os principais resultados, pode-se destacar que, o melhor modelo linear para descrever as curvas de lactação da raça Girolando foi o modelo Cobuci *et al.* (2000), já o modelo não linear mais adequado para descrever a curva de lactação da raça Girolando foi o modelo de Wood (1967). O modelo Cobuci *et al.* (2000) é uma alternativa interessante para modelar curvas de crescimento. E o modelo Wood (1967), por ser um modelo não linear seus parâmetros possuem interpretação prática, possibilitando estimar aspectos importantes da curva.

Palavras-chave: Leite. Girolando. Regressão

ABSTRACT

Milk is one of the main foods consumed in the world, due to its nutritional and organoleptic attributes. Its composition changes according to the breed, food, gestation time and some other factors characteristic of the lactating cow, and is still influenced by the place of production, such as climate and pasture. Milk production can be represented graphically during lactation of a cow, this representation is called a lactation curve. In this sense, the objective of this work was to classify the main models used to describe the lactation curves in linear and non-linear, indicating the most appropriate model of each group, besides evaluating the non-linearity of the non-linear models in the description of the lactation curves of the Girolando race. Data from 165 lactations of 89 $3/4$ Holstein + $1/4$ Gir cows reared in a pasture milk production system with supplementation were used, the average production was calculated every 20 days up to 310 days of lactation. Seventeen models of lactation curves available in the literature were used. The estimation of the parameters of the models was made using the least squares method, whereas the non-linear ones required the iterative Gauss-Newton method, also called linearization method, and the initial values of the iterative methods were defined based on the literature. on lactation curves of other breeds. Among the main results, it can be highlighted that the best linear model to describe the lactation curves of the Girolando breed was the Cobuci et al. (2000), the most suitable non-linear model to describe the Girolando lactation curve was Wood's model (1967). The Cobuci et al. (2000) is an interesting alternative for modeling growth curves. And the Wood model (1967), a non-linear model, has parameters with practical interpretation, making it possible to estimate important aspects of the curve.

Keywords: Milk. Girolando. Regression.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Cruzamentos para formação da raça Girolando.	14
Figura 2.2 – Representação de uma curva de lactação e seus elementos.	15
Figura 4.1 – Modelo linear Dave (1971) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	42
Figura 4.2 – Modelo linear Madalena, Martinez e Freitas (1979) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	43
Figura 4.3 – Modelo linear Sigh e Gopal (1982) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	43
Figura 4.4 – Modelo linear Sigh e Gopal (1982) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	44
Figura 4.5 – Modelo linear Bianchini Sobrinho (1984) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	44
Figura 4.6 – Modelo linear Cobuci <i>et al.</i> (2000) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	45
Figura 4.7 – Modelo não linear de Brody, Ragsdale e Turner (1923) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	46
Figura 4.8 – Modelo não linear de Brody, Turner e Ragsdale (1924) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	46
Figura 4.9 – Modelo não linear de Sikka (1950) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	47
Figura 4.10 – Modelo não linear de Nelder (1966) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	47
Figura 4.11 – Modelo não linear de Wood (1967) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	48
Figura 4.12 – Modelo não linear de Papajcsik e Boderó (1988) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	48
Figura 4.13 – Modelo não linear de Wilkink (1987) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	49
Figura 4.14 – Modelo não linear de Rook, France e Dhanoa (1993) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	49

Figura 4.15 – Modelo não linear de Dijkstra <i>et al.</i> (1997) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	50
Figura 4.16 – Modelo não linear de Dhanoa (1981) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	50
Figura 4.17 – Modelo não linear de Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.	51
Figura 4.18 – Intervalos de confiança para a produção de leite estimada pelo modelo de Cobuci <i>et al.</i> (2000).	53
Figura 4.19 – Intervalos de confiança para a produção de leite estimada pelo modelo de Wood (1967).	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Modelos utilizados em estudos de curvas de lactação.	20
Tabela 4.1 – Modelos lineares no estudo de curvas de lactação.	34
Tabela 4.2 – Modelos não lineares no estudo de curvas de lactação.	34
Tabela 4.3 – Testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados.	35
Tabela 4.4 – Valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), do desvio padrão residual (DPR), do critério de informação de Akaike (AIC) dos modelos lineares estudados.	36
Tabela 4.5 – Valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), do desvio padrão residual (DPR), do critério de informação de Akaike (AIC) e das medidas de não linearidade intrínseca (c^l) e paramétrica (c^θ) dos modelos não lineares estudados.	38
Tabela 4.6 – Vício de Box para os parâmetros dos modelos não lineares estudados.	39
Tabela 4.7 – Limites Inferior (LI) e Superior (LS) dos intervalos de confiança de 60%, 80% e 98% para a produção de leite de vacas Girolando 3/4 estimados pelo modelo linear de Cobuci <i>et al.</i> (2000).	52
Tabela 4.8 – Limites Inferior (LI) e Superior (LS) dos intervalos de confiança de 60%, 80% e 98% para a produção de leite de vacas Girolando 3/4 estimados pelo modelo não linear de Wood (1967).	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	Raça Girolando	13
2.2	Curva de lactação	15
2.3	Modelo de regressão	16
2.3.1	Modelo de regressão linear múltipla	17
2.3.2	Modelos de regressão não linear	18
2.3.3	Modelos linearizáveis	18
2.4	Modelos de Curvas de Lactação	19
2.5	Estimação de parâmetros	23
2.6	Crêterios de qualidade de ajuste	25
2.6.1	Coefficiente de determinação ajustado	26
2.6.2	Crêterio de informação de Akaike	26
2.6.3	Desvio padrão residual	26
2.6.4	Medidas de não linearidade	27
2.6.4.1	Curvaturas de Bates e Watts	27
2.6.4.2	Vício de Box	28
2.7	Métodos iterativos	28
3	MATERIAL E MÉTODOS	30
3.1	Classificação dos modelos	30
3.2	Estimação dos parâmetros	31
3.3	Análise de resíduos	31
3.4	Intervalos de confiança	32
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	34
5	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

O leite é um dos principais alimentos consumidos no mundo, pois segundo Hochmüller *et al.* (2017) ele possui atributos nutricionais e organolépticos. Sua composição se altera conforme a raça, alimentação, tempo de gestação e alguns outros fatores característicos da vaca em lactação, e ainda sofre influência do local de produção, tais como clima e a pastagem.

A produção de leite de vaca no mundo é expressiva. Segundo a Food and Agriculture Organization - FAO a produção em 2018 foi de 683,22 milhões de toneladas, o continente com maior produção de leite neste mesmo ano foi o Europeu, com 220,38 milhões de toneladas (FAO, 2020). O Brasil é o terceiro maior produtor de leite, sendo que em 2018 produziu 33,84 milhões de toneladas de leite, ficando atrás somente dos EUA e Índia (FAO, 2020).

A produção de leite pode ser representada graficamente durante a lactação de uma vaca e essa representação é denominada curva de lactação. De acordo com Glória *et al.* (2010), o estudo dessas curvas é adequado, pois possibilita a estimativa da produção total a partir de produções parciais, promovendo o descarte precoce e a avaliação de reprodutores a partir de lactações incompletas de suas filhas. O estudo das curvas de lactação facilita a estimativa do volume de leite necessário aos bezerros e ajuda a controlar a estratégia de suplementação do rebanho, bem como o planejamento nutricional dos bezerros para produção de carne, da lactação à terminação (HENRIQUES *et al.*, 2011). Segundo Cobuci *et al.* (2000), existem alguns fatores de ambiente que podem interferir na produção de leite e com isso modificar o formato da curva de lactação. Têm-se como exemplos, o rebanho, o ano de parto, a estação de parto e a idade da vaca ao parto.

Na tentativa de melhorar a produtividade animal em condições climáticas adversas, tem-se utilizado o cruzamento de raças zebuínas com raças de origem europeia especializadas em produção de leite. Segundo Facó *et al.* (2002) dentre estes cruzamentos, ocupam posição de destaque os mestiços Holandês x Gir, unindo assim as características mais relevantes entre as duas raças, ou seja, a grande capacidade de se adaptar em ambientes desafiadores da raça Gir devido a rusticidade presente nos animais e a alta produção de leite dos animais da raça Holandesa. A complementaridade das duas raças resulta em um animal superior aos demais mestiços leiteiros.

As curvas de lactação têm sido utilizadas para modelar a produção de leite em diversas raças e espécies e essa modelagem se faz por meio de modelos de regressão lineares e não lineares. Nos modelos lineares a estimativa é exata, no entanto, em modelos não lineares

esta estimação é apenas aproximada por meio de aproximações lineares, porém eles têm ótima qualidade de ajuste. Vale ressaltar que quanto maior a não linearidade presente em um modelo, mais distante do linear estará a aproximação, tornando menos confiáveis as inferências sobre os parâmetros (CORDEIRO; PRUDENTE; DEMÉTRIO, 2009; RATKOWSKY, 1983; FERNANDES *et al.*, 2015).

Expressões usadas para avaliar a adequabilidade da aproximação linear e seus efeitos nas inferências são conhecidas como medidas de não linearidade. As medidas de curvatura de Bates e Watts e o Vício de Box são as medidas de não linearidade mais utilizadas.

Conforme Fernandes *et al.* (2015), mensurar a não linearidade presente em um modelo de regressão não linear é de suma importância pois possibilita a obtenção de estimativas mais confiáveis para os parâmetros. Porém, os autores não tem se preocupado em medir a não linearidade presente nos modelos não lineares de curvas de lactação.

O objetivo deste trabalho é classificar os principais modelos utilizados para descrever as curvas de lactação em lineares e não lineares indicando o modelo mais adequado de cada grupo, além de avaliar a não linearidade dos modelos não lineares na descrição das curvas de lactação da raça Girolando.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste tópico, apresenta-se um breve histórico sobre a raça Girolando, aborda-se sobre curvas de lactação, modelos de regressão, modelos de curvas de lactação. Além disso, se expõe os principais conceitos utilizados na estimação dos parâmetros e seleção dos modelos.

2.1 Raça Girolando

A cerca das décadas de 1940 e 1950, produtores de gado de leite iniciaram cruzamentos entre animais das raças Gir e Holandesa com o objetivo de alcançar animais que ligassem a grande capacidade de produção de leite do gado Holandês e a rusticidade da raça Gir (CANAZA-CAYO *et al.*, 2014).

Segundo Facó *et al.* (2002), no ano de 1989, o Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (MAPA), em companhia com as Associações representativas, delineou as normas para formação do Girolando. Em 1996, oficializou-se a raça Girolando pelo MAPA.

Conforme ressalta Silva *et al.* (2019) as composições raciais das raças Holandesas e Gir, vão desde $1/4$ Holandês + $3/4$ Gir até $7/8$ Holandês + $1/8$ Gir. A composição racial $5/8$ Holandês + $3/8$ Gir são considerados como Puro Sintético (PS) da Raça Girolando, isto é, a raça propriamente dita. A Figura 2.1 apresenta uma ilustração dos cruzamentos para a formação da raça Girolando.

Figura 2.1 – Cruzamentos para formação da raça Girolando.



Fonte: Silva *et al.* (2019).

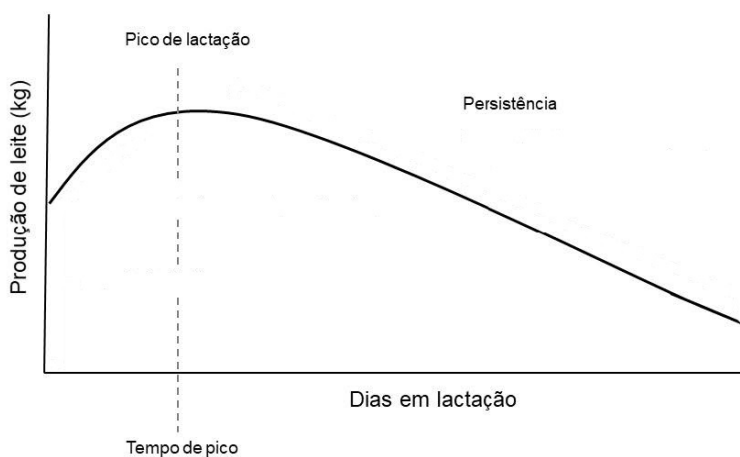
Existem maneiras diferentes de realizar os cruzamentos das raças até formar a raça Girolando puro sintético, essa estratégia da Figura 2.1 mostra o cruzamento de um touro Holandês com uma vaca Gir, que formam a vaca 1/2 Holandês + 1/2 Gir, ao cruzar essa primeira composição racial com um touro Holandês tem-se a segunda composição que é uma vaca 3/4 Holandês + 1/4 Gir, realizando o cruzamento novamente dessa composição com um touro 5/8 Holandês + 3/8 Gir obtém-se uma vaca 5/8 Holandês + 3/8 Gir, utilizando o touro da composição anterior com essa nova vaca chega-se ao Girolando puro sintético. Segundo Barbosa *et al.* (2002), o tempo demandado para consolidar a raça Girolando em 5/8 Holandês + 3/8 Gir é de no mínimo 10 a 15 anos.

A Associação Brasileira dos Criadores de Girolando (2020) frisa que a raça Girolando é responsável por aproximadamente 80% do leite produzido no Brasil. Animais desta raça são encontrados de Norte a Sul do Brasil, sendo mais utilizado na região Sudeste, principalmente em Minas Gerais.

2.2 Curva de lactação

Como enfatiza Cobuci *et al.* (2001), o idealizador do estudo sobre curvas de lactação foi Brody, o qual apresentou o primeiro modelo matemático com o foco em caracterizar essas curvas. Em bovinos leiteiros, as curvas de lactação possuem um esquema comum, ou seja, a produção de leite aumenta com o início da lactação, atinge um pico de produção e depois diminui lentamente até o término da lactação (CHANG *et al.*, 2001). A curva de lactação é composta por três fases, a inicial, em que há aumento da produção até o pico, a fase de pico que é descrita pela produção máxima e a terceira fase que é a de decréscimo da produção até o fim da lactação (NEGRI, 2017). Na Figura 2.2 tem-se a representação de uma curva de lactação e seus elementos.

Figura 2.2 – Representação de uma curva de lactação e seus elementos.



Fonte: Adaptado de Negri (2017).

De acordo com a Figura 2.2 o tempo de pico refere-se ao dia em que ocorreu a produção máxima de leite. O pico representa a produção máxima de leite alcançada em um dia na lactação, Jacopini *et al.* (2016) ressaltam que o pico de lactação é quem define a produção de leite, o período e a forma da curva de lactação. Rabassa *et al.* (2011) salientam que depois do pico, o declínio da produção de leite, também chamado de persistência pode acontecer de forma rápida ou lenta, em função do genótipo ou do potencial individual para produção de leite.

Jacopini *et al.* (2016) frisam que na literatura existem várias definições para persistência, sendo que a mais utilizada é a capacidade da vaca manter sua produção de leite após ter atingido produção máxima na lactação. Conforme ressaltam El Faro, Albuquerque e Fries (1999) a medida de persistência não possui unidade, o que dificulta sua interpretação biológica. Segundo Daltro *et al.* (2019), vacas com maior persistência apresentam maior produção de leite,

maior longevidade e certamente podem ser consideradas como grandes produtoras, fornecendo durante sua vida útil grande retorno econômico. Batra (1986) afirma que a curva de lactação de animais jovens é denotada por menores níveis de produção durante a lactação, mas com decréscimos mensais reduzidos, o que garante maior persistência quando relacionadas à de animais mais velhos. A forma que a produção de leite cai depois do alcance do pico indica se a lactação de um animal é persistente ou não, sendo desejável que essa queda seja suave, ou seja, que haja maior persistência de lactação (ZADRA, 2012).

Esses são os componentes que vão determinar a forma da curva de lactação e precisam ser bem conhecidos. Segundo Azevedo Júnior (2018), esses componentes podem ser mensurados como parâmetros dos modelos ajustados ou como funções dos parâmetros utilizados na modelagem das curvas de lactação.

2.3 Modelo de regressão

A teoria de regressão teve início no século XIX com Francis Galton. Ele estudou a relação entre a altura dos pais e dos filhos (X_i e Y_i) respectivamente, buscando entender como a altura do pai influenciava a altura do filho. Ele percebeu que, se o pai fosse muito alto ou muito baixo, o filho sempre teria uma altura aproximando-se da média (DEMÉTRIO; ZOCCHI, 2011). Logo, regressão, pode ser definida como a existência de uma tendência dos dados se deslocarem para a média.

De acordo com Draper e Smith (1998), a análise de regressão é uma metodologia estatística para prever os valores de uma ou mais variáveis respostas ou dependentes, baseando-se em um conjunto de valores de variáveis preditoras ou independentes. A forma clássica de um modelo de regressão é:

$$Y = F(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon},$$

em que:

Y representa o vetor com a variável dependente ou variáveis resposta;

\mathbf{X} representa as variáveis independentes ou variáveis regressoras;

$\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor das variáveis aleatórias não observáveis representando os erros aleatórios, sendo $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}; I\sigma^2)$.

Os autores destacam ainda que os modelos de regressão podem ser classificados, em relação a seus parâmetros, da seguinte forma:

- i) modelos lineares: os quais são lineares em relação aos parâmetros, isto é, todas as derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo não dependem de nenhum parâmetro;
- ii) modelos não lineares: são aqueles em que pelo menos uma das derivadas parciais depende de algum parâmetro do modelo e não existe transformação capaz de torná-lo linear;
- iii) modelos linearizáveis: estes são não lineares em sua forma inicial, mas podem se tornar lineares a partir de alguma transformação.

2.3.1 Modelo de regressão linear múltipla

Segundo Fernandes *et al.* (2019), na Estatística a associação funcional entre as variáveis não é perfeita, aos quais são atribuídos erros de mensuração das variáveis independentes ou variáveis explicativas não observadas que afetam o valor da variável resposta, que são chamados erros aleatórios.

O modelo de regressão linear múltipla com n observações e k variáveis pode ser representado por:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i.$$

Em notação matricial, tem-se:

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times p} \boldsymbol{\beta}_{p \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1},$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

em que:

p é o número de parâmetros;

\mathbf{Y} é o vetor com os valores observados da variável resposta (variável dependente);

\mathbf{X} é a matriz de uma ou mais variáveis independentes, dada por

$\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de parâmetros;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor das variáveis aleatórias não observáveis representando os erros aleatórios, sendo $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}; I\sigma^2)$.

Por exemplo, o modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$ é linear, pois, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = 1$, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = X$, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_2} = X^2$, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_3} = X^3$, ou seja, as derivadas em relação aos parâmetros não dependeram de nenhum dos parâmetros.

Entretanto, não são todos os modelos que apresentam a independência da derivada parcial com os parâmetros como o modelo linear. Existem modelos não lineares nos quais a derivada parcial depende dos parâmetros, conforme é apresentado no próximo tópico.

2.3.2 Modelos de regressão não linear

Mischan e Pinho (2014) definem, de modo geral, um modelo estatístico não linear com variáveis independentes ($X_i, i = 1, 2, \dots, p$) como:

$$Y = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon},$$

em que:

$\mathbf{Y}_{n \times 1}$ é o vetor com a variável resposta (variável dependente);

$\boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$ é o vetor de parâmetros;

$f(\cdot)_{n \times 1}$ é a função (ou relação) que acredita-se existir entre as variáveis;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1}$ é o vetor de erros associados ao modelo, com $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}; I\sigma^2)$.

A principal característica dos modelos de regressão não lineares é que $f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$ é interpretado a partir de suposições teóricas mediante equações diferenciais. Sendo assim, os parâmetros resultantes $\boldsymbol{\beta}$ apresentam interpretação prática direta (CORDEIRO; PRUDENTE; DEMÉTRIO, 2009).

Como exemplo, considere o modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 e^{\beta_2 X}$ o qual é não linear, pois, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = 1$, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = e^{\beta_2 X}$, $\frac{\partial Y}{\partial \beta_2} = \beta_1 X e^{\beta_2 X}$.

Além dos modelos não lineares também existem os linearizáveis, ou seja, são os modelos não lineares que são passíveis de se tornarem lineares por meio de alguma transformação matemática, como é demonstrado no próximo tópico.

2.3.3 Modelos linearizáveis

Nos modelos linearizáveis é necessário realizar a transformação nos valores estimados pelo modelo, para que se torne um modelo linear. Isso pode ser um processo complicado, pois

primeiramente aplica-se essa transformação para só depois interpretar os resultados. Ressalta-se também que o modelo é linearizável desde que o erro seja multiplicativo na sua forma original.

A transformação logarítmica é geralmente a mais utilizada para linearizar os modelos. Por exemplo, o modelo dado por, $Y = ax^b\epsilon$, que é não linear. Ao aplicar o logaritmo, temos que a expressão do modelo transformado é dada por, $\ln Y = \ln a + b \ln x + \ln \epsilon$, que agora é um modelo linear.

2.4 Modelos de Curvas de Lactação

Existem vários modelos na literatura empregados no ajuste da curva de lactação, esses modelos comumente utilizados podem ser encontrados nas três formas apresentadas nos tópicos anteriores, ou seja, são modelos lineares, não lineares e linearizáveis. Na Tabela 2.1 são apresentados alguns destes modelos com os respectivos trabalhos em que foram utilizados.

Tabela 2.1 – Modelos utilizados em estudos de curvas de lactação.

Modelos	Autor
1. $Y = a \exp(-ct) + \varepsilon$	Brody, Ragsdale e Turner (1923)
2. $Y = a \exp(-bt) - a \exp(-ct) + \varepsilon$	Brody, Turner e Ragsdale (1924)
3. $Y = a \exp(bt - ct^2) + \varepsilon$	Sikka (1950)
4. $Y = t / (a + bt + ct^2) + \varepsilon$	Nelder (1966)
5. $Y = at^b \exp(-ct) + \varepsilon$	Wood (1967)
6. $Y = a + bt - ct^2 + \varepsilon$	Dave (1971)
7. $Y = a - ct + \varepsilon$	Madalena, Martinez e Freitas (1979)
8. $Y = a - bt + c \ln(t) + \varepsilon$	Singh e Gopal (1982)
9. $Y = a + bt + ct^2 + d \ln(t) + \varepsilon$	Singh e Gopal (1982)
10. $Y = a + bt + ct^{-1} + \varepsilon$	Bianchini Sobrinho (1984)
11. $Y = at \exp(-ct) + \varepsilon$	Papajcsik e Boderó (1988)
12. $Y = a - ct + \ln(t) + \varepsilon$	Cobuci <i>et al.</i> (2000)
13. $Y = a + bt + c \exp(-dt) + \varepsilon$	Wilmink (1987)
14. $Y = a \left(\frac{1}{1 + (\frac{b}{c+t})} \right) \exp(-dt) + \varepsilon$	Rook, France e Dhanoa (1993)
15. $Y = a \exp\left(\left[\frac{b(1-\exp(-ct))}{c} - dt\right]\right) + \varepsilon$	Dijkstra <i>et al.</i> (1997)
16. $Y = at^{bc} \exp(-ct) + \varepsilon$	Dhanoa (1981)
17. $Y = at^{b \exp(-ct)} + \varepsilon$	Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995)

Na Tabela 2.1 todos os parâmetros dos modelos foram representados pelas letras a , b , c , d para uma apresentação de forma mais didática, mas esses parâmetros possuem interpretações diferentes em cada modelo.

Em 1967, foi proposto por Wood o modelo para predição de curvas de lactação, que em alguns trabalhos os autores denominam de “função Gama incompleta” por ser derivada da função Gama. O modelo 5 na Tabela 2.1 é dado por: $Y_t = at^b \exp(-ct) + \varepsilon$. Conforme sustentam Coldebella *et al.* (2003), Y_t é a produção de leite no dia em lactação t ; a é um parâmetro desconhecido que representa a produção de leite no início da lactação, que tem como característica abaixar ou elevar toda a curva de lactação, não alterando, contudo, seu formato geral; b é um parâmetro desconhecido que está associado à fase de elevação da produção de leite no início da lactação; c é um parâmetro desconhecido que está ligado à fase de declínio da produção de leite após o pico. Uma das vantagens de se utilizar o modelo de Wood (1967) no ajuste

das curvas de lactação é que seus parâmetros possuem uma interpretação biológica, permitindo obter informações sobre a persistência da lactação e o pico de produção (MELO *et al.*, 2011).

O modelo Wilmink (modelo 15, Tabela 2.1) é dado por $Y = a + bt + c \exp(-dt) + \varepsilon$, segundo Wilmink (1987) o parâmetro a está associado a produção inicial, b com diminuição da produção após o pico de produção, c com aumento da produção inicial até direção ao pico e o parâmetro d representa o pico de produção.

Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995) modificaram o modelo Wood (1967), e a partir do novo modelo estudaram as situações encontradas em um rebanho típico de ovelhas leiteiras, os autores observaram que o modelo de Wood (1967) modificado é mais complexo, mas parece mais flexível que o modelo original e este modelo tem como característica ser útil quando há uma grande variação no nível de produção.

Torquato, El Faro e Mascioli (2017) avaliaram o comportamento das curvas de lactação de vacas de diferentes grupos genéticos oriundas do cruzamento entre as raças Holandesa e Gir leiteiro, filhas de touros provados e não provados em avaliações genéticas. Para o ajuste das curvas utilizaram o modelo Wood (modelo 5, Tabela 2.1), cujo resultados mostraram diferentes formas para as curvas de lactação entre os grupos comparados. Apenas as fêmeas do grupo genético 1/2 Holandês + Gir, filhas de pais Gir, demonstraram padrão de curva atípico, não tiveram pico e os níveis de produção foram mais baixos durante todo período da lactação. Os autores notaram também que os comportamentos das curvas mostraram padrão curvilíneo distinto, sendo que as filhas de touros não provados não apresentaram curvas com níveis de produção mais elevados por todo o período de lactação e já as filhas de touros provados apresentaram esta característica.

Junqueira *et al.* (2018) desenvolveram um trabalho que tinha como objetivo comparar a forma das curvas de lactação de vacas F1 Holandês x Gir ordenhadas na presença ou na ausência de suas crias. Para o ajuste das curvas de lactação, utilizaram o modelo Wood (modelo 5, Tabela 2.1). As curvas de lactação foram praticamente iguais para os sistemas com e sem bezerro, com exceção em sua persistência, que foi maior no sistema com bezerro. A presença do bezerro na sala de ordenha até os 60 dias pós-parto propiciou uma produção de leite exagerada nesse período, o que modificou a forma da curva de lactação para o leite total.

Daltro *et al.* (2018) utilizaram modelos lineares e não lineares para caracterizar as curvas de lactação de vacas Girolando. Os modelos trabalhados foram Wood (modelo 5, Tabela 2.1), Wilmink (modelo 15, Tabela 2.1) e Wood após ter aplicado uma transformação logarítmica em

Wood, tornando assim o modelo não linear em linear. As curvas de lactação estimadas pelos modelos apresentaram um padrão típico. O Wood linear teve um melhor ajuste das curvas de lactação, pois os valores da raiz do erro quadrático médio (RMSD), critério de informação de Akaike (AIC) e critério de informação Bayesiano (BIC) foram mais baixos do que os outros modelos. Entretanto, apesar da indicação do melhor ajuste por critérios, a forma da curva estimada pelo Wood linear apresentou pior ajuste do que as curvas estimadas pelos outros modelos. Sendo assim, os autores concluíram que o modelo não linear de Wood descreveu melhor a curva de lactação em comparação com o modelo linear.

Jacopini *et al.* (2016) estudaram o desempenho produtivo, a duração da lactação, o tempo para atingir o pico, a produção de leite no pico e a persistência de vacas da raça Girolando, de diferentes composições genéticas, por meio dos parâmetros da curva de lactação utilizando o modelo de Wood (modelo 5, Tabela 2.1), por meio da abordagem bayesiana. A estimativa do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) para o modelo ajustado foram menores que 0,83 para a primeira lactação e R_{aj}^2 menores que 0,91 para a segunda lactação. Segundo os autores, o modelo Wood forneceu estimativas precisas das características da curva de lactação das vacas, da produção de leite e da duração e persistência da lactação.

Lazzari *et al.* (2013) compararam os modelos Brody; Ragsdale; Turner (modelo 1, Tabela 2.1), Brody; Turner; Ragsdale (modelo 2, Tabela 2.1), Nelder (modelo 4, Tabela 2.1), Wood (modelo 5, Tabela 2.1), Madalena, Martinez e Freitas (1979) (modelo 7, Tabela 2.1), Bianchini Sobrinho (modelo 10, Tabela 2.1), Cobuci (modelo 12, Tabela 2.1) e Papajcsik e Bodero (modelo 11, Tabela 2.1) para verificar qual desses modelos melhor descreve a curva de lactação de vacas da raça Holandesa criadas no Oeste Catarinense. Verificou-se que o modelo Brody; Turner; Ragsdale (1924) não convergiu. Os modelos Madalena, Martinez e Freitas (1979), Bianchini Sobrinho (1984) e Cobuci *et al.* (2000) apresentaram coeficiente de determinação (R^2) abaixo de 0,25. Já os demais modelos apresentaram coeficiente de determinação (R^2) entre 0,93 e 0,95. O modelo Cobuci *et al.* (2000) superestimou a produção de leite nas fase inicial, final e apresentou tendência linear, com pequeno pico logo nas primeiras semanas de lactação. O modelo Papajcsik e Bodero (1988) indicaram subestimação da produção leiteira no início e superestimação da produção no final da lactação. Sendo assim, o modelo que melhor se ajustou foi o Wood (1967).

Pereira *et al.* (2016) exploraram os modelos Nelder (modelo 4, Tabela 2.1), Wood (modelo 5, Tabela 2.1), Bianchini Sobrinho (modelo 10, Tabela 2.1) e Wilmink (modelo 13,

Tabela 2.1) para avaliar quais destes descrevem melhor a produção de leite e estimaram alguns componentes da curva média de lactação de vacas mestiças (*Bos taurus* x *Bos indicus*), criadas na região semiárida do estado de Sergipe. O modelo Nelder (1966) foi o que apresentou o maior $R^2 = 0,90$ e o Wilmink (1987) não se adequou ao conjunto de dados analisados, pois foi a única função com R^2 inferior a 0,65. Os autores frisam que apesar dos modelos Wood (1967) e Bianchini Sobrinho (1984) mostrarem alguns fatores de ajuste, não são condizentes com os rebanhos em questão. Portanto, o modelo Nelder (1966) apresentou bons ajustes para a curva de lactação de vacas mestiças.

2.5 Estimação de parâmetros

Os parâmetros podem ser estimados por diferentes métodos, sendo que o mais utilizado é o método de mínimos quadrados, que consiste em minimizar a soma dos quadrados dos erros em torno da equação de regressão. Para demonstrar esse método, considere o modelo linear simples (ou de primeiro grau) que pode ser representado matricialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times p} \boldsymbol{\beta}_{p \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

O processo de estimação que minimiza a soma de quadrados dos desvios dos n valores observados de Y em relação aos valores preditos \hat{Y} são, matricialmente:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Para encontrar o $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ que minimiza $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, calcula-se a diferencial de $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ em relação a $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Observa-se que:

$$\frac{\partial(\mathbf{Y}'\mathbf{Y})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\frac{\partial(\hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = 2\mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Dai

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}' \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Igualando o resultado a um vetor de zeros, obtém-se o sistema de equações normais:

$$\mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}' \mathbf{Y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{Y})$$

Portanto, esse é o sistema de equações normais linear.

Buscando evidenciar as diferenças envolvidas no processo de estimação, considere agora um modelo de regressão não linear. Este modelo pode ser representado em notação matricial, ficando da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = F(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon},$$

em que:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; F(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} F(X_1, \boldsymbol{\beta}) \\ F(X_2, \boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ F(X_n, \boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Tem-se, então, que $E[\mathbf{Y}] = E[F(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}] = F[(\boldsymbol{\beta})] = F(\boldsymbol{\beta})$. Assim, o resíduo é dado pela diferença entre o valor real e o valor esperado, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - F(\boldsymbol{\beta})$ e o estimador para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ é dado pelo vetor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ que minimiza a soma de quadrados dos resíduos, ou seja,

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{Y} - F(\boldsymbol{\beta})]' [\mathbf{Y} - F(\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}' F(\boldsymbol{\beta}) + F(\boldsymbol{\beta})' F(\boldsymbol{\beta})$$

Esta é uma forma quadrática e tem ponto de mínimo que é obtido derivando-se $S(\boldsymbol{\beta})$ em relação a $\boldsymbol{\beta}$ e igualando-se esta derivada a zero. A derivada fica

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{Y}' \times \frac{\partial F(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial F'(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times F(\boldsymbol{\beta}) + F'(\boldsymbol{\beta}) \times \frac{\partial F(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}},$$

em que $\frac{\partial F(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ é a matriz de primeiras derivadas parciais, também conhecida como matriz jacobiana. O número de colunas dessa matriz está associado ao número de parâmetros do modelo e o número de linhas é determinado pelo número de observações das variáveis independentes (tamanho da amostra). Em um experimento com n observações, considerando um modelo não linear com p parâmetros, a matriz jacobiana terá dimensões $n \times p$ e apresenta a seguinte forma:

$$\frac{\partial F(X, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_1)} & \frac{\partial F(x_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_2)} & \cdots & \frac{\partial F(x_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_p)} \\ \frac{\partial F(x_2, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_1)} & \frac{\partial F(x_2, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_2)} & \cdots & \frac{\partial F(x_2, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F(x_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_1)} & \frac{\partial F(x_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_2)} & \cdots & \frac{\partial F(x_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial (\boldsymbol{\beta}_p)} \end{bmatrix}.$$

Chamando a matriz jacobiana de \mathbf{M} e recordando a propriedade da transposta de matrizes $(A'B)' = B'A$, tem-se:

$$-2Y'M + 2F'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{M}'F(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{M}'Y$$

Este é o sistema de equações normais (SEN) para o modelo não linear. Aqui está a principal diferença no processo de estimação de parâmetros de um modelo linear para um modelo não linear. A matriz \mathbf{M} depende dos parâmetros pela própria definição de modelos não lineares, pois \mathbf{M} é a matriz de derivadas parciais do modelo e, para que este seja classificado como não linear, pelo menos uma de suas derivadas parciais deve depender dos parâmetros. Sendo assim, $F(\boldsymbol{\beta})$ e \mathbf{M} dependem de $\boldsymbol{\beta}$. Desse modo, é impossível obter uma forma fechada para a solução $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, sendo necessária a utilização de métodos de busca numérica para uma aproximação dessa solução (DRAPER; SMITH, 1998).

2.6 Critérios de qualidade de ajuste

A avaliação de qualquer modelo deve ser iniciada com uma consideração minuciosa das estimativas dos parâmetros e deve-se atentar se elas fazem sentido biologicamente (SOUZA *et al.*, 2010). Alcançadas as estimativas para os parâmetros dos modelos, torna-se necessária a escolha de critérios para selecionar os melhores ajustes. Para verificar qual modelo melhor descreve os dados, utiliza-se alguns critérios, os quais são apresentados a seguir.

2.6.1 Coeficiente de determinação ajustado

Para a avaliação do ajuste, pode ser considerado o coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) para o modelo de regressão, que é dado por:

$$R_{aj}^2 = 1 - \left[\frac{(1-R^2)(n-i)}{n-p} \right],$$

em que R^2 é o coeficiente de determinação, n é o número de medições, p é o número de parâmetros e i está relacionado com o ajuste do intercepto da curva, sendo igual a 1 se houver intercepto e igual a 0, se não houver intercepto no modelo.

A inclusão de inúmeras variáveis aumenta o valor de R^2 . Usa-se então o R_{aj}^2 que penaliza a inclusão de regressores pouco explicativos. Os valores de R_{aj}^2 variam entre 0 e 1, indicando o quanto o modelo consegue explicar os dados observados. E quanto maior o valor do R_{aj}^2 melhor o ajuste do modelo.

2.6.2 Critério de informação de Akaike

O critério de informação de Akaike (AIC) é baseado na ideia de estabelecer uma medida corretiva pelo acréscimo de regressores ao modelo (GUJARATI; PORTER, 2011), evitando assim, modelos com excesso de parâmetros. Este critério de seleção é descrito em Akaike (1974) e pode ser definido como:

$$AIC = -2\ln(L(\hat{\theta})) + 2p,$$

em que $L(\hat{\theta})$ é a função de máxima verossimilhança do modelos, \ln é o operador logarítmico natural e p é o número de parâmetros do modelo. Quanto menor o valor de AIC, melhor o ajuste.

2.6.3 Desvio padrão residual

O desvio padrão residual indica a distância média entre as estimativas do modelo e os valores observados. Ele é calculado pela expressão

$$DPR = \sqrt{QME},$$

sendo $QME = \frac{SQR}{n-p}$, no qual QME é o quadrado médio residual, SQR é a soma de quadrados residual, n é o tamanho da amostra e p é o número de parâmetros.

Sousa *et al.* (2014), ressaltam que quanto menor for o desvio padrão residual, melhor será o modelo ajustado.

2.6.4 Medidas de não linearidade

Conforme o tamanho de uma amostra aumenta, Mazucheli e Achcar (2002) ressaltam que os resultados assintóticos vão se tornando mais aplicáveis. Logo o comportamento dos estimadores de mínimos quadrados se aproxima mais do comportamento dos estimadores lineares.

Mazucheli e Achcar (2002) afirmam também que uma distribuição próxima da normal e verdadeiras variâncias próximas daquelas determinadas pela matriz de variâncias-covariâncias assintótica e um pequeno vício implica que os estimadores de mínimos quadrados exibem um comportamento próximo do comportamento linear. As expressões que indicam a adequação de uma aproximação linear e seus efeitos nas inferências são chamadas medidas de não linearidade (BATES; WATTS, 1980).

Sendo assim, quanto maior a aproximação do linear for o comportamento de um modelo, mais relevantes serão os resultados assintóticos e, por consequência, mais confiáveis serão as inferências. Avalia-se a extensão do comportamento não linear por meio de medidas de não linearidade, as quais serão descritas a seguir.

2.6.4.1 Curvaturas de Bates e Watts

Conforme Souza *et al.* (2010), a inferência nos modelos não lineares realiza-se por aproximação em Série de Taylor na região próxima às estimativas e, essa aproximação pode ser declarada boa ou ruim dependendo do delineamento experimental, modelo a ser estudado e conjunto de dados.

Bates e Watts (1980) quantificaram a não linearidade empregando o conceito geométrico de curvatura. Essa medida independe de mudanças de escala nos parâmetros ou nos dados e podem ser utilizadas na comparação de diferentes modelos (SEBER; WILD, 1989).

As medidas de não linearidade de Bates e Watts podem ser divididas em duas componentes: a não linearidade intrínseca (c^l) e a não linearidade devido ao efeito de parâmetros (c^θ). A c^l é a não linearidade característica do modelo e mede a falta de planicidade da superfície esperada, gerada pelo modelo na vizinhança do local da solução de mínimos quadrados e não se altera devido à reparametrização do modelo. A c^θ representa o valor máximo do efeito da parametrização da não linearidade do modelo.

Para determinar o impacto da não linearidade sob uma região de confiança particular, a curvatura escalada poderia ser relacionada com $\frac{1}{\sqrt{F_{(p,n-p);\alpha}}}$, em que $F_{(p,n-p)}$ se refere ao quantil

da distribuição F , que pode ser verificada como o raio da curvatura para região de confiança $100(1 - \alpha)\%$. Suponha que para todas as direções a medida de não linearidade intrínseca é pequena comparado com $\frac{1}{\sqrt{F_{(p,n-p;\alpha)}}}$, logo, o local da solução é relativamente plano sobre o disco da região de confiança e, conseqüentemente, pode-se utilizar a pressuposição planar com razoável segurança. Se a medida de não linearidade paramétrica é pequena comparada com $\frac{1}{\sqrt{F_{(p,n-p;\alpha)}}}$, então, a pressuposição de coordenadas uniformes é ideal sobre a região de interesse (SOUZA *et al.*, 2010).

2.6.4.2 Vício de Box

Box (1971) propôs uma fórmula que tinha como objetivo estimar o vício dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo não linear univariado dada por: $V(\hat{\beta}) = -\frac{\sigma^2}{2}(G'G)^{-1}F'd$, em que $V(\hat{\beta})$ representa a diferença entre o vetor de estimativas e dos valores paramétricos, G é a matriz jacobiana e H a matriz das derivadas do modelo $f(\beta, x_i)$ com relação aos parâmetros $(\hat{\beta})$, da seguinte maneira: $F_{n \times p} = \frac{\partial f(\beta, x_i)}{\partial \beta_j}$ e $H_{n \times p} = \frac{\partial^2 f(\beta, x_i)}{\partial \beta_j \partial \beta_j}$, com $i = 1, K, n$ e $j = 1, K, p$, sendo d um vetor de traços obtidos por $d_i = tr[(G'G)^{-1}H_i \dots]$. Usualmente, são substituídas as estimativas $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\beta}$ pelos parâmetros desconhecidos.

Na avaliação de modelos não lineares, conforme ressaltam Zeviani *et al.* (2012), é mais apropriado calcular as estimativas dos vícios em termos percentuais da estimativa, ou seja, $\%V(\hat{\beta}) = \frac{100 \cdot V(\hat{\beta})}{\hat{\beta}}$, e reiteram que valores de $\%V(\hat{\beta})$ acima de 1%, em valor absoluto, indicam comportamento não linear. O interesse em se avaliar o vício trata-se de indicar quais parâmetros do modelo mais auxiliam para o afastamento do comportamento linear.

2.7 Métodos iterativos

Como o SEN não linear não possui solução explícita para estimação dos parâmetros, as estimativas são obtidas por meio de métodos iterativos. Nesses métodos fazem aproximações lineares para a função $F(X, \beta)$ partindo de valores iniciais β^0 e melhorando até que algum critério de parada, pré estabelecido, seja atingido. Dessa forma a obtenção das estimativas dos parâmetros em modelos não lineares é bem mais trabalhosa do que em modelos lineares, dificultando inclusive a obtenção de intervalos de confiança para os valores preditos, uma vez que estes são obtidos apenas de maneira assintótica. Portanto, é preciso analisar a não linearidade presente nos modelos utilizados para descrever as curvas de lactação, pois quanto mais próximo do linear estiver um modelo não linear, mais confiáveis são as estimativas dos

parâmetros. Para modelos de regressão não lineares, os algoritmos na maioria das vezes não alcançam uma solução exata, mas criam uma sequência de pontos cujo limite converge ao ponto ótimo (FRITZSCHE, 1978).

Vários processos iterativos são apresentados na literatura e os mais utilizados são Gauss-Newton, Newton, Gradiente e o método Marquardt, os quais utilizam as derivadas parciais da função esperança em relação a cada parâmetro. Bates e Watts (1988) os diferenciam pela forma como a distância entre o parâmetro e o valor inicial é estimado $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0$ para assegurar as atualizações no vetor parâmetro. Lima (2016) apresenta um exemplo dos critérios básicos:

- Gauss-Newton: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = (X'X)^{-1}X'\boldsymbol{\varepsilon}$;
- Newton: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = J^{-1}X'\boldsymbol{\varepsilon}$, em que J é a inversa da matriz gradiente;
- Gradiente: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = X'\boldsymbol{\varepsilon}$;
- Marquardt: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0 = [X'X + \delta \text{diag}(X'X)^{-1}]^{-1}X'\boldsymbol{\varepsilon}$ em que $(X'X)^{-}$ é matriz inversa generalizada.

O algoritmo de Gauss-Newton é o método mais utilizado e usa a expansão da série de Taylor de primeira ordem. Portanto, assume-se que $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é uma aproximação para $\boldsymbol{\beta}$ por mínimos quadrados para um modelo não linear quando algum critério de parada for atingido como, por exemplo, atingir um certo número pré-determinado de iterações, as atualizações nos parâmetros serem insignificantes ou a modificação da soma de quadrados dos resíduos for desprezível. Estes critérios podem ser controlados pelo pesquisador.

É necessário ressaltar que, mesmo estipulando critérios de parada, em qualquer um desses métodos, a convergência não é garantida e deve-se também tomar cuidado, pois o algoritmo poderá convergir para mínimos locais. A qualidade dos valores iniciais está ligada a resultados de estudos anteriores ou à própria experiência do pesquisador.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Foram utilizados dados de 165 lactações de 89 vacas 3/4 Holandesa + 1/4 Gir criadas em sistema de produção de leite a pasto com suplementação. Cabe ressaltar que neste plantel as vacas tiveram número de lactações diferentes, por exemplo, algumas podem ter tido só uma lactação e outras três ou mais lactações.

As pesagens mensais do leite foram realizadas entre novembro de 2012 até fevereiro de 2018 na Fazenda Santa Lúcia, localizada no município de São Simão – SP. Foi caracterizado como lactação quatro pesagens em meses sequenciais, totalizando 16 pesagens. As pesagens foram realizadas em uma fazenda particular, com isso, informações de algumas vacas foram perdidas, por exemplo, pode ser que o animal tenha sido vendido, ou seja, só foram caracterizados como lactação as pesagens das vacas que totalizaram as 16 observações completas. Calculou-se a média de produção de 20 em 20 dias de lactação até os 310 dias de lactação.

3.1 Classificação dos modelos

Para analisar o comportamento das curvas de lactação, trabalhou-se com os modelos da Tabela 2.1. Derivou-se parcialmente cada modelo em relação aos seus parâmetros, e assim classificou-os linear e não linear. Com isso, descreveu-se a curva de lactação de cada modelo, e discutiu-se a qualidade de ajuste de cada grupo. Para estimar os parâmetros dos modelos lineares utilizou-se o pacote *lmtree* e para os modelos não lineares o pacote *nlme*, pacotes estes do software estatístico R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2020).

A avaliação da qualidade de ajuste obtida pelos modelos em estudo foi realizada com base nos seguintes critérios: coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) para isso utilizou-se o pacote *qpcR* do software R ; critério de informação de Akaike (AIC); desvio padrão residual, curvaturas de Bates e Watts e vício de box (pacote *IPEC*) que medem a não linearidade do modelo, e também analisou-se os resíduos de cada modelo e foram construídos intervalos de confiança para os modelos mais adequados na descrição das curvas de lactação da raça Girolando. Para a análise de resíduos, ou seja, para verificar os pressupostos de normalidade, homogeneidade e independência dos modelos foram usados os testes de Shapiro-Wilk (*shapiro.test*), Breuch-Pagan (*bptest*) e Durbin-Watson (*durbinWatsonTest*), respectivamente com suas funções no R, ao nível de 1% de significância.

3.2 Estimação dos parâmetros

Na estimação dos parâmetros dos modelos foi utilizado o algoritmo de convergência de Gauss-Newton ou método de linearização, no qual utiliza-se uma expansão da série de Taylor para aproximar o modelo de regressão não linear com termos lineares e, então aplica-se o método dos mínimos quadrados ordinários para a estimação dos parâmetros.

Como, na maioria dos métodos iterativos, o primeiro passo consiste em atribuir valores iniciais para o vetor dos parâmetros, estes foram obtidos com base em uma pesquisa na literatura com estimativas obtidas para curvas de lactação de outras raças.

3.3 Análise de resíduos

Para verificar a adequabilidade do modelo, realizou-se a análise de resíduos. Estas análises foram feitas por meio dos testes estatísticos de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson para verificar os pressupostos de normalidade, homocedasticidade e independência, respectivamente.

Para analisar a normalidade do vetor de resíduos foi utilizado o teste de Shapiro-Wilk, em que as hipóteses utilizadas no teste são:

H_0 : Os resíduos apresentam distribuição normal;

H_1 : Os resíduos não apresentam distribuição normal.

Para observar o pressuposto de independência, isto é, se existe presença de autocorrelação residual, utilizou-se o teste de Durbin-Watson, em que as hipóteses testadas são:

H_0 : Os resíduos são independentes;

H_1 : Os resíduos apresentam autocorrelação.

Para verificar o pressuposto de homogeneidade de variância, trabalhou-se com o teste de Breusch-Pagan, as hipóteses utilizadas são:

H_0 : Existe homogeneidade nas variâncias residuais;

H_1 : Não existe homogeneidade nas variâncias residuais.

Este teste segue uma distribuição de qui-quadrado e o valor calculado é comparado com a tabela desta distribuição, considerando 1 grau de liberdade.

3.4 Intervalos de confiança

Conforme Rencher e Schaalje (2008), como propriedade de estimadores de um modelo linear tem-se que:

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'Y] = (X'X)^{-1}X'E(Y) = (X'X)^{-1}X'X\beta = \beta$$

$$V(\hat{\beta}) = V[(X'X)^{-1}X'Y] = (X'X)^{-1}X'V(Y)X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}X'I\sigma^2X(X'X)^{-1} = \\ (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}\sigma^2 = (X'X)^{-1}\sigma^2,$$

em que I é a matriz identidade, X é a matriz de derivadas parciais de primeira ordem do modelo linear e σ^2 é estimado por

$$\hat{\sigma}^2 = QME = \frac{SQE}{n-p} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p},$$

Assim a estimativa de $V(\hat{\beta})$ é dada por

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}QME.$$

Sob a suposição de normalidade dos resíduos, torna-se possível construir intervalos de confiança para os parâmetros. De acordo com Draper e Smith (1998), com $j = 1, \dots, p$ em que p é o número de parâmetros, define-se o intervalo de 95% de confiança para o parâmetro β_j do modelo linear como:

$$IC(\beta_j) = \hat{\beta}_j \pm t_{(n-p, \alpha/2)} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)},$$

em que $\hat{\beta}_j$ é a estimativa do j-ésimo parâmetro, $t_{(n-p, \alpha/2)}$ é o quantil superior da distribuição t de Student e $\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)}$ é a raiz quadrada do valor na posição (j,j) da diagonal principal de uma matriz de variâncias-covariâncias.

Outro intervalo de confiança de interesse é para os valores estimados pelo modelo. Ao calcular o valor de Y correspondente a um determinado valor de X, tem-se o par (x_0, y_0) , e o intervalo de confiança para y_0 é dada por:

$$IC(y_0) = x_0' \hat{\beta}_j \pm t_{(n-p, \alpha/2)} \sqrt{x_0'(X'X)^{-1}x_0 QME},$$

Já para os modelos de regressão não linear, pelo teorema do limite central e atendendo algum requisito de regularidade, Seber e Wild (1989) mostram que o intervalo de confiança para algum parâmetro β_j pode ser dado por:

$$IC(\beta_j) = \hat{\beta}_j \pm t_{(n-p, \alpha/2)} \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)},$$

$V(\hat{\beta}_j)$ é estimado por:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_j) = (M'M)^{-1} QME$$

em que $\hat{\beta} \sim N(\beta, M_0^{-1} \sigma^2)$ e M é a matriz jacobiana calculada com as estimativas dos parâmetros $(\hat{\beta})$.

Portanto, o intervalo de confiança para β_j é dado por:

$$IC(\beta_j) = \hat{\beta}_j \pm t_{(n-p, \alpha/2)} \sqrt{(M'M)^{-1} \sigma^2}.$$

Ainda de acordo com Seber e Wild (1989), em um modelo de regressão não linear o intervalo de confiança para um valor estimado \hat{y}_0 , estimadas para o valor x_0 é dado por:

$$IC(\hat{y}_0) = \hat{y}_0 \pm t_{(n-p, \alpha/2)} \sqrt{g_0' (M'M)^{-1} QME g_0},$$

em que g_0 indica a linha da matriz gradiente M correspondente a observação x_0 .

Segundo Zeviani *et al.* (2012), estes intervalos são simples ampliações dos aplicados a modelos lineares que se fundamentam em um tamanho de amostra razoavelmente grande e em uma adequada aproximação linear.

Todos os métodos inferenciais para modelos não lineares possibilitam suposição de adequada aproximação linear e ainda fazem uso de propriedades assintóticas (ZEVIANI *et al.*, 2012). Em estudos de curvas de lactação, na maioria das vezes, se analisam amostras pequenas, no qual tais pressuposições podem não ser satisfeitas. Portanto o estudo dessas propriedades é vantajoso, pois permite avaliar o quão adequadas são as pressuposições estabelecidas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente foram obtidas as derivadas parciais em relação aos parâmetros dos modelos. Aqueles modelos cujas derivadas parciais não dependeram de nenhum parâmetro foram classificados como lineares e estão apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Modelos lineares no estudo de curvas de lactação.

modelos	autor
1. $Y = a + bt - ct^2 + \varepsilon$	Dave (1971)
2. $Y = a - ct + \varepsilon$	Madalena, Martinez e Freitas (1979)
3. $Y = a - bt + c \ln(t) + \varepsilon$	Singh e Gopal (1982)
4. $Y = a + bt + ct^2 + d \ln(t) + \varepsilon$	Singh e Gopal (1982)
5. $Y = a + bt + ct^{-1} + \varepsilon$	Bianchini Sobrinho (1984)
6. $Y = a - ct + \ln(t) + \varepsilon$	Cobuci <i>et al.</i> (2000)

Conforme apresenta a Tabela 4.1 os modelos de curvas de lactação classificados como lineares totalizaram em seis modelos. A Tabela 4.2 mostra os modelos em que pelo menos uma das derivadas em relação aos parâmetros dependeram de parâmetros e que portanto, foram classificados como não lineares.

Tabela 4.2 – Modelos não lineares no estudo de curvas de lactação.

modelos	autor
1. $Y = a \exp(-ct) + \varepsilon$	Brod, Ragsdale e Turner (1923)
2. $Y = a \exp(-bt) - a \exp(-ct) + \varepsilon$	Brody, Turner e Ragsdale (1924)
3. $Y = a \exp(bt - ct^2) + \varepsilon$	Sikka (1950)
4. $Y = t / (a + bt + ct^2) + \varepsilon$	Nelder (1966)
5. $Y = at^b \exp(-ct) + \varepsilon$	Wood (1967)
6. $Y = at \exp(-ct) + \varepsilon$	Papajcsik e Boderó (1988)
7. $Y = a + bt + c \exp(-dt) + \varepsilon$	Wilmink (1987)
8. $Y = a \left(\frac{1}{1 + (\frac{b}{c+t})} \right) \exp(-dt) + \varepsilon$	Rook, France e Dhanoa (1993)
9. $Y = a \exp\left(\left[\frac{b(1 - \exp(-ct))}{c} - dt\right]\right) + \varepsilon$	Dijkstra <i>et al.</i> (1997)
10. $Y = at^{bc} \exp(-ct) + \varepsilon$	Dhanoa (1981)
11. $Y = at^{b \exp(-ct)} + \varepsilon$	Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995)

Nota-se na Tabela 4.2 que onze modelos foram classificados como não lineares para o estudo das curvas de lactação. Cabe ressaltar que em algumas áreas é comum linearizar os modelos para facilitar a obtenção das estimativas dos parâmetros, mas em sua maioria isso é feito de forma errada, pois lineariza-se modelos em que o erro não é multiplicativo, como por exemplo, pode ser observado nas análises de Daltro *et al.* (2018).

Na Tabela 4.3 é apresentada a análise de resíduos realizada pelos testes Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, considerando-se um nível de significância de 1%.

Tabela 4.3 – Testes Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos dos modelos ajustados.

Modelos	Testes			
	Lineares	Shapiro-Wilk	Durbin-Watson	Breusch-Pagan
Dave (1971)		0,0784	0,3080	0,9299
Madalena, Martinez e Freitas (1979)		0,1837	0,1660	0,1828
Singh e Gopal (1982)		0,0164	0,0800	0,6224
Singh e Gopal (1982)		0,0114	0,0940	0,7278
Bianchini Sobrinho (1984)		0,2012	0,6360	0,6293
Cobuci <i>et al.</i> (2000)		0,0157	0,1960	0,1828
Não Lineares	Shapiro-Wilk	Durbin-Watson	Breusch-Pagan	
Brody, Ragsdale e Turner (1923)	0,1648	0,0620	0,2523	
Brody; Turner; Ragsdale (1924)	0,3536	0,3340	0,4586	
Sikka (1950)	0,0445	0,1440	0,8548	
Nelder (1966)	0,4309	0,2920	0,7638	
Wood (1967)	0,0842	0,3160	0,7583	
Papajcsik e Boderó (1988)	0,0123	0,0000	0,2254	
Wilmink (1987)	0,0434	0,0460	0,7853	
Rook, France e Dhanoa (1993)	0,0597	0,0800	0,7646	
Dijkstra <i>et al.</i> (1997)	0,0804	0,0840	0,6869	
Dhanoa (1981)	0,0842	0,3200	0,7583	
Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995)	0,6356	0,1000	0,1923	

Observou-se que os testes foram não significativos ao nível de significância de 1% (valor-p > 0,01) para quase todos os modelos de curvas de lactação, com exceção do modelo

Papajcsik e Bodero (1988), isto é, todos os outros modelos não apresentaram problemas de violação de pressupostos de resíduo, indicando que os resíduos apresentaram normalidade, variâncias constante e são independentes. Com isso, há a necessidade de modelar a autocorrelação, e incorporá-la ao modelo de Papajcsik e Bodero (1988), mas como não é o objetivo deste trabalho, a incorporação de um parâmetro autorregressivo não foi realizada.

Os avaliadores de qualidade de ajuste para os modelos lineares em estudo são apresentados na Tabela 4.4. Esta Tabela apresenta os valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), os valores do desvio padrão residual (DPR) e os valores do critério de informação de Akaike (AIC).

Tabela 4.4 – Valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), do desvio padrão residual (DPR), do critério de informação de Akaike (AIC) dos modelos lineares estudados.

Modelo	(R_{aj}^2)	DPR	AIC
Dave (1971)	0,9451	0,3801	19,1302
Madalena, Martinez e Freitas (1979)	0,8985	0,5168	28,4652
Singh e Gopal (1982)	0,9533	0,3507	16,5557
Singh e Gopal (1982)	0,9509	0,3595	18,0698
Bianchini Sobrinho (1984)	0,9429	0,3878	19,7753
Cobuci <i>et al.</i> (2000)	0,9597	0,3382	14,5801

De acordo com a Tabela 4.4, os valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) para quase todos os modelos foram superiores a 0,94. Pereira *et al.* (2016) encontraram um valor de (R_{aj}^2) igual a 0,86 para o modelo Bianchini Sobrinho (1984) no cruzamentos das raças Bos taurus x Bos indicus. O modelo linear com maior (R_{aj}^2) foi o modelo Cobuci *et al.* (2000). O modelo Cobuci *et al.* (2000) apresentou o menor valor de desvio padrão residual (DPR) e também o menor valor do critério de informação de Akaike (AIC).

Como este modelo é um modelo de regressão linear, as medidas de não linearidade são iguais a zero, pois elas medem a aproximação do modelo não linear do modelo linear. Portanto, o modelo Cobuci *et al.* (2000) é o modelo linear mais adequado para descrever as curvas de lactação da raça Girolando.

Na Tabela 4.4 ainda pode ser observado que o modelo Madalena, Martinez e Freitas (1979) apresentou R_{aj}^2 de 0,89, um dos motivos desse valor ter sido menor é que a expressão do modelo corresponde a uma reta decrescente, que não é o padrão de uma curva de lactação,

resultado parecido foi encontrado por Torquato, El Faro e Mascioli (2017) em que a curva de lactação não apresentou pico para as fêmeas filhas de boi Gir, da raça 1/2 HG. Lazzari *et al.* (2013) salientam que também em raças zebuínas, a curva de lactação tende a não apresentar pico ou, quando apresenta, ele ocorre logo nas primeiras semanas.

De acordo com a Tabela 4.5, os modelos Wilmink (1987), Rook, France e Dhanoa (1993) e Dijkstra *et al.* (1997) possuem valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2) acima de 0,95. Sendo que os modelos não lineares com maior (R_{aj}^2) foram os modelos Wilmink (1987) e Rook, France e Dhanoa (1993). O modelo Wilmink (1987) apresentou menor valor de desvio padrão residual (DPR) e quanto ao critério de informação de Akaike (AIC) o modelo Sikka (1950) apresentou o menor valor. Considerando somente os avaliadores de qualidade de ajuste R_{aj}^2 , DPR e AIC o modelo Wilmink (1987) seria o modelo mais adequado para descrever as curvas de lactação da raça Girolando. Daltro *et al.* (2019) obtiveram resultados diferentes no ajuste do modelo Wilmink (1987) para a raça 3/4 Holandês + 1/4 Gir, sendo que o R_{aj}^2 foi de 0,57 e AIC foi de 143,37. Já Pereira *et al.* (2016) encontraram R_{aj}^2 de 0,65 para o cruzamentos das raças Bos taurus x Bos indicus.

Daltro *et al.* (2019) também utilizaram o modelo Wood (1967) para estimar a curva de lactação da raça 3/4 Holandês + 1/4 Gir e encontraram um R_{aj}^2 de 0,57 e AIC de 142,86, Jacopini *et al.* (2016) também trabalharam com o mesmo modelo e a mesma raça e verificaram o valor de R_{aj}^2 igual a 0,76 para vacas de primeira lactação e de 0,91 para vacas de segunda lactação.

Tabela 4.5 – Valores do coeficiente de determinação ajustado (R_{aj}^2), do desvio padrão residual (DPR), do critério de informação de Akaike (AIC) e das medidas de não linearidade intrínseca (c^l) e paramétrica (c^θ) dos modelos não lineares estudados.

Modelo	R_{aj}^2	DPR	AIC	c^l	c^θ
Brody, Ragsdale e Turner (1923)	0,8715	0,5690	31,2246	0,0075	0,0214
Brody, Turner e Ragsdale (1924)	0,9121	0,4737	26,1748	0,0114	0,3407
Sikka (1950)	0,9493	0,3666	17,9716	0,0065	0,0324
Nelder (1966)	0,9109	0,4698	25,9104	0,0129	0,0497
Wood (1967)	0,9479	0,3682	18,1157	0,0064	0,3485
Papajcsik e Boderó (1988)	0,7250	4,1490	94,8027	0,0685	0,2636
Wilmink (1987)	0,9512	0,3584	17,9722	0,2884	5,9632
Rook, France e Dhanoa (1993)	0,9512	0,3585	17,9802	0,2857	71,6451
Dijkstra <i>et al.</i> (1997)	0,9510	0,3589	18,0148	0,2333	10,0834
Dhanoa (1981)	0,9479	0,3682	18,1157	0,0065	0,6584
Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995)	0,8736	0,5661	31,8791	0,0320	0,6941

No entanto, conforme destacado por autores como Souza *et al.* (2010), Fernandes *et al.* (2015) e Diel *et al.* (2018) quando estuda-se modelos não lineares é preciso avaliar as suas medidas de não linearidade. As medidas de não linearidade intrínseca (c^l) e paramétrica (c^θ) para cada modelo também são apresentadas na Tabela 4.5. O modelo Wood (1967) apresentou o menor valor de c^l e o modelo Brody, Ragsdale e Turner (1923) o menor valor de c^θ , conforme sustentam Fernandes *et al.* (2015) valores mais baixos de medidas de não linearidade indicam melhores ajustes dos modelos, pois são obtidas estimativas mais confiáveis.

Observa-se também que os modelos Rook, France e Dhanoa (1993) e Dijkstra *et al.* (1997) apresentaram medidas de não linearidade paramétrica (c^θ) com valores muito altos, evidenciando que esses modelos indicam que a confiabilidade nas estimativas dos parâmetros é baixa. Um dos motivos disso acontecer pode ser explicado ou pela disposição com o qual os parâmetros exibidos no modelo é inadequada ou o modelo não é adequado para este conjunto de dados (SOUZA *et al.*, 2010), sugerindo que uma possível reparametrização destes modelos possa ser mais eficiente.

A Tabela 4.6 apresenta os valores do Vício de Box para os parâmetros dos modelos não lineares estudados. Foi possível perceber que o vício de Box apresentou-se maior para

os modelos com maior número de parâmetros, conforme Gazola *et al.* (2017) quanto maior o vício do parâmetro, maior o afastamento da linearidade. O modelo que apresentou menores valores de vício de Box para os modelos com dois parâmetros foi o modelo Brody, Ragsdale e Turner (1923), já para os modelos com três parâmetros foi o modelo Wood (1967). No entanto, considerando os critérios de qualidade de ajuste apresentados na Tabela 4.5, o modelo Wood apresentou melhores resultados para o R^2_{aj} , DPR e AIC que o modelo Brody, Ragsdale e Turner (1923).

Tabela 4.6 – Vício de Box para os parâmetros dos modelos não lineares estudados.

Modelo	Parâmetros	Vício de Box (%)
Brody, Ragsdale e Turner (1923)	a	0,0082
	c	0,0112
Brody, Turner e Ragsdale (1924)	a	0,0170
	b	2,7328
	c	0,0395
Sikka (1950)	a	0,0041
	b	1,4700
	c	0,1129
Nelder (1966)	a	0,6676
	b	-0,0133
	c	0,0791
Wood (1967)	a	0,0983
	b	0,1595
	c	0,0548
Papajcsik e Bodero (1988)	a	1,0497
	c	0,1492
Wilmink (1987)	a	4,4188
	b	10,6959
	c	32,2683
	d	11,7361
Rook, France e Dhanoa (1993)	a	104,5155
	b	440,4375
	c	54,3237
	d	35,4299
Dijkstra <i>et al.</i> (1997)	a	-0,3963
	b	27,2158
	c	8,6453
	d	24,9551
Dhanoa (1981)	a	0,0983
	b	-0,9309
	c	0,0548
Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995)	a	-0,3117
	b	1,3215
	c	1,8179

Analisando os resultados dos critérios de qualidade de ajuste, o melhor modelo para descrever a curva de lactação seria o modelo Wilmink (1987), mas levando em consideração as medidas de curvatura de Bates e Watts e vício de Box o melhor modelo para descrever a curva de lactação seria o Wood (1967). Segundo Mazucheli e Achcar (2002) a medida de vício de Box e as medidas de curvatura de Bates e Watts são os recursos mais utilizados na avaliação da não linearidade de um modelo de regressão não linear. Ratkowsky (1983) salienta que essas medidas podem também ser utilizadas em problemas de discriminação, sendo que o melhor modelo possível, dentre todos os estudados, pode ser considerado como aquele que apresenta o comportamento mais próximo do comportamento linear. Sendo assim, as medidas de curvatura e Vício de Box apontaram que o modelo Wood (1967) é o mais adequado para descrever a curva de lactação da raça Girolando.

A maioria dos trabalhos sobre curvas de lactação encontrados na literatura utilizam como critérios de qualidade de ajuste R^2 , R_{aj}^2 , AIC e BIC, por exemplo, Jacopini *et al.* (2016) utilizaram como critério somente o R_{aj}^2 , Daltro *et al.* (2018) e Zadeh (2019) testaram os modelos de curvas de lactação pelos critérios de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC) e raiz do erro médio quadrático (RMSE), além disso Zadeh (2019) utilizou também R^2 . Na literatura os trabalhos que estudam curvas de lactação não se preocupam com a não linearidade presente nestes modelos, assim acabam por selecionar via R^2 por exemplo, modelos cujas estimativas de parâmetros não são confiáveis. Logo, este trabalho mostra que é de suma importância utilizar as medidas de não linearidade na seleção do modelo mais adequado para descrever a curva de lactação.

Na literatura, o modelo Wood (1967) é utilizado para descrever a curva de lactação em outras raças bovinas, tais como, Holandesa, Guzerá, Caracú, Holandês x Guzerá, Holandês x Nelore, Holandês x Azebuado, Taurino X Zebu, e também em búfalos e em caprinos. Já o modelo Cobuci *et al.* (2000) é usado para caracterizar as curvas de lactação das raças Guzerá e Holandesa.

Os trabalhos de Lazzari *et al.* (2013) e Cobuci *et al.* (2000) compararam os ajustes dos modelos Cobuci *et al.* (2000) e Wood (1967) para as raças Holandesa e Guzerá respectivamente, sendo que o modelo Wood (1967) obteve R^2 de 0,95 e se ajustou melhor para a raça Holandesa e o modelo Cobuci *et al.* (2000) para a raça Guzerá.

Conforme destacado por diversos autores que estudam modelos não lineares Fernandes *et al.* (2019); Silva *et al.* (2020); Jane *et al.* (2020); Rezende *et al.* (2020), esta classe de

modelos tem como característica possuir interpretação prática dos parâmetros, logo tem -se as estimativas para o modelo Wood (1967), nas quais a produção de leite no início da lactação (parâmetro a) foi 13,91 kg, a fase de elevação da produção de leite no início da lactação (parâmetro b) foi de 0,07 e a fase de declínio na produção de leite após o pico (parâmetro c) foi de 0,01. Daltro *et al.* (2019) encontraram para a mesma raça os seguintes valores de parâmetros $a= 14,04$, $b= 0,25$ e $c= 0,03$, já Jacopini *et al.* (2016) obtiveram os parâmetros para a primeira lactação da raça 3/4 Holandês + 1/4 Gir $a= 10,89$, $b= 0,16$ e $c= 0,003$ e para a segunda lactação $a= 14,49$, $b= 0,12$ e $c= 0,003$.

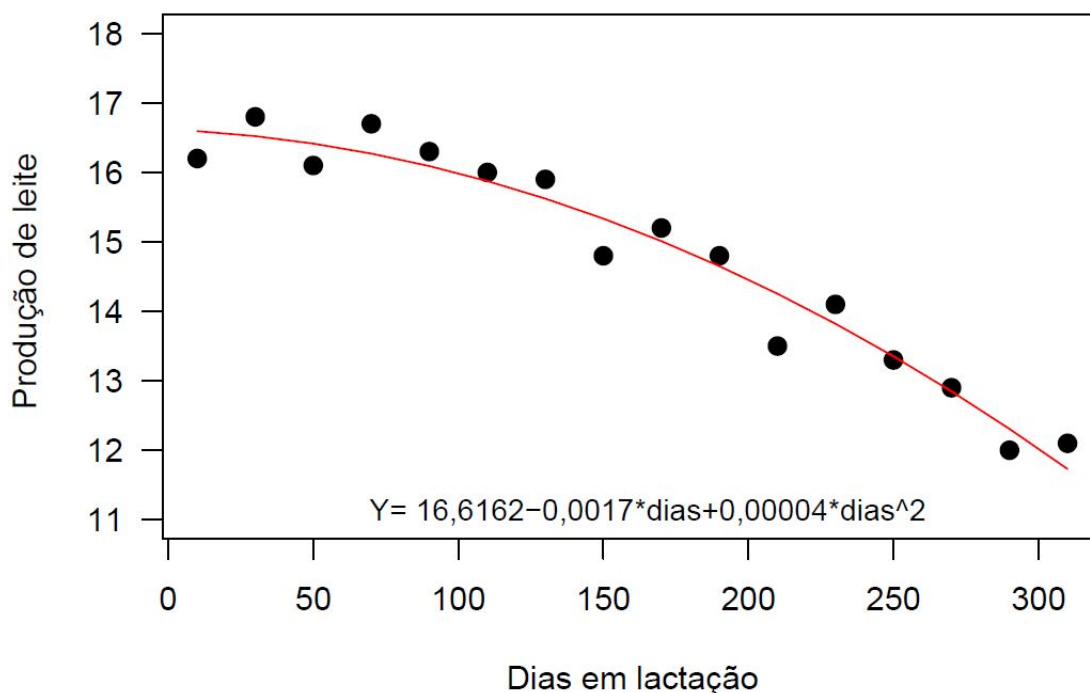
Com base nas estimativas do modelo Wood, segundo Glória *et al.* (2010) é possível estimar também o pico de lactação ($p = a(\frac{b}{c})^b \exp(-b)$), o tempo do pico ($d = \frac{b}{c}$) e a persistência ($P = -(b + 1)\ln(c)$). Sendo assim, o pico foi de 18,21 kg, o tempo de pico deu-se aproximadamente no quadragésimo dia e a persistência foi de 6,80. Gonçalves *et al.* (2002) reportaram tempo de pico de aproximadamente 37 dias para a raça Holandesa e pico de 24,8 kg, Jacopini *et al.* (2016) obtiveram resultados parecidos para vacas da raça Girolando do grupo genético $\frac{3}{4}$ Holandês + $\frac{1}{4}$ Gir de primeira lactação, sendo que o pico foi de 17,13 kg, o tempo de pico deu-se aproximadamente no quadragésimo nono dia e a persistência foi de 6,66. Rekik *et al.* (2003) obtiveram persistência de 6,81 para vacas da raça Holandesa. Cruz, Ribeiro e Pimenta (2009) verificaram valores de persistência de 6,13 e 6,17 para vacas da raça Sindi e Guzerá respectivamente.

Embora o modelo linear não possua parâmetros com interpretação prática, o pico de produção e o dia do pico podem ser facilmente obtidos por derivada. Isto é, o pico da produção de leite é o ponto de máximo da curva de lactação. Derivando o modelo Cobuci *et al.* (2000) em relação a t , obtém-se $f(t) = \frac{1}{t} - c$, igualando a zero e substituindo o valor da estimativa do parâmetro $c = 0,025$ tem-se que o dia do pico ocorreu aproximadamente no quadragésimo dia. Assim, substituindo na expressão do modelo de Cobuci *et al.* (2000), o pico resulta em 12,90 kg. Portanto, se o objetivo for apenas a qualidade do ajuste e a capacidade preditiva do modelo, pode ser que um modelo linear, cujos parâmetros são estimados mais facilmente e com propriedades ótimas seja suficiente.

Nas Figuras 4.1 a 4.6 estão ilustrados os gráficos dos ajustes das curvas de lactação dos modelos lineares. Para as Figuras dos modelos Sigh e Gopal (1982) (Figuras 4.3 e 4.4), Bianchini Sobrinho (1984) (Figura 4.5) e Cobuci *et al.* (2000) (Figura 4.6) é possível identificar uma curva mais achatada com um pico de lactação mais acentuado. Nota-se também que esses

gráficos ficaram melhor ajustados, porque esses três modelos obtiveram melhores critérios de qualidade de ajustes (R_{aj}^2 , AIC e DPR) em relação aos outros modelos lineares. O modelo linear Dave (1971) (Figura 4.1) possui um formato de uma curva de lactação mais plana e um pico de lactação menos acentuado, já o modelo Madalena, Martinez e Freitas (1979) (Figura 4.2) não possui formato de uma curva de lactação e com isso não é possível identificar o elemento pico de lactação, por isso a sua baixa qualidade de ajuste.

Figura 4.1 – Modelo linear Dave (1971) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.



Observa-se na Figura 4.2 mostra um modelo linear com o parâmetro b negativo, assim, o maior valor predito pelo modelo é no valor inicial, isto é, no 0, logo o pico de lactação seria no valor inicial, ou seja, quando a vaca cria. Uma interpretação prática para esse modelo seria que a cada dia que passa a produção de leite cai 0,062 Kg.

Figura 4.2 – Modelo linear Madalena, Martinez e Freitas (1979) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

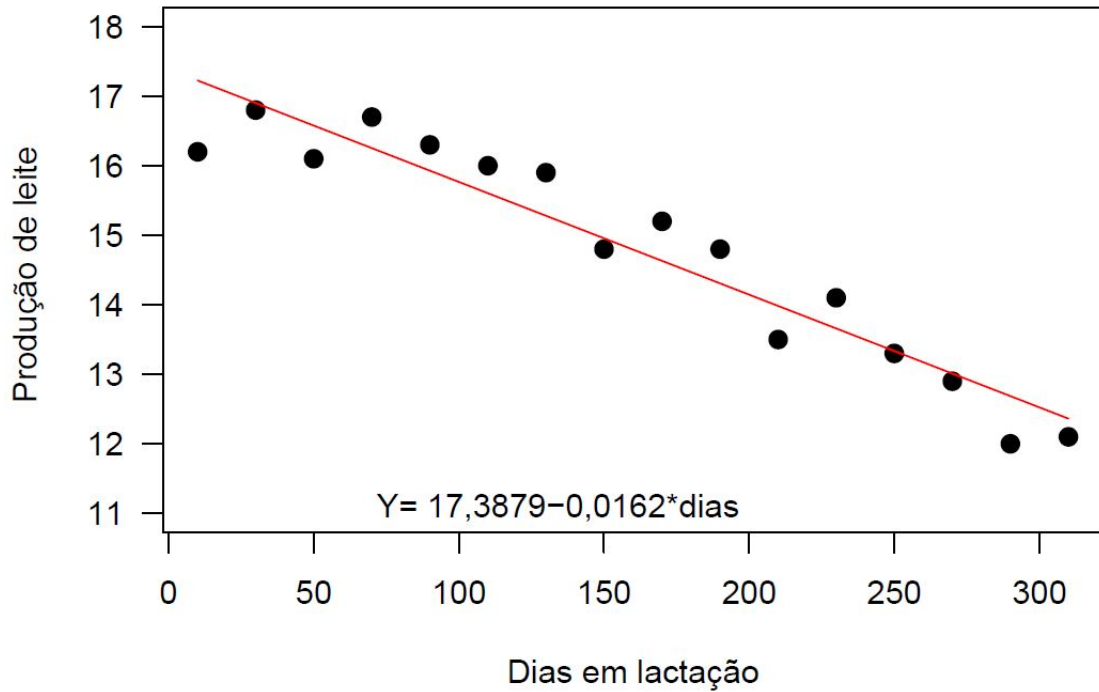


Figura 4.3 – Modelo linear Sigh e Gopal (1982) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

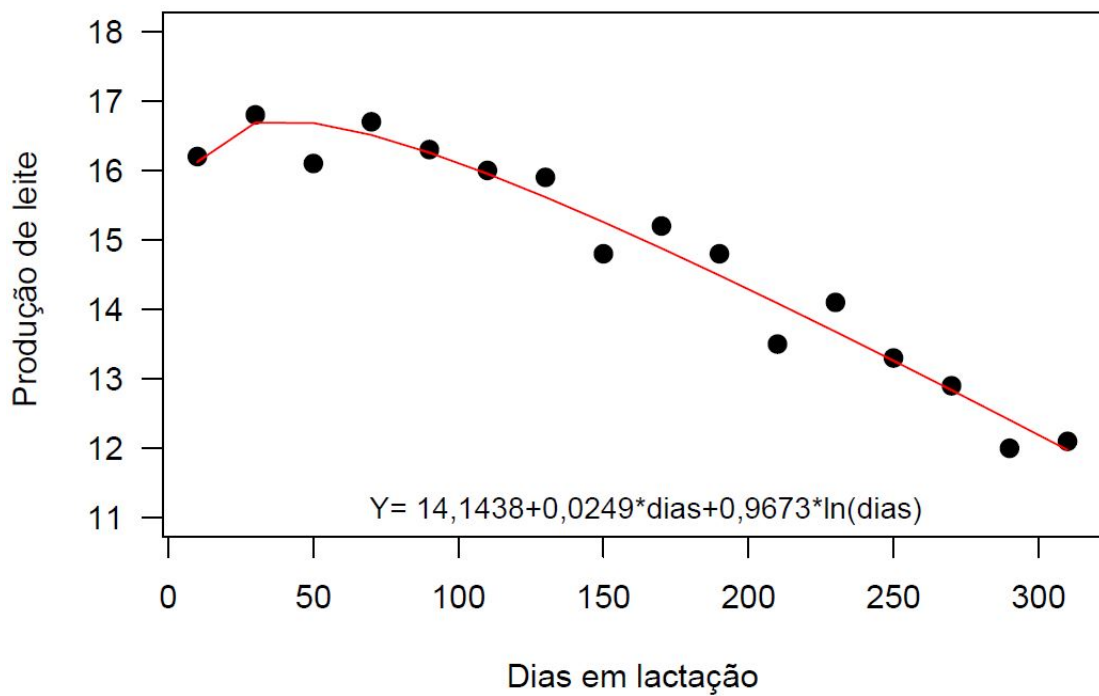


Figura 4.4 – Modelo linear Sigh e Gopal (1982) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

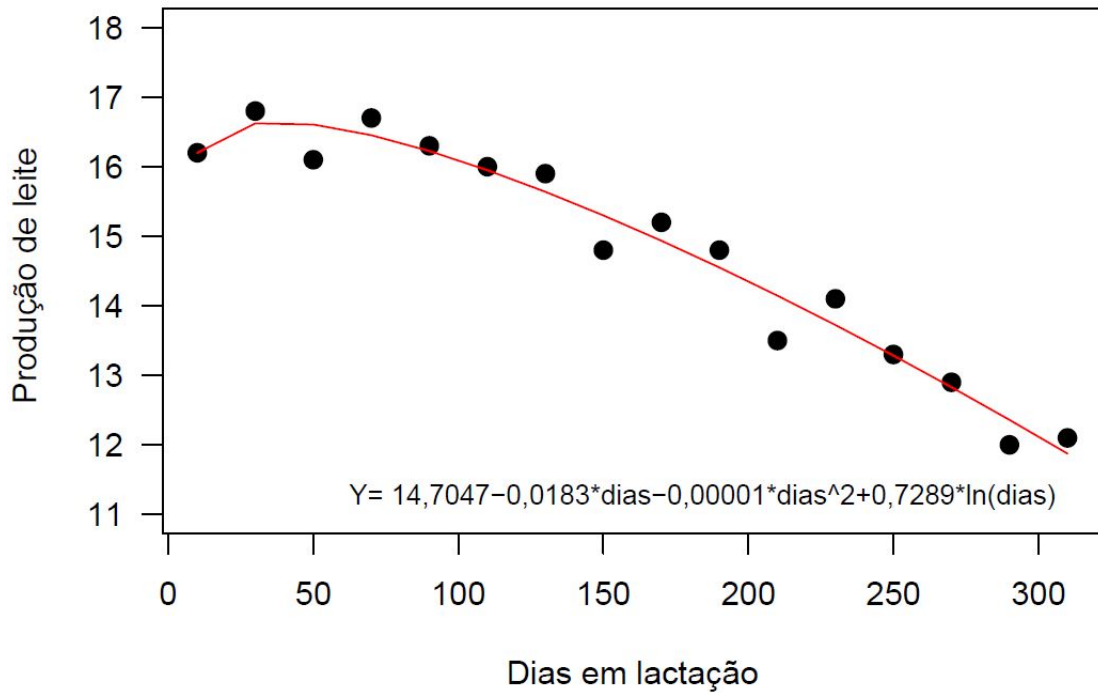
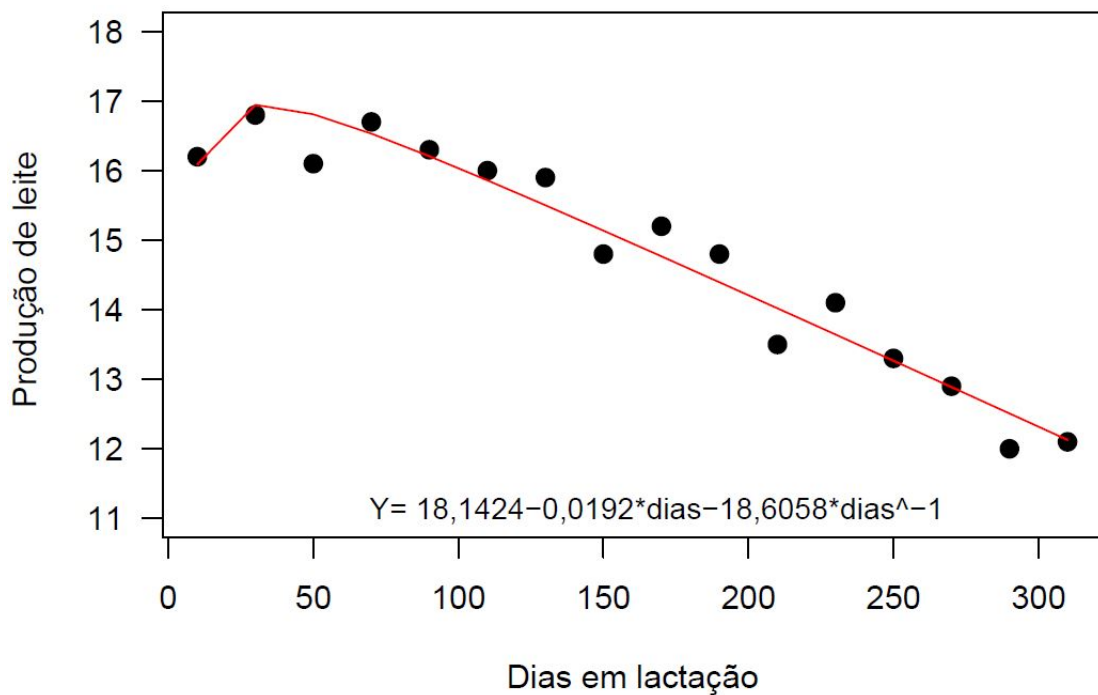
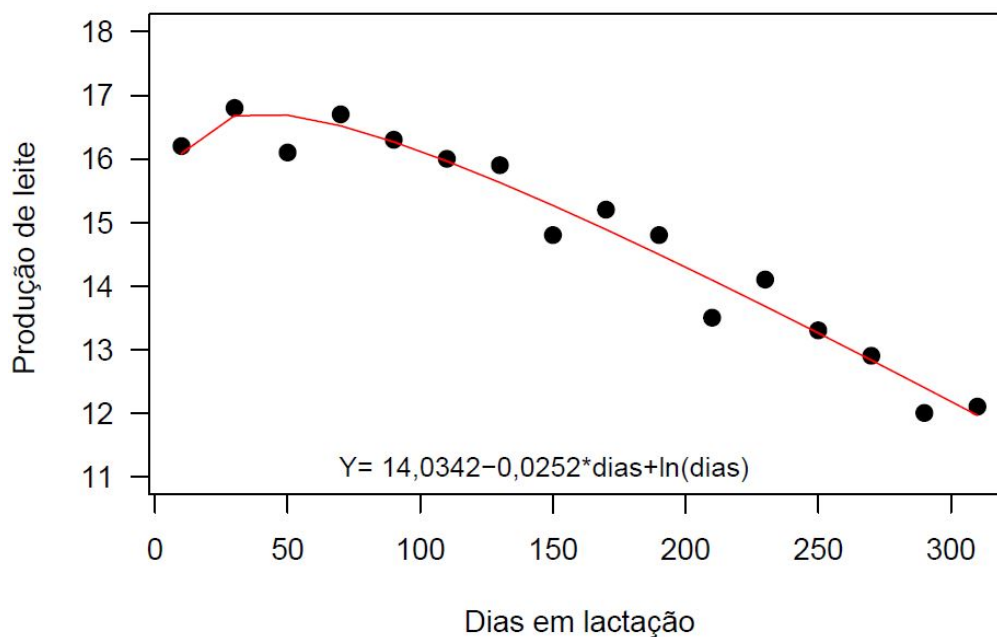


Figura 4.5 – Modelo linear Bianchini Sobrinho (1984) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.



Percebe-se na Figura 4.6 que no modelo Cobuci *et al.* (2000) o pico de lactação ocorreu antes dos 50 dias, o mesmo ocorreu nos estudos de Cobuci *et al.* (2000) em que o pico de lactação aconteceu entre o primeiro e o segundo mês de lactação com animais da raça Guzerá.

Figura 4.6 – Modelo linear Cobuci *et al.* (2000) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.



Nas Figuras 4.7 a 4.17 estão ilustrados os gráficos dos ajustes das curvas de lactação dos modelos não lineares. Como os melhores modelos ajustados foram o modelo Wood (1967) e Wilmink (1987) observa-se que os gráficos desses modelos possuem diferença, sendo que na Figura 4.11 o gráfico do modelo Wood possui a curva de lactação mais achatada e os modelos Brody, Turner e Ragsdale (1924), Nelder (1966) e Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995) apresentam um pico de lactação mais acentuado. E na Figura 4.13 o gráfico do modelo Wilmink mostra um pico de lactação menos acentuado, isto é, não é possível visualizar o pico da curva de lactação.

Figura 4.7 – Modelo não linear de Brody, Ragsdale e Turner (1923) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

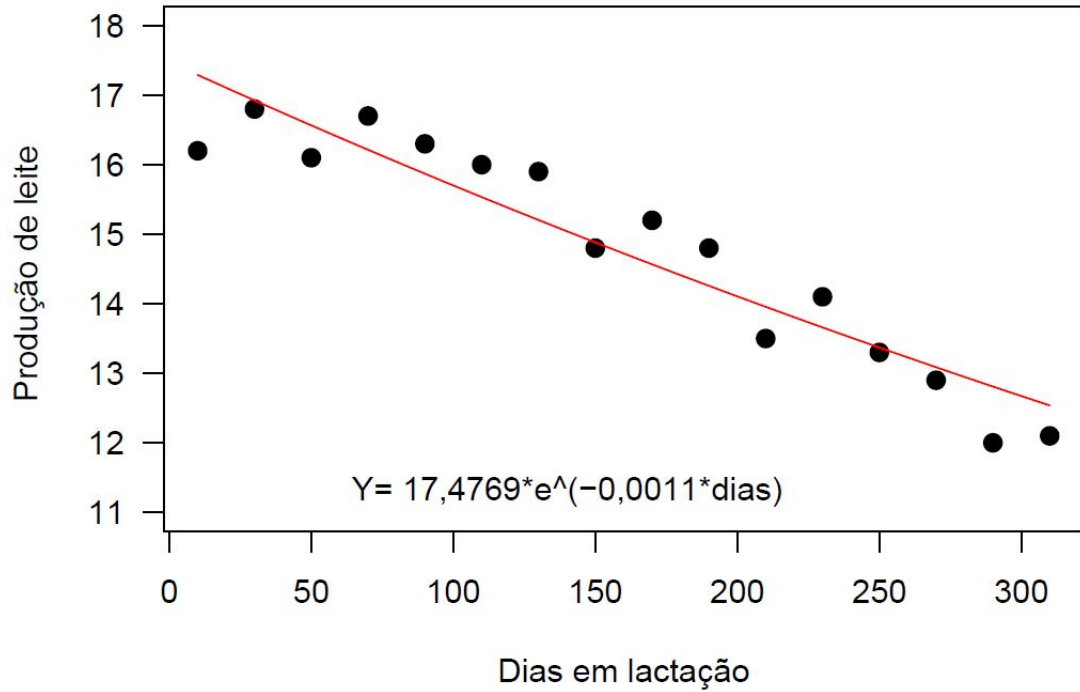


Figura 4.8 – Modelo não linear de Brody, Turner e Ragsdale (1924) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

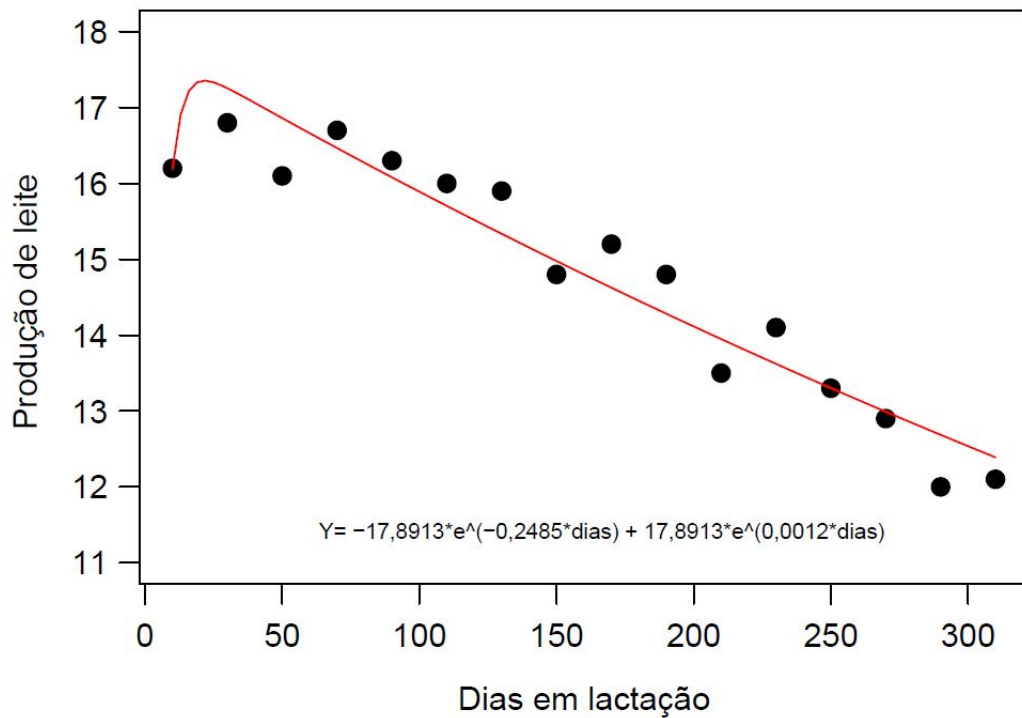


Figura 4.9 – Modelo não linear de Sikka (1950) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando

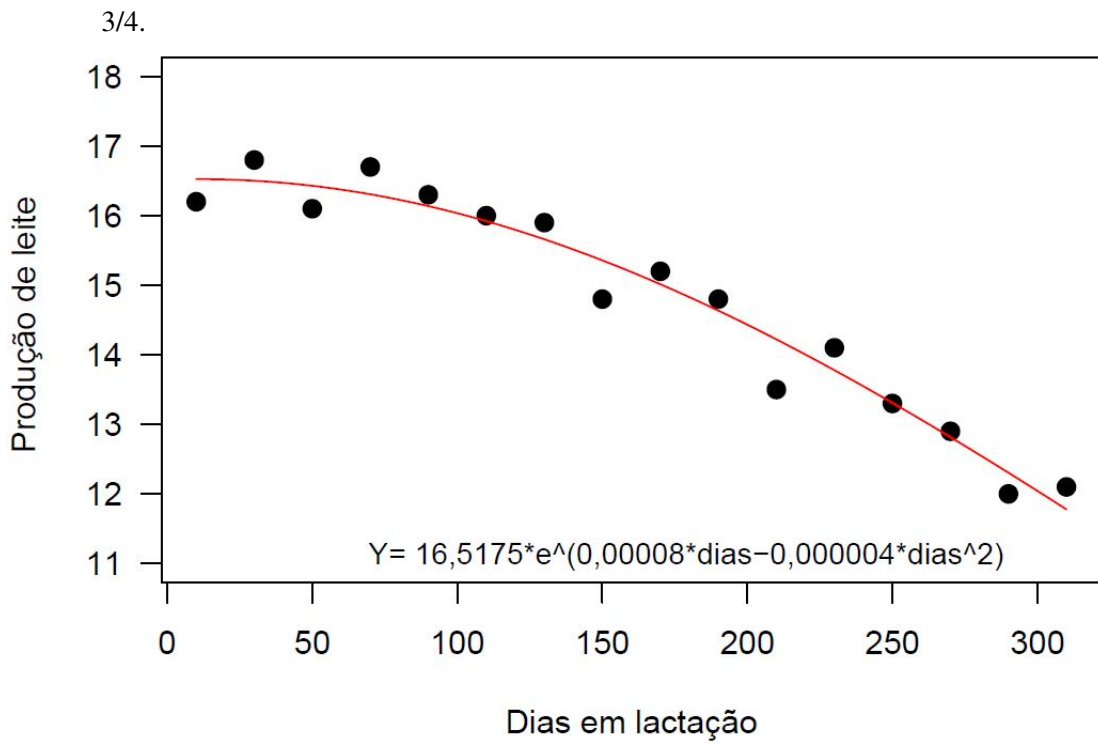


Figura 4.10 – Modelo não linear de Nelder (1966) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando

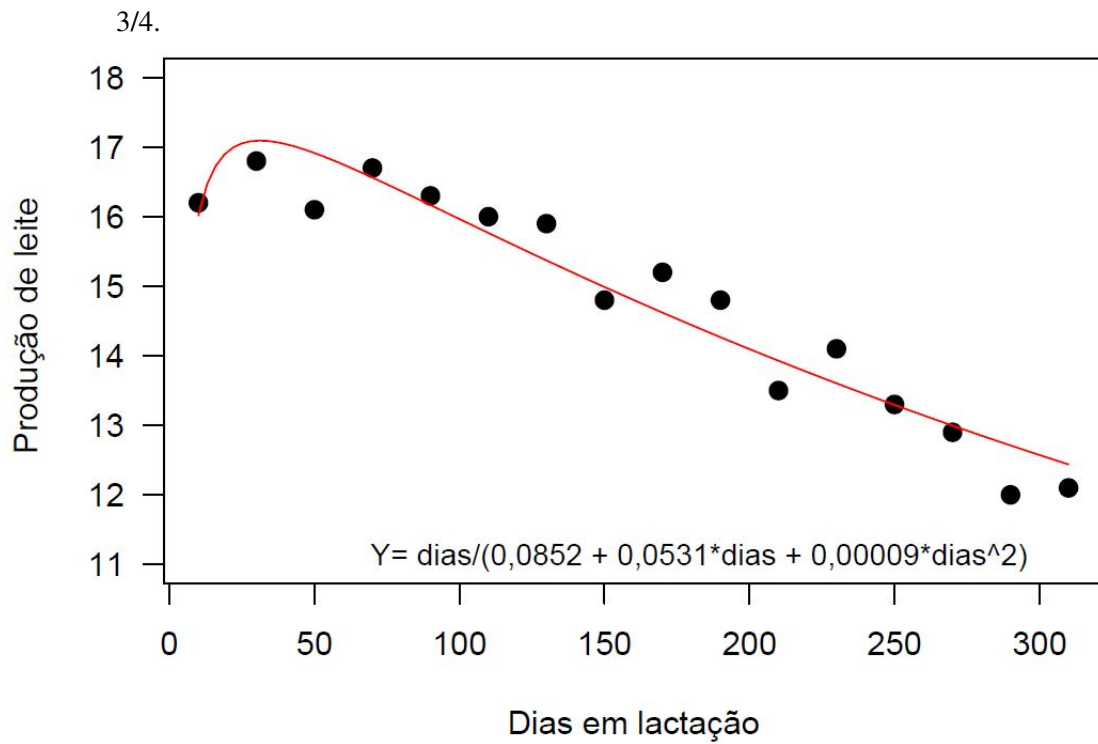
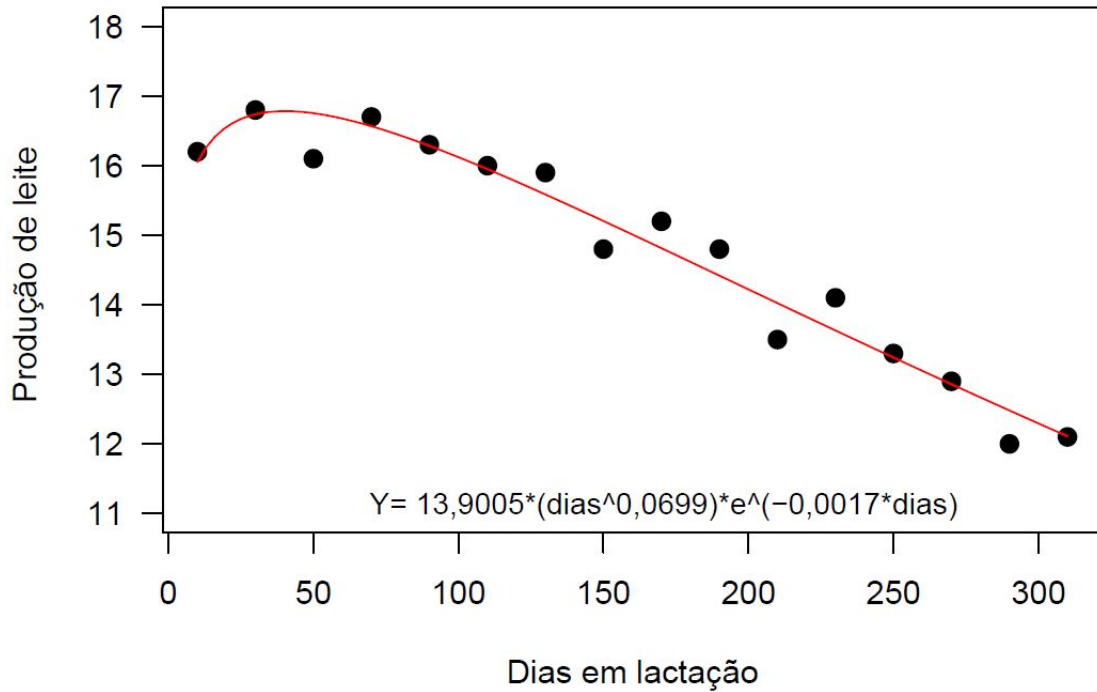


Figura 4.11 – Modelo não linear de Wood (1967) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.



Nota-se na Figura 4.12 que a curva de lactação não obteve um bom ajuste, isso pode ser pelo motivo da dependência residual, conforme resultado mostrado na análise de resíduos, logo seria um motivo para futuros estudos a incorporação de um parâmetro autorregressivo no modelo.

Figura 4.12 – Modelo não linear de Papajcsik e Boderó (1988) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

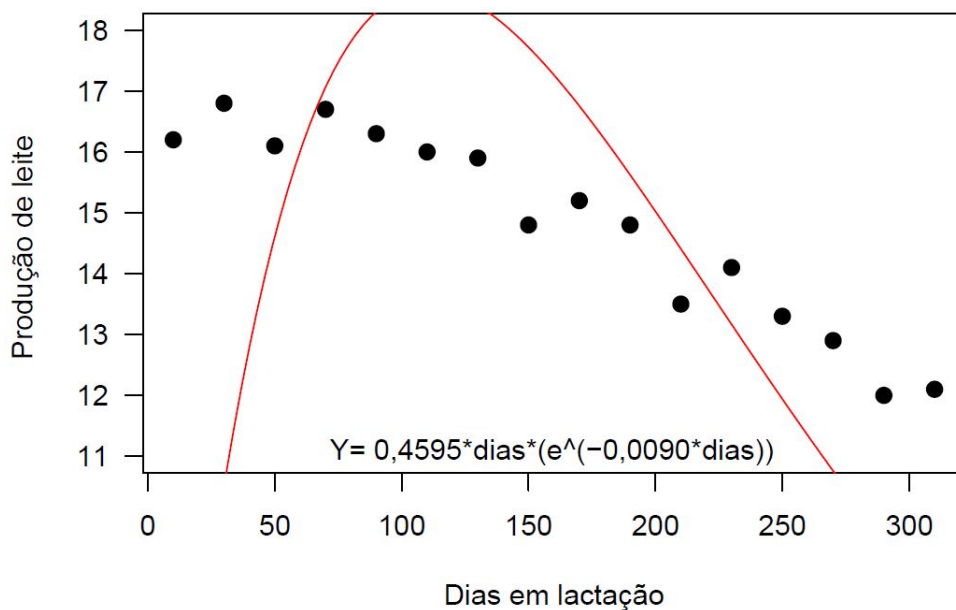


Figura 4.13 – Modelo não linear de Wilmink (1987) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

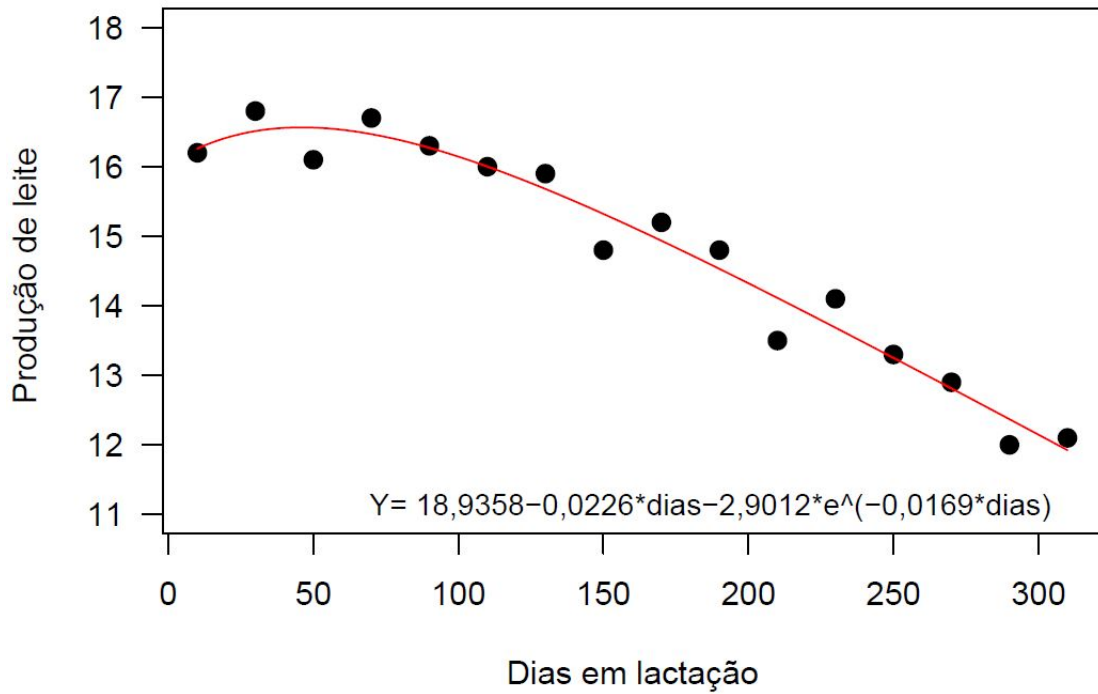


Figura 4.14 – Modelo não linear de Rook, France e Dhanoa (1993) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

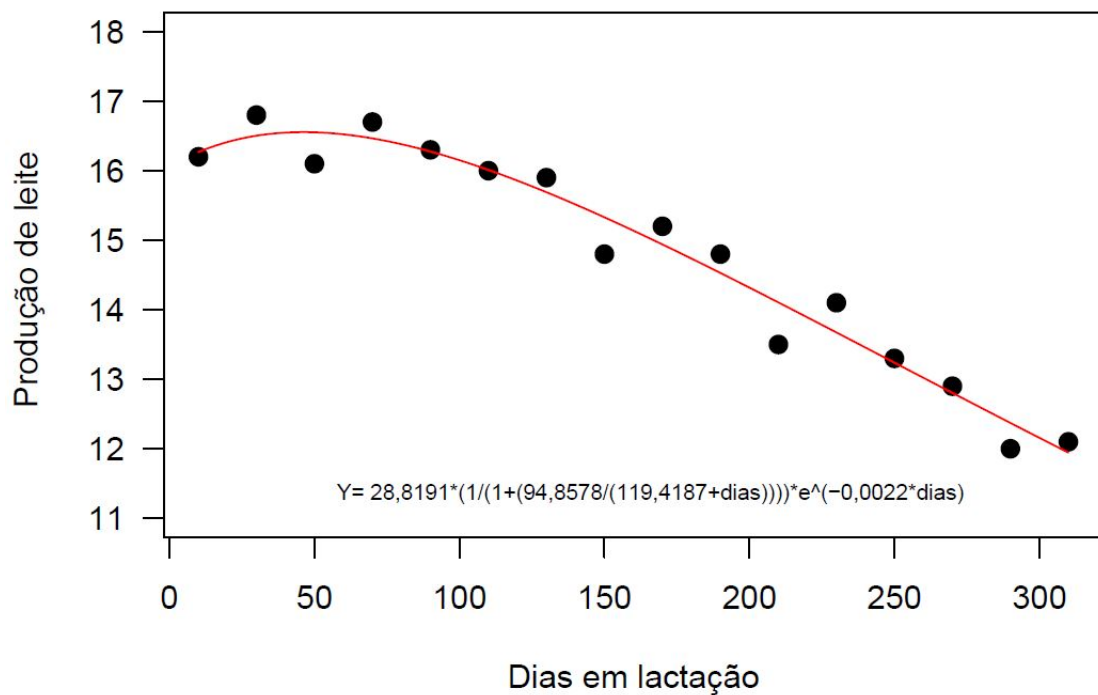


Figura 4.15 – Modelo não linear de Dijkstra *et al.* (1997) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

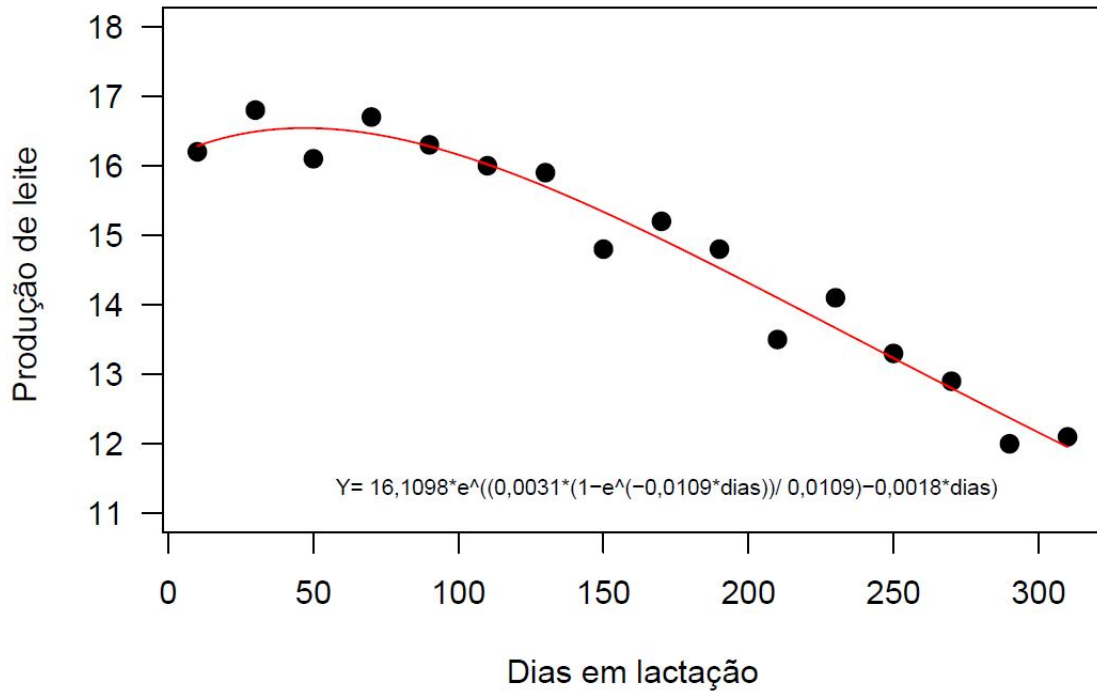


Figura 4.16 – Modelo não linear de Dhanoa (1981) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.

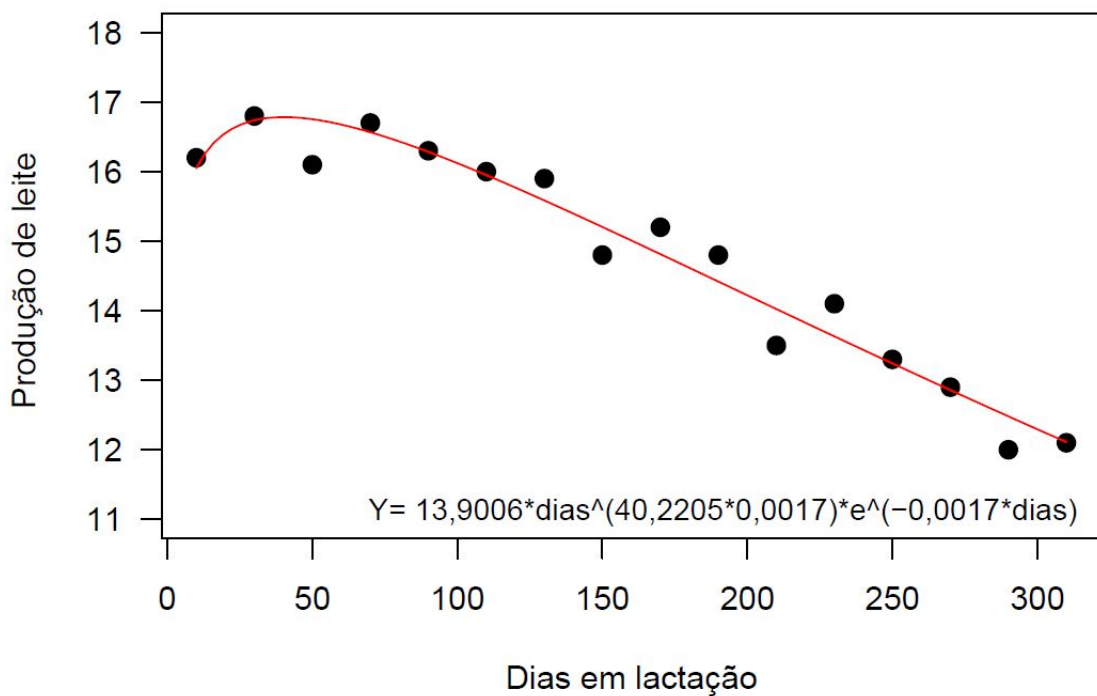
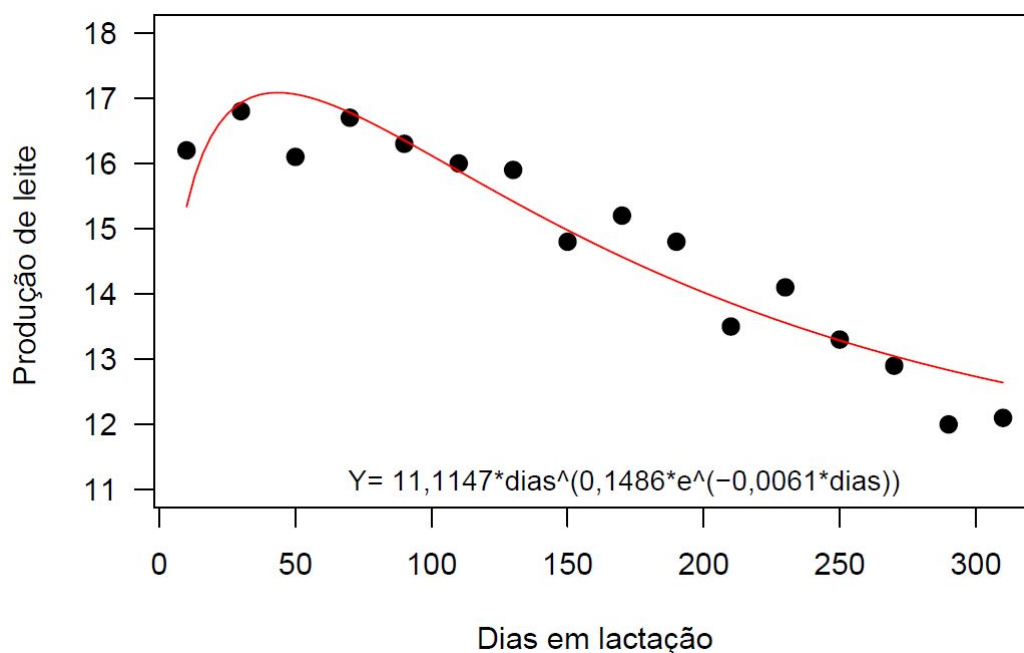


Figura 4.17 – Modelo não linear de Cappio-Borlino, Pulina e Rossi (1995) na descrição da curva de lactação de vacas Girolando 3/4.



A Tabela 4.7 apresenta os Intervalos de Confiança do Modelo Cobuci *et al.* (2000), o qual conforme destacado na metodologia e mencionado por Draper e Smith (1998) é obtido de maneira exata, sem o uso de aproximações. Neste modelo, pode-se observar que dos 10 primeiros dias de lactação até os 50 dias de lactação ocorreu um aumento do volume de produção de leite, o qual é representado pelo aumento da média que vai de 16,0824 Kg no 10º dia para 16,6831 Kg do 50º dia, esse comportamento também é evidente nos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança de 98%, 80% e 60%.

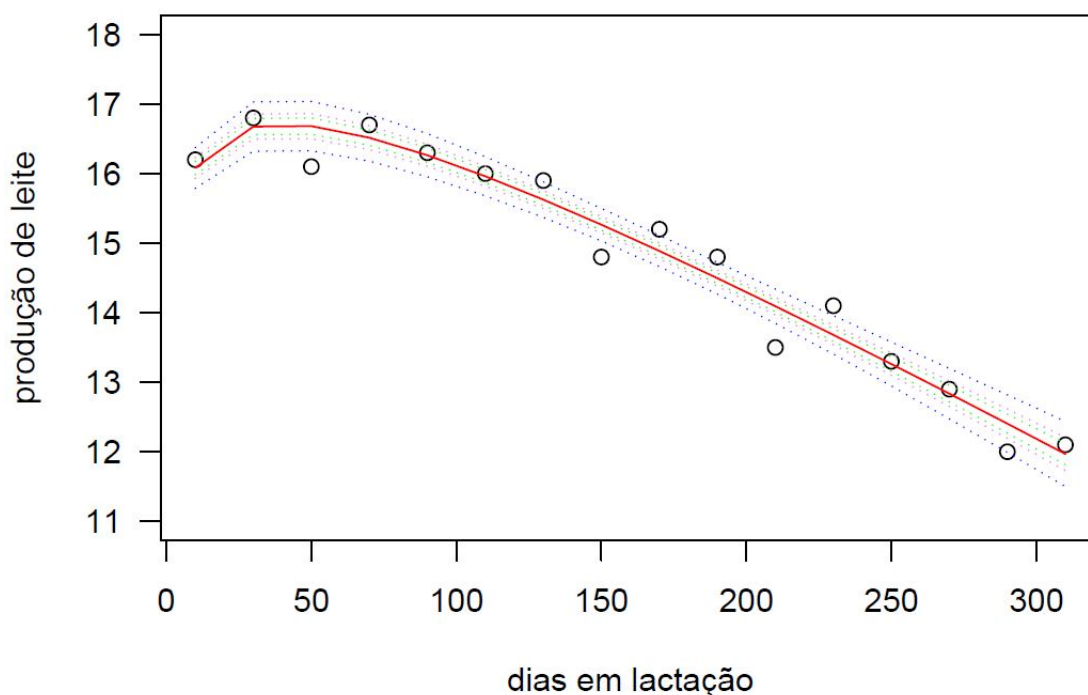
Os limites apresentados na Tabela 4.7 podem servir de referência para os produtores acompanharem a produção diária de seu rebanho, pois ele pode se informar por esta Tabela se a vaca da raça 3/4 Holandês + 1/4 Gir esta produzindo o normal para sua idade em lactação. Se o produtor, por exemplo, tiver uma vaca que produza 15,17 kg de leite aos 150 dias, ao analisar a Tabela 4.7, notará que este valor está entre o LI80 e o LI60, ou seja, está abaixo do limite inferior do intervalo de confiança de 60% e dentro do intervalo de 80%. Como o Intervalo de Confiança é simétrico, os 40% restantes foram divididos em 20% abaixo do LI60 e 20% acima do LS60, sendo assim o produtor concluirá que a vaca está entre 10% e 20% das piores produção de leite. Sendo assim, se houvesse um ranking de 100 vacas ordenadas pela produção de leite (sendo a 100ª a que produz mais leite), a vaca desse produtor estaria entre a 10ª e a 20ª posição.

Tabela 4.7 – Limites Inferior (LI) e Superior (LS) dos intervalos de confiança de 60%, 80% e 98% para a produção de leite de vacas Girolando 3/4 estimados pelo modelo linear de Cobuci *et al.* (2000).

Dias em Lactação	LI98	LI80	LI60	MEDIA	LS60	LS80	LS98
10	15,7901	15,9335	15,9864	16,0824	16,1783	16,2313	16,3747
30	16,3220	16,4957	16,5598	16,6760	16,7923	16,8564	17,0301
50	16,3282	16,5023	16,5666	16,6831	16,7996	16,8638	17,0379
70	16,1797	16,3447	16,4056	16,5161	16,6265	16,6874	16,8524
90	15,9541	16,1062	16,1623	16,2641	16,3659	16,4220	16,5741
110	15,6803	15,8183	15,8692	15,9616	16,0539	16,1049	16,2429
130	15,3708	15,4957	15,5419	15,6255	15,7091	15,7553	15,8803
150	15,0311	15,1461	15,1886	15,2655	15,3425	15,3849	15,4999
170	14,6631	14,7733	14,8139	14,8877	14,9614	15,0020	15,1122
190	14,2676	14,3796	14,4209	14,4959	14,5708	14,6122	14,7241
210	13,8467	13,9675	14,0121	14,0930	14,1738	14,2184	14,3392
230	13,4044	13,5401	13,5902	13,6810	13,7718	13,8218	13,9575
250	12,9451	13,1003	13,1575	13,2614	13,3652	13,4225	13,5776
270	12,4727	12,6506	12,7163	12,8354	12,9545	13,0202	13,1981
290	11,9900	12,1930	12,2680	12,4039	12,5398	12,6148	12,8179
310	11,4991	11,7289	11,8138	11,9677	12,1215	12,2064	12,4363

Um resultado gráfico do ajuste dos intervalos de confiança do Modelo Cobuci *et al.* (2000) pode ser visualizado na Figura 4.18, os pontos em azul representam o intervalo de confiança de 98%, os pontos violetas o intervalo de confiança de 80% e os pontos verdes os intervalos de 60%. Observa-se que a partir da representação gráfica é possível visualizar o comportamento da curva que ajusta os dados da produção de leite ao longo do período em análise. Nesse sentido, os dados de produção real são dispostos em torno da média dos valores estimados, demonstrando assim a qualidade do ajuste do modelo Cobuci *et al.* (2000).

Figura 4.18 – Intervalos de confiança para a produção de leite estimada pelo modelo de Cobuci *et al.* (2000).



Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 4.8 mostra os limites inferiores (LI) e superiores (LS) dos intervalos de confiança de 60%, 80%, 98% e média da produção de leite do modelo Wood (1967) durante os 310 dias de lactação.

Nota-se na Tabela 4.8, que até os 10 primeiros dias de lactação, 98% da produção de leite está contida entre 15,1767 Kg e 16,9208 Kg, esses valores oscilam em torno de uma média de 16,0487 Kg. Já para o intervalo de confiança de 80%, pode-se observar que a produção de leite encontra-se no intervalo de 15,6045 Kg até 16,4930 Kg, por outro lado, ao utilizar-se um intervalo de 60% a produção de leite está entre 15,7624 Kg e 16,3351 Kg.

Observa-se que dos 10 primeiros dias de lactação até os 50 dias de lactação existe um acréscimo significativo do volume de produção de leite que pode ser visto pelo aumento da média que sai de 16,0487 Kg do 10º dia para 16,7543 Kg do 50º dia.

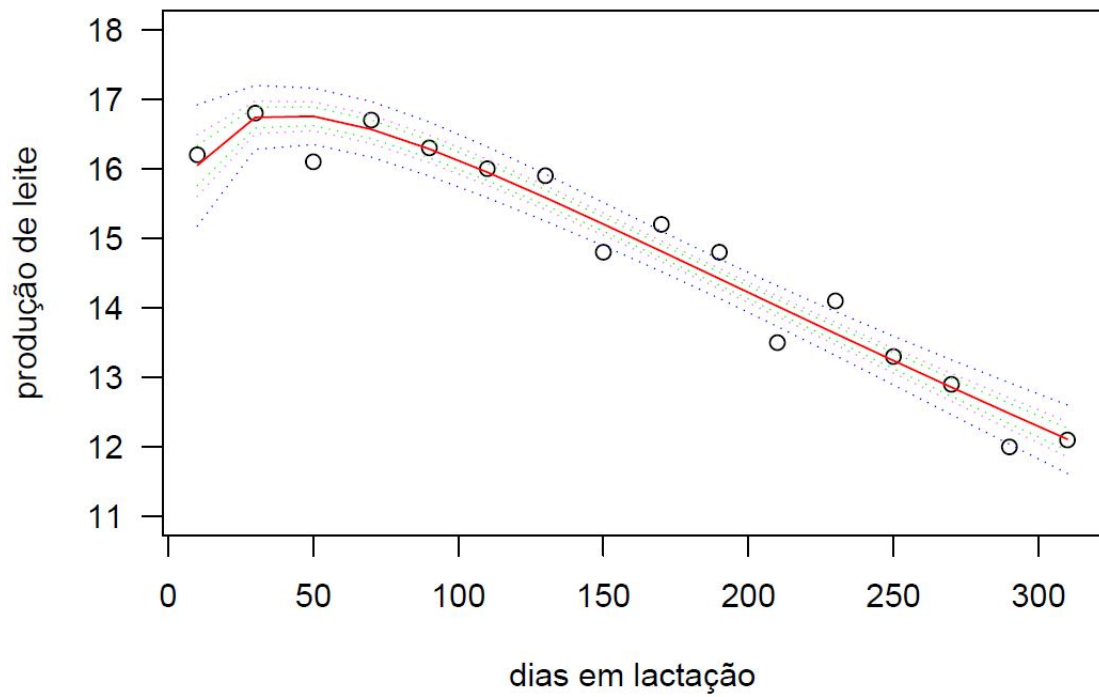
Após os 50 dias de lactação, verifica-se uma diminuição da média e dos limites inferiores e superiores até o fim do período de lactação. Esse comportamento se deve ao fato que a produção de leite teve seu pico em torno do quadragésimo dia com base na estimativa dos parâmetros do modelo Wood, o que faz com que a média tenha se elevado e depois decrescido.

Tabela 4.8 – Limites Inferior (LI) e Superior (LS) dos intervalos de confiança de 60%, 80% e 98% para a produção de leite de vacas Girolando 3/4 estimados pelo modelo não linear de Wood (1967).

Dias em Lactação	LI98	LI80	LI60	MEDIA	LS60	LS80	LS98
10	15,1767	15,6045	15,7624	16,0487	16,3351	16,4930	16,9208
30	16,2789	16,5043	16,5875	16,7384	16,8892	16,9611	17,1978
50	16,3482	16,5474	16,6209	16,7543	16,8876	16,9724	17,1603
70	16,1664	16,3628	16,4354	16,5668	16,6983	16,7708	16,9673
90	15,8958	16,0863	16,1567	16,2842	16,4117	16,4821	16,6726
110	15,5838	15,7633	15,8296	15,9498	16,0700	16,1363	16,3158
130	15,2474	15,4133	15,4745	15,5855	15,6966	15,7578	15,9236
150	14,8933	15,0457	15,1021	15,2041	15,3062	15,3625	15,5150
170	14,5227	14,6653	14,7180	14,8134	14,9089	14,9615	15,1041
190	14,1354	14,2744	14,3257	14,4187	14,5117	14,5630	14,7020
210	13,7320	13,8750	13,9278	14,0235	14,1193	14,1721	14,3151
230	13,3154	13,4700	13,5271	13,6305	13,7340	13,7911	13,9456
250	12,8910	13,0630	13,1264	13,2415	13,3566	13,4201	13,5920
270	12,4639	12,6571	12,7285	12,8578	12,6255	13,0585	13,2517
290	12,0384	12,2553	12,3353	12,4804	12,2717	12,7056	12,9224
310	11,6177	11,8592	11,9484	12,1101	12,6255	12,3609	12,6025

A Figura 4.19 apresenta o gráfico do modelo Wood (1967), os pontos azuis mostram o intervalo de confiança de 98%, os pontos violetas o intervalo de confiança de 80% e os pontos verdes os intervalos de 60%. O comportamento dos dados da produção de leite ao longo do período são representados próximos a curva estimada do modelo Wood (1967), o que possibilita verificar de forma gráfica a qualidade do ajuste. A amplitude do intervalo de confiança de 98% do modelo Wood (1967) na Figura 4.19 é maior do que a amplitude apresentada pelo modelo Cobuci *et al.* (2000) na Figura 4.18, pois o modelo Wood (1967) é um modelo não linear e os intervalos são obtidos de forma aproximada, conforme destacado por Seber e Wild (1989).

Figura 4.19 – Intervalos de confiança para a produção de leite estimada pelo modelo de Wood (1967).



Fonte: Dados da pesquisa.

5 CONCLUSÃO

Os modelos Dave (1971), Madalena, Martinez e Freitas (1979), Singh e Gopal (1982), Biachini Sobrinho (1984) e Cobuci *et al.* (2000) foram classificados como lineares. Desta forma as estimativas dos seus parâmetros bem como os intervalos de confiança são obtidos de forma exata.

Os modelos Brody, Ragsdale e Turner (1923), Brody, Turner e Ragsdale (1924), Sikka (1950), Nelder (1966), Wood (1967), Papajcsik e Boderó (1988), Wilmink (1987), Rook, France e Dhanoa (1993), Dijkstra *et al.* (1997), Dhanoa (1981), Cappio-Borlino e Pulina e Rossi (1995) foram classificados como não lineares. Desta forma, suas estimativas, bem como os intervalos de confiança são obtidas de maneira aproximada sendo necessário o uso de métodos iterativos e por consequência é importante avaliar suas medidas de não linearidade.

Para os dados de vacas Girolando da raça 3/4 analisados, o modelo linear mais adequado para descrever as curvas de lactação foi o modelo Cobuci *et al.* (2000), obtendo ótima qualidade de ajuste ($R_{aj}^2 = 95,97\%$) com apenas 2 parâmetros. Assim este modelo é uma alternativa interessante para modelar curvas de crescimento.

O modelo Wood (1967) foi o modelo não linear que melhor ajustou ($R_{aj}^2 = 94,79\%$) as curvas de lactação das vacas Girolando da raça 3/4, atingiu menores valores das medidas de curvatura, principalmente intrínseca, fornecendo ajustes mais confiáveis, e também menor vício de Box para os parâmetros. Por ser um modelo não linear seus parâmetros possuem interpretação prática, possibilitando estimar aspectos importantes da curva, como a persistência por exemplo.

REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DOS CRIADORES DE GIROLANDO. **Performance**. 2020. Disponível em: <<http://www.girolando.com.br/index.php?paginasSite/girolando,3,pt>>. Acesso em: 16 de março 2020.

AZEVEDO JÚNIOR, J. *et al.* Adjustment of Lactation Curves of Holstein Cows from Herds of Minas Gerais, Brazil. **Journal of Agricultural Science**, v. 10, n. 2, 2018.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988.

BATES, D. M.; WATTS, D. G. Relative curvature measures of nonlinearity: with discussion. **Journal of the Royal Statistical Society**, Serie B, London, v. 42, n. 1, p. 1-25, 1980.

BARBOSA, P. F. *et al.* **Raças**. Embrapa Gado de Leite - Sistema de Produção. 2002. Disponível em: <<https://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br>>. Acesso em: 09 de julho 2020.

BATRA, T. R. Comparison of two mathematical models in fitting lactation curves for pureline and crossline dairy cows. **Canadian Journal of Animal Science**, v. 66, n. 2, p. 405-414, 1986.

BIANCHINI SOBRINHO, E. **Estudo da curva de lactação de vacas da raça Gir**. 1984. 88 f. Dissertação (Doutorado em Genética) – Faculdade de Medicina Veterinária de Ribeirão Preto, Ribeirão Preto, 1984.

BRODY, S.; RAGSDALE, A. C.; TURNER, C. W. The rate of decline of milk secretion with the advance of the period of lactation. **The Journal of general physiology**, v. 5, n. 4, p. 441-444, 1923.

BRODY, S.; TURNER, C. W.; RAGSDALE, A. C. The relation between the initial rise and the subsequent decline of milk secretion following parturition. **The Journal of General physiology**, v. 6, n. 5, p. 541-545, 1924.

BOX, M. J. Bias in nonlinear estimation. *Journal of royal statistical society. Serie B. methodological*, v. 33, n. 2, p. 171–201, 1971.

CANAZA-CAYO, A. W. *et al.* Estrutura populacional da raça Girolando. **Ciência Rural**, v. 44, n. 11, p. 2072-2077, 2014.

CAPPIO-BORLINO, A.; PULINA, G.; ROSSI, G. A non-linear modification of Wood's equation fitted to lactation curves of Sardinian dairy ewes. **Small Ruminant Research**, v. 18, n. 1, p. 75-79, 1995.

CHANG, Y. *et al.* Genetic variation of lactation curves in dairy sheep: a Bayesian analysis of Wood's function. **Livestock Production Science**, v. 71, n. 2-3, p. 241-251, 2001.

COBUCCI, J. A. *et al.* Aspectos genéticos e ambientais da curva de lactação de vacas da raça Guzerá. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 30, n. 4, p. 1204-1211, 2001.

COBUCCI, J. A. *et al.* Curva de lactação na raça Guzerá. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 29, n. 5, p. 1332-1339, 2000.

COLDEBELLA, A. *et al.* Contagem de células somáticas e produção de leite em vacas holandesas de alta produção. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 38, n. 12, p. 1451-1457, 2003.

CORDEIRO, G. M.; PRUDENTE, A. A.; DEMÉTRIO, C. G. B. Uma revisão dos modelos normais não-lineares. **Revista Brasileira de Biometria**, v. 27, n. 3, p. 360-393, 2009.

CRUZ, G. R. B.; RIBEIRO, M. N.; PIMENTA, E. C. Estimativas de parâmetros de curvas de lactação de bovinos. **Archivos de zootecnia**, v. 58, n. 224, p. 695-704, 2009.

DALTRO, D. S. *et al.* Heterosis in the lactation curves of Girolando cows with emphasis on variations of the individual curves. **Journal of Applied Animal Research**, v. 47, n. 1, p. 85-95, 2019.

DALTRO, D. S. *et al.* Heterosis in the components of lactation curves of Girolando cows. **Italian Journal of Animal Science**, v. 18, n. 1, p. 267-278, 2018.

DAVE, D. B. First lactation curve of the Indian water buffalo. **Jawaharlal Nehru Krishi Vishwa Vidyalaya Research Journal**, v. 5, p. 93-98, 1971.

DEMÉTRIO, C. G. B.; ZOCCHI, S. S. **Modelos de regressão**. Piracicaba: ESALQ, 2011.

DHANOVA, M. S. A note on an alternative form of the lactation model of Wood. **Animal Science**, v. 32, n. 3, p. 349-351, 1981.

DIEL, M. I. *et al.* Nonlinear regression for description of strawberry (*Fragaria x ananassa*) production. **The Journal of Horticultural Science and Biotechnology**, v. 94, n. 2, p. 259-273, 2019.

DIJKSTRA, J. *et al.* A model to describe growth patterns of the mammary gland during pregnancy and lactation. **Journal of Dairy Science**, v. 80, n. 10, p. 2340-2354, 1997.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: J. Wiley, 1998.

EL FARO, L.; ALBUQUERQUE, L. G.; FRIES, L. A. Comparação de alguns modelos matemáticos para ajuste à curva de lactação média de um rebanho da raça Caracu. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 28, n. 5, p. 987-992, 1999.

FACÓ, O. *et al.* Análise do desempenho produtivo de diversos grupos genéticos Holandês x Gir no Brasil. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 31, n. 5, p. 1944-1952, 2002.

FAO - FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATION. **FAOSTAT**. 2020. Disponível em: <<http://www.fao.org/faostat/en/#data/QC>>. Acesso em: 02 de abril. 2020.

FERNANDES, F. A. *et al.* Growth curves of meat-producing mammals by von Bertalanffy's model. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 54, n. x, p. 1-8, 2019.

FERNANDES, T. J. *et al.* Parameterization effects in nonlinear models to describe growth curves. **Acta Scientiarum Technology**, v. 37, n. 4, p. 397-402, 2015.

FRITZSCHE, H. **Programação não-linear: análise e métodos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

GAZOLA, S. *et al.* Modelos não lineares na análise de curvas de percentuais germinativos de sementes de milho. **Revista Brasileira de Milho e Sorgo**, v. 16, n. 1, p. 142-152, 2017.

GLÓRIA, J. R. *et al.* Curvas de lactação de quatro grupos genéticos de mestiças Holandês-Zebu. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 39, n. 10, p. 2160-2165, 2010.

GONÇALVES, T. M. *et al.* Curvas de lactação em rebanhos da raça Holandesa no Estado de Minas Gerais: Escolha do modelo de melhor ajuste. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 31, n. 4, p. 1689-1694, 2002.

GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria básica**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman. 2011.

HENRIQUES, L. T. *et al.* Avaliação de modelos não-lineares e da relação do consumo voluntário de vacas primíparas e de bezerros com a curva de lactação de vacas Nelore. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v. 40, n. 6, p. 1287-1295, 2011.

HOCHMÜLLER, A. L. H. *et al.* Estudo exploratório em leites uht para verificação de ocorrência de adulteração. **Revista Interdisciplinar de Ensino, Pesquisa e Extensão**, v. 4, n. 1, p. 238-244, 2017.

JACOPINI, L. A. *et al.* Desempenho Produtivo de Vacas Girolando Estimado Pelo Modelo de Wood Ajustado por Metodologia Bayesiana. **Archives of Veterinary Science**, v. 21, n. 3, p. 43-54, 2016.

JANE, S. A. *et al.* Adjusting the growth curve of sugarcane varieties using nonlinear models. **Ciência Rural**, v. 50, n. 3, 2020.

JUNQUEIRA, F. S. *et al.* Curvas de lactação de vacas F1 Holandês x Gir ordenhadas na presença ou ausência de suas crias. **Archives of Veterinary Science**, v. 23, n. 1, p. 44-51, 2018.

LAZZARI, M. *et al.* Modelos matemáticos para ajuste da curva de lactação de vacas holandesas criadas no Oeste de Santa Catarina. **Ciência Animal**, v. 11, n. 2, p. 137-143, 2013.

LIMA, K. P. **Uso de modelos não lineares na descrição do acúmulo de boro em diferentes partes do feijoeiro cultivar Jalo**. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.

MADALENA, F. E.; MARTINEZ, M. L.; FREITAS, A. F. Lactation curves of holstein-friesian and holstein-friesian x Gir cows. **Animal Science**, v. 29, n. 1, p. 101-107, 1979.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não-linear. **Acta Scientiarum**, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, 2002.

MELO, A. L. P. *et al.* Efeito da autocorrelação residual na avaliação genética de cabras para a produção de leite e para o formato da curva de lactação. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, v. 63, n. 3, p. 609-615, 2011.

MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. **Modelos não lineares**: Funções assintóticas de crescimento, 2014. 181 p.

NEGRI, R. **Aspectos genéticos da curva de lactação em ovinos da raça Lacaune**. 2017. 67 f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Dois Vizinhos, 2017.

NELDER, J. A. Inverse polynomials, a useful group of multi-factor response functions. **Biometrics**, v. 22, n. 1, p. 128-141, 1966.

PAPAJCSIK, I. A.; BODERO, J. Modelling lactation curves of Friesian cows in a subtropical climate. **Animal Science**, v. 47, n. 2, p. 201-207, 1988.

PEREIRA, M. A. *et al.* Curvas de lactação de fêmeas mestiças Taurino x Zebu. **Boletim de Indústria Animal**, v. 73, n. 2, p. 118-126, 2016.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2020. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 02 fev. 2020.

RABASSA, V. R. *et al.* Efeito da suplementação com mananoligossacarídeo sobre parâmetros clínicos e ganho de peso vivo de bezerras. **Semina: Ciências Agrárias**, v. 32, n. 4, p. 1547-1555, 2011.

RATKOWSKY, D. A. **Nonlinear regression modeling**: a unified practical approach. New York: Marcel Dekker, 1983.

REKIK, B. *et al.* Fitting lactation curves of dairy cattle in different types of herds in Tunisia. **Livestock Production Science**, v. 83, n. 2-3, p. 309-315, 2003.

RENCHER, A. C.; SCHAALJE, G. B. **Linear models in statistics**. John Wiley e Sons, 2008.

REZENDE, B. R. *et al.* Modeling the Growth of Forage Legumes. **Journal of Agricultural Science**, v. 12, n. 5, p. 139-144, 2020.

ROOK, A. J.; FRANCE, J.; DHANOA, M. S. On the mathematical description of lactation curves. **The Journal of Agricultural Science**, v. 121, n. 1, p. 97-102, 1993.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New York: J. Wiley, 1989.

SIKKA, L. C. A study of lactation as affected by heredity and environment. **Journal of Dairy Research**, v. 17, n. 3, p. 231-252, 1950.

SILVA, É. M. *et al.* Description of blackberry fruit growth by nonlinear regression models. **Revista Brasileira de Fruticultura**, v. 42, n. 2, 2020.

SILVA, M. V. G. B. *et al.* **Programa de Melhoramento Genético da Raça Girolando – Sumário de Touros – Resultado do Teste de Progênie - Junho/2019**. Juiz de Fora: Embrapa Gado de Leite, 2019.

SINGH, R. P.; GOPAL, R. Lactation curve analysis of buffaloes maintained under village conditions. **Indian journal of animal sciences**, v. 52, n. 12, p. 1157-1160, 1982.

SOUSA, I. F. *et al.* Fitting nonlinear autoregressive models to describe coffee seed germination. **Ciência Rural**, v. 44, n. 11, p. 2016-2021, 2014.

SOUZA, E. M. *et al.* Modelagem não linear da extração de zinco de um solo tratado com lodo de esgoto. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 32, n. 2, p. 193-199, 2010.

TORQUATO, I. A.; EL FARO, L.; MASCIOLI, A. S. Desempenho produtivo e curva de lactação de animais mestiços holandês x gir na região agreste de Pernambuco. **Boletim de Indústria Animal**, v. 74, n. 1, p. 27-35, 2017.

WILMINK, J. B. M. Adjustment of test-day milk, fat and protein yield for age, season and stage of lactation. **Livestock Production Science**, v. 16, n. 4, p. 335-348, 1987.

WOOD, P. D. P. Algebraic of the lactation curve in cattle. **Nature**, n. 216, p. 164-165, 1967.

ZADEH, N. G. H. Application of non-linear mathematical models to describe effect of twinning on the lactation curve features in Holstein cows. **Research in veterinary science**, v. 122, p. 111-117, 2019.

ZADRA, L. E. F. Persistência da lactação de bovinos leiteiros. **Pesquisa e Tecnologia**, v. 9, n. 2, p. 1-6, 2012.

ZEVIANI, W. M. *et al.* Modelos não lineares para a liberação de potássio de esterco animais em latossolos. **Ciência Rural**, v. 42, n. 10, p. 1789-1796, 2012.