



RÉGIS MARCIANO DE SOUZA

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA COLUNA ESBELTA EM
CONCRETO ARMADO USANDO O MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS E P- Δ**

LAVRAS - MG

2018

RÉGIS MARCIANO DE SOUZA

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA COLUNA ESBELTA EM CONCRETO ARMADO
USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E P- Δ**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, área de concentração em Engenharia de Sistemas e Automação, para a obtenção do título de Mestre.

Prof. DSc. Ricardo Rodrigues Magalhães

Orientador

LAVRAS - MG

2018

**Ficha catalográfica elaborada pela Coordenadoria de Processos Técnicos
da Biblioteca Universitária da UFLA**

Souza, Régis Marciano de

Análise não linear de uma coluna esbelta em concreto armado usando o Método de Elementos Finitos e P- Δ / Régis Marciano de Souza. – Lavras : UFLA, 2018.

70 p. : il.

Dissertação (mestrado acadêmico) –Universidade Federal de Lavras, 2018.

Orientador: Prof. DSc. Ricardo Rodrigues Magalhães.
Bibliografia.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Colunas em Concreto Armado. 3. Não Linearidade Geométrica. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

RÉGIS MARCIANO DE SOUZA

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA COLUNA ESBELTA EM CONCRETO ARMADO
USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E P- Δ**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, área de concentração em Engenharia de Sistemas e Automação, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 15 de Março de 2018.

DSc. Ricardo Rodrigues Magalhães UFLA
DSc. Fernando Carlos Scheffer Machado IFSULDEMINAS
DSc. Ednilton Tavares de Andrade UFLA
DSc. Bruno Henrique Groenner Barbosa UFLA

Prof. DSc. Ricardo Rodrigues Magalhães
Orientador

**LAVRAS - MG
2018**

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo fôlego de vida, pelas oportunidades, pela força em todos os momentos e por esta conquista.

A toda minha família, por ter acreditado em mim e sempre me incentivado.

À minha companheira Siliane de Souza Aquino pelo carinho, compreensão e incentivo.

Ao Prof. DSc Ricardo Rodrigues Magalhães, pela confiança, orientação, amizade, correções e incentivo permanente na realização desta dissertação.

À Universidade Federal de Lavras - UFLA e ao Departamento de Engenharia, pela oportunidade concedida para a realização do mestrado.

Aos docentes e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação, da Universidade Federal de Lavras - UFLA, pelo apoio, atenção e colaboração.

Aos amigos e colegas, pelo incentivo e apoio constante.

Ao IFSULDEMINAS, pelo auxílio financeiro.

“Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento”.
(Provérbios 3.13)

RESUMO

O efeito de segunda ordem em estruturas pode ser significativo para o entendimento do comportamento do sistema estrutural. Essa pesquisa trata do desenvolvimento de modelos estruturais para o estudo do comportamento não linear físico e geométrico de colunas esbeltas em concreto armado. O objetivo principal foi o estudo comparativo entre as formulações do Processo Iterativo P- Δ e do Método Numérico de Elementos Finitos, na análise estática não linear. As análises não lineares pelo Método de Elementos Finitos foram realizadas com o processo iterativo-incremental na formulação de *Newton-Raphson* no software ABAQUSTM. A não linearidade física foi considerada de forma simplificada, conforme prescreve a norma ABNT NBR-6118. O Processo Iterativo P- Δ foi implementado computacionalmente no *software* MATLAB[®]. O parâmetro α e o coeficiente γ_z foram utilizados na avaliação dos efeitos de segunda ordem. Realizou-se um comparativo entre os efeitos de primeira e segunda ordem das simulações numéricas do Método de Elementos Finitos. Os resultados numéricos revelaram que o Processo Iterativo P- Δ pode apresentar resultados divergentes das simulações numéricas pelo Método de Elementos Finitos e que os efeitos de segunda ordem são significativos em colunas esbeltas de concreto armado.

Palavras-chave: método dos elementos finitos, coluna em concreto armado, não linearidade geométrica, efeitos de segunda ordem, processo iterativo p-delta.

ABSTRACT

The second-order effect of structures may be significant for understanding the behavior of the system. This research deals with the development of structural models for the study of the physical and geometric nonlinear behavior of slender columns in reinforced concrete. The main aim of this work is the comparative study between the formulations of the Iterative Process P- Δ and Finite Element Method, considering the nonlinear static analysis. Non-linear analyzes by the Finite Element Method were performed with the iterative-incremental process in the Newton-Raphson formulation in ABAQUSTM software. The physical non-linearity was considered in a simplified way, as prescribed by standard ABNT NBR-6118. The Iterative Process P- Δ was implemented in the MATLAB[®] software. The parameter α and the coefficient γ_z were used in the evaluation of second order effects. A comparison between the first and second order effects of the numerical simulations by using the Finite Element Method was performed. The numerical results revealed that the Iterative Process P- Δ can present divergent results from the numerical simulations by the Finite Element Method and that the second order effects are significant in thin columns of reinforced concrete.

Keywords: finite element method, columns in reinforced concrete, geometric nonlinearity, second-order effect, iterative process p-delta.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Comprimento de flambagem	17
Figura 2.2 – Coluna com carga axial de compressão e representação da deformada . . .	20
Figura 2.3 – Métodos de análise estrutural	22
Figura 2.4 – Contexto de uso do MEF	24
Figura 2.5 – Exemplos de formas de elementos finitos	27
Figura 2.6 – Etapas de obtenção do sistema de equações de um elemento	29
Figura 2.7 – Métodos de <i>Newton-Raphson</i> padrão (a) e modificado (b)	38
Figura 2.8 – Deslocamentos horizontais entre os pavimentos	41
Figura 2.9 – Esquema de forças verticais (a) e horizontais fictícias (b)	41
Figura 2.10 – Diagramas tensão-deformação (a) Comportamento linear do material (b) Comportamento não linear do material	45
Figura 3.1 – Modelo estrutural da coluna em concreto armado	48
Figura 3.2 – Esquema simplificado do Processo Iterativo P- Δ	50
Figura 3.3 – <i>Create part</i>	51
Figura 3.4 – <i>Create material</i>	52
Figura 3.5 – <i>Assign beam orientation</i>	53
Figura 3.6 – <i>Modelo de elementos finitos</i>	54
Figura 3.7 – <i>Local seeds</i>	54
Figura 4.1 – Gráfico comparativo entre simulações numéricas	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Comparação entre a análise não linear e linear	34
Tabela 3.1 – Cargas para análises	50
Tabela 4.1 – Parâmetro de instabilidade α	57
Tabela 4.2 – Coeficiente γ_z	58
Tabela 4.3 – Simulações pelo MEF	59
Tabela 4.4 – Simulações pelo Processo Iterativo P- Δ	59
Tabela 4.5 – Análise das simulações pelo MEF	60
Tabela 4.6 – Análise do MEF e do Processo Iterativo P- Δ	60

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Métodos teóricos	21
Quadro 2.2 – Métodos experimentais	21
Quadro 2.3 – Causas do efeito da não linearidade geométrica	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	13
1.1.1	Objetivo geral	13
1.1.2	Objetivo específico	13
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	Colunas em concreto armado	15
2.2	Estabilidade estrutural	18
2.3	Métodos de análise estrutural	20
2.4	Método dos elementos finitos	23
2.4.1	Conceituação geral	23
2.4.2	Breve histórico do MEF	25
2.4.3	Tipos de elementos finitos	26
2.4.4	Malha de elementos finitos	27
2.4.5	Formulação para análise estática linear	29
2.4.6	Análise estática não linear	32
2.4.7	Não linearidade geométrica	35
2.4.8	Método de <i>Newton-Raphson</i>	37
2.4.9	Critério de convergência	39
2.5	Processo Iterativo P-Δ	40
2.6	Parâmetro de instabilidade α	42
2.7	Coefficiente γ_z	43
2.8	Não linearidade física	44
3	METODOLOGIA	47
3.1	Modelo estrutural	47
3.1.1	Características geométricas do Modelo Estrutural	47
3.1.2	Características dos materiais	47
3.1.3	Características dos carregamentos	48
3.1.4	Estabilidade estrutural	49
3.2	Análise não linear geométrica pelo Processo Iterativo P-Δ	49
3.3	Coefficiente γ_z	51

3.4	Análise não linear geométrica pelo Método de Elementos Finitos	51
3.4.1	Validação das simulações numéricas	55
3.5	Estudos comparativos	56
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
4.1	Estabilidade estrutural	57
4.2	Simulação numérica com o coeficiente γ_z	57
4.3	Simulação numérica pelo Método dos Elementos Finitos	58
4.4	Simulação numérica pelo Processo Iterativo P-Δ	58
4.5	Análise comparativa das formulações	59
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	62
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é um material estrutural muito utilizado na construção civil, uma combinação perfeita do concreto com barras de aço nele inseridas, garantindo a perfeita aderência entre o concreto e as barras de aço, quando submetido às ações externas.

O aumento da densidade populacional tem sido um fator preponderante para a verticalização das edificações urbanas, para tal, faz-se necessário cada vez mais o aprimoramento do estudo do comportamento da estrutura e dos materiais, de forma a proporcionar uma estrutura, resistente aos esforços solicitantes, durável, econômica, sustentável e que apresente bom desempenho em serviço.

A norma NBR-6118 (ABNT, 2014) estabelece que a avaliação do desempenho em serviço de edificações urbanas verticalizadas, em concreto armado, consiste na comparação do seu comportamento com os seguintes Estados Limites de Serviço (ELS): Estado de formação de fissuras (ELS-F), Estado de abertura de fissuras (ELS-W), Estado de deformação excessiva (ELS-DEF), Estado de descompressão (ELS-D), Estado de descompressão parcial (ELS-DP), Estado de compressão excessiva (ELS-CE) e Estado de vibrações excessivas (ELS-VE). Para o estado de deformação excessiva (ELS-DEF), estabelece deslocamentos-limites, esses valores práticos são utilizados para verificação em serviço do estado-limite de deformações excessivas da estrutura em concreto armado.

Os problemas de determinação dos deslocamentos em estruturas podem ser resolvidos utilizando a teoria do comportamento elástico e linear, o que atende uma parcela significativa de sistemas estruturais. Nesse tipo de análise considera-se uma relação linear, proporcional, entre forças externas e deslocamentos.

O uso de elementos estruturais esbeltos vem sendo utilizado em projetos de estruturas em concreto armado. Nesses casos, existem iterações entre os deslocamentos e as forças existentes na estrutura, o que causa o aparecimento de esforços adicionais, denominados de esforços de segunda ordem, caracterizando um comportamento não linear. Esses esforços de segunda ordem são expressivos em colunas esbeltas em concreto armado e representam uma parcela significativa dos deslocamentos finais, não podendo ser desprezados.

O estudo do comportamento não linear das estruturas tem impulsionado avanços na área de engenharia estrutural, um desses avanços está relacionado ao uso de processos iterativos-incrementais no Método de Elementos Finitos para simular a trajetória de equilíbrio das estruturas em concreto armado.

Corrêa (1991), afirma que cabe ao meio acadêmico a ampla difusão do conhecimento sobre o comportamento das estruturas, com o propósito de preparar o projetista de estruturas para a necessidade e a viabilidade de melhoria no projeto de sistemas estruturais de edifícios.

Nesse trabalho, apresentou-se uma forma alternativa e simplificada para a determinação da posição deformada, o uso do coeficiente γ_z , que pode ser utilizado para avaliar a importância da consideração dos efeitos de segunda ordem e para contabilizar o efeito de segunda ordem pela majoração do efeito de primeira ordem, esse processo só é válido para as condições estabelecidas na NBR-6118 (ABNT, 2014).

Além disso, foi aplicado um outro método analítico, aproximado, denominado Processo Iterativo P- Δ , para a determinação da posição final da trajetória não linear de equilíbrio deformado, que substitui a análise não linear pela resolução sucessiva de problemas lineares, conforme preconiza a norma NBR-8800 (ABNT, 2008).

Assim, justifica-se, o estudo das formulações numéricas do comportamento não linear de colunas esbeltas em concreto armado. Essas formulações são utilizadas na avaliação da trajetória de equilíbrio de modelos estruturais, e precisam ser validadas para modelagem e simulações adequadas do comportamento real de modelos estruturais. É relevante ressaltar a importância deste estudo para o melhor entendimento do comportamento não linear geométrico de estruturas de esbeltas em concreto armado.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de formulações para análise do comportamento não linear de colunas esbeltas em concreto armado, submetidas a solicitações estáticas, para determinação dos deslocamentos de segunda ordem.

1.1.2 Objetivo específico

A partir do objetivo principal, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

- Aplicar a formulação do método de *Newton-Raphson* no Método de Elementos Finitos para simulação do comportamento não linear da estrutura proposta;
- Aplicar o Processo Iterativo P- Δ para determinação dos efeitos de segunda ordem, deslocamentos finais e trajetória de equilíbrio da estrutura proposta;

- Avaliar a aplicabilidade do coeficiente γ_z na avaliação dos efeitos de segunda ordem na estrutura proposta;
- Avaliar os resultados dos efeitos de segunda ordem das simulações numéricas pelo Processo iterativo P- Δ e comparar esses resultados com os resultados das simulações numéricas computacionais pelo Método dos Elementos Finitos.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo 2, o referencial teórico é apresentado, buscando-se apresentar o estado da arte das formulações para análise não linear de estruturas em concreto armado. Com o intento de apresentar os métodos de análise e os conceitos fundamentais do comportamento não linear de colunas em concreto armado.

No capítulo 3, é apresentado a metodologia utilizada no desenvolvimento das simulações do comportamento não linear, buscando-se a determinação dos efeitos de segunda ordem de uma coluna esbelta em concreto armado. Também é apresentado o *software* de apoio, que aplica o Método dos Elementos Finitos na simulação do comportamento não linear do problema proposto.

No capítulo 4, são apresentados os resultados e discussões do desenvolvimento dessa pesquisa.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões dessa pesquisa, analisando-se os aportes de cada formulação utilizada nessa pesquisa.

Ao final dessa dissertação, são apresentadas as referências bibliográficas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Colunas em concreto armado

De acordo com Helene e Andrade (2010), no Brasil, assim como em outros países do mundo, o concreto tem um papel de destaque sendo o principal e mais consumido material de construção. Duas das mais desenvolvidas e poderosas sociedades atuais, os Estados Unidos e o Canadá, consideram o investimento no estudo das estruturas de concreto, como um dos mais importantes investimentos na ciência e tecnologia para obter e manter a qualidade de vida de seu povo e a liderança de seu parque industrial.

Segundo Graziano (2005), o cimento, em sua forma moderna, utilizado na produção do concreto, foi patenteado em 1824, por James Parker e Joseph Aspdin, com a denominação de Cimento Portland.

Helene e Andrade (2010) e Graziano (2005) destacam as patentes dos franceses Joseph-Louis Lambot, em 1855, para construir barcos, e, de Joseph Monier para construir vasos em 1866, basicamente concreto armado.

Segundo a norma NBR-6118 (ABNT, 2014), os elementos de concreto armado são aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e a armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência.

Em 1897 se iniciava o primeiro curso de concreto armado, lecionado por Rabut na *École des Ponts e Chaussées* da França. Em 1902, Mörsch publicava a primeira edição de sua obra, que grandemente contribuiria para o desenvolvimento das construções de concreto armado (FUSCO, 1976).

De acordo com Helene e Andrade (2010), o Brasil publicou sua primeira norma em 1931, depois de haver projetado e construído dois recordes mundiais em altura, os edifícios *A Noite*, no Rio de Janeiro e *Mantinelli* em São Paulo, ambos em fins da década de 20, com mais de 100 m de altura. Desde a publicação da primeira norma brasileira de concreto armado inúmeros trabalhos vêm sendo desenvolvidos, com o intuito de qualificar os engenheiros para projetar estruturas de edifícios usuais em concreto armado.

As estruturas de edifícios usuais em concreto armado para cumprir suas finalidades, devem possuir um conjunto de elementos resistentes. Segundo Fusco (1976), os elementos resistentes devem garantir a existência de uma certa segurança contra estados limites, na forma-

ção de conjunto resistente, para a idealização desse arranjo estrutural é necessário conhecer o comportamento de cada uma das partes da estrutura projetada.

Abdel-Rohman (2014) classifica os elementos estruturais segundo um critério geométrico, considerando-se que a conformação geométrica dos corpos pode ser delineada em função dos três comprimentos principais, surgem os três tipos fundamentais de elementos estruturais, a saber: os elementos unidimensionais, os bidimensionais e os tridimensionais.

As colunas, também denominadas de pilares, são classificadas como elementos unidimensionais. De acordo com Fusco (1976), nesse tipo de elemento dois comprimentos principais são da mesma ordem de grandeza, menor que a ordem de grandeza do terceiro comprimento principal, também denominadas de estruturas lineares ou barras. A norma NBR-6118 (ABNT, 2014) define colunas como elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes.

Para Carvalho e Pinheiro (2013), essas colunas podem ser classificadas como estruturas de nós fixos ou nós móveis. Segundo a NBR-6118 (ABNT, 2014) as estruturas são consideradas, para efeitos de cálculo, de nós fixos, quando os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos e, por decorrência, os efeitos globais de segunda ordem são desprezíveis (inferiores a 10% dos respectivos esforços de primeira ordem). Já as estruturas de nós móveis são aquelas onde os deslocamentos horizontais não são pequenos e, em decorrência, os efeitos de segunda ordem são importantes (superior a 10% dos respectivos esforços de segunda ordem).

De acordo com Delalibera et al. (2014), quanto mais esbelta for a estrutura, maior a necessidade da análise dos efeitos de segunda ordem. Para Reis e Camotim (2012) e Carvalho e Pinheiro (2013), a esbeltez de uma coluna é definida na Equação 2.1:

$$\lambda = \frac{L_e}{i} \quad (2.1)$$

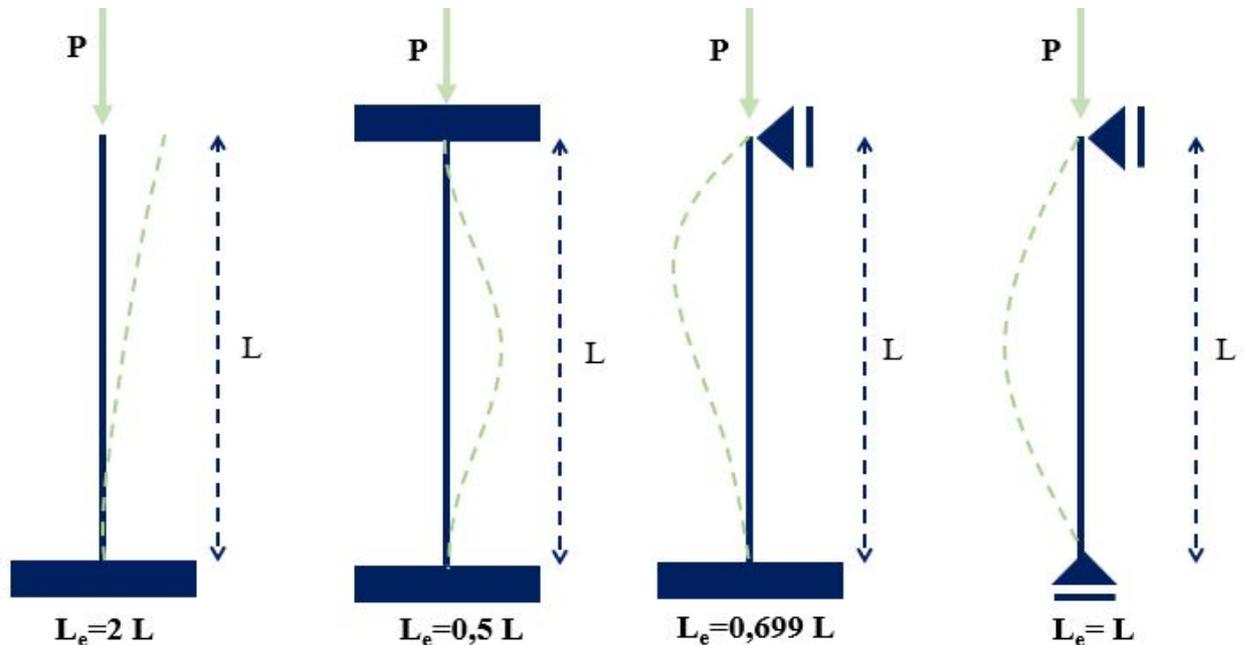
em que λ é o índice de esbeltez da peça em relação ao eixo x ou y ; L_e é o comprimento de flambagem da coluna nas direções x ou y e i é o raio de giração em x ou y (Equação 2.2).

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.2)$$

em que i é o raio de giração da seção transversal, I o momento de inércia e A a área da seção transversal da coluna.

Carvalho e Pinheiro (2013) apresenta os comprimentos de flambagem para algumas condições de vinculação dos apoios nas extremidades (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Comprimento de flambagem



Fonte: (CARVALHO; PINHEIRO, 2013)

Segundo a NBR-6118 (ABNT, 2014), as colunas devem ter índice de esbelteza menor ou igual a 200 ($\lambda \leq 200$). Apenas no caso de elementos pouco comprimidos com força normal menor que $0,10f_{cd}A_c$, o índice de esbelteza pode ser maior que 200. Sendo que, f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto, A_c é a área de concreto da seção transversal.

De acordo com Scadelai (2004), o conceito de esbelteza limite surgiu a partir de análises teóricas de colunas, considerando material elástico linear, que corresponde ao valor da esbelteza a partir do qual os efeitos de segunda ordem começam a provocar uma redução da capacidade resistente da coluna no estado limite último, quando comparada com a capacidade resistente obtida de acordo com a teoria de primeira ordem. Conforme o índice de esbelteza (λ), as colunas podem ser classificadas em:

- colunas robustas ou pouco esbeltas $\Rightarrow \lambda \leq \lambda_1$;
- colunas de esbelteza média $\Rightarrow \lambda_1 < \lambda \leq 90$;
- colunas esbeltas ou muito esbeltas $\Rightarrow 90 < \lambda \leq 140$;
- colunas excessivamente esbeltas $\Rightarrow 140 \leq \lambda < 200$.

Na norma NBR-6118 (ABNT, 2014), item 15.8.2, λ_1 é um valor-limite do índice de esbelteza, que depende de diversos fatores, mas os preponderantes são: a excentricidade relativa de primeira ordem na extremidade do pilar onde ocorre o momento de primeira ordem de maior valor absoluto; a vinculação dos extremos da coluna isolada e a forma do diagrama de momentos de primeira ordem.

2.2 Estabilidade estrutural

As colunas esbeltas, quando submetidas as solicitações de flexo-compressão, sofrem uma modificação da geometria, o que gera efeitos de segunda ordem e estabelece uma nova configuração deformada da estrutura. Se a estrutura possuir capacidade resistente para suportar os efeitos de primeira e segunda ordem, diz-se que a estrutura é estável. Se a estrutura não possuir capacidade resistente para suportar os efeitos de primeira e segunda ordem, diz-se que a estrutura é instável, neste caso ocorre um aumento dos deslocamentos, e por consequência um aumento dos carregamentos podendo levar a estrutura ao colapso.

Segundo a NBR-6118 (ABNT, 2014), nas estruturas de concreto armado, o estado-limite último de instabilidade é atingido sempre que, ao crescer a intensidade do carregamento e, portanto, das deformações, há elementos submetidos a flexo-compressão em que o aumento da capacidade resistente passa a ser inferior ao aumento da solicitação. De acordo com essa norma existem nas estruturas três tipos de instabilidade:

a) nas estruturas sem imperfeições geométricas iniciais, pode haver (para casos especiais de carregamento) perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio (flambagem);

b) em situações particulares (estruturas abatidas), pode haver perda de estabilidade sem bifurcação do equilíbrio por passagem brusca de uma configuração para outra reversa da anterior (ponto - limite com reversão);

c) em estruturas de material de comportamento não linear, com imperfeições geométricas iniciais, não há perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio, podendo, no entanto, haver perda de estabilidade quando, ao crescer a intensidade do carregamento, o aumento da capacidade resistente da estrutura passa a ser menor do que o aumento da solicitação (ponto-limite sem reversão).

Mais detalhes sobre o estudo da instabilidade bifurcacional e o estudo da instabilidade por ponto limite ou "*snap-through*", podem ser encontrados em Reis e Camotim (2012).

De acordo com Leonhardt e Mönning (1977), para a determinação da capacidade de carga das colunas esbeltas, devem ser levados em conta, no concreto armado, a influência de excentricidades não intencionais das cargas, bem como o comportamento não elástico do concreto e o crescimento não linear das deformações por flexão.

MacGregor e Wight (2004) e Timoshenko e Gere (1961), utilizando um modelo de coluna engastada na extremidade inferior e livre na extremidade superior, para uma carga P , definiram a equação diferencial da elástica, Equação 2.3.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(\delta - y) \quad (2.3)$$

em que E representa o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young do material, I é o momento de inércia da seção reta, P a força axial aplicada na coluna, δ é o deslocamento horizontal, $y=y(x)$ é a função deflexão da coluna medida a partir do eixo baricêntrico x e $\frac{d^2 y}{dx^2}$ é a derivada segunda da deflexão y em relação à variável x .

Ainda segundo MacGregor e Wight (2004) e Timoshenko e Gere (1961), em 1744, *Leonhard Euler*, resolvendo a Equação 2.3, para o problema proposto na Figura 2.2, determinou a equação geral para carga crítica em colunas, Equação 2.4.

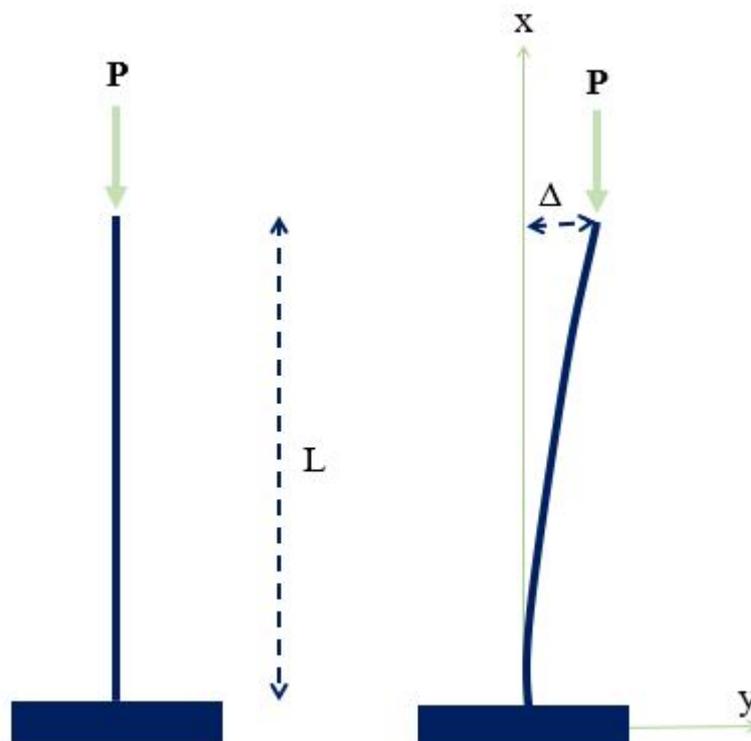
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (2.4)$$

em que E representa o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young do material, I é o momento de inércia da seção reta, P_{cr} é a carga crítica de flambagem em colunas, L_e é o comprimento de flambagem da coluna.

De acordo com Andrade, Oliveira e Afonso (2010), os pontos críticos são aqueles em que um caminho de equilíbrio atinge um valor extremo ou aqueles onde diferentes caminhos de equilíbrio se encontram.

Segundo Assan (2013), a carga crítica pode ser determinada de uma outra maneira, pelo método energético de *Rayleigh-Ritz*, esse método utiliza o princípio da mínima energia potencial total e é uma poderosa ferramenta para resolver problemas da mecânica estrutural, podendo ser aplicado tanto a estruturas com comportamento linear como não linear. Esse método permite resolver casos em que a solução exata da equação diferencial da curva que descreve a elástica da coluna não é conhecida ou é muito complicada.

Figura 2.2 – Coluna com carga axial de compressão e representação da deformada



Fonte: (TIMOSHENKO; GERE, 1961)

2.3 Métodos de análise estrutural

A análise estrutural tem como finalidade a determinação do comportamento das estruturas sob ações e/ou efeitos externos. Esse comportamento representa a resposta da estrutura, as respostas de mais relevância na engenharia estrutural são: deslocamentos, deformações e tensões.

De acordo com Doebelin (1990), para resolver problemas de engenharia, estão disponíveis dois métodos gerais: os teóricos e os experimentais. Muitos problemas exigem a aplicação de ambos os métodos. A quantidade de cada um depende da natureza dos problemas. Problemas que estão na fronteira do conhecimento requerem muitas das vezes estudos experimentais extensivos, uma vez que teorias adequadas ainda não estão disponíveis. Assim, a teoria e a experimentação devem ser consideradas como complementos um do outro, e o Engenheiro que assume essa atitude, em geral, será um solucionador de problemas mais eficaz, do que aquele que negligencia uma ou outra dessas duas abordagens. As principais características dos métodos teóricos e experimentais podem ser encontradas nos Quadros 2.1 e 2.2.

Quadro 2.1 – Métodos teóricos

Características Principais dos Métodos Teóricos
1. Geralmente fornece resultados de uso geral e não de aplicação restrita.
2. Invariavelmente exigem a aplicação de hipóteses simplificadoras. Assim, não é estudado o sistema físico real, mas sim um modelo matemático simplificado do sistema. Isto significa que o comportamento previsto teoricamente é sempre diferente do comportamento real.
3. Em alguns casos, pode levar a problemas matemáticos complicados. Isso impedia o estudo teórico de muitos problemas no passado. Atualmente, a crescente disponibilidade de computadores de alta velocidade, permite o tratamento teórico de muitos problemas que não podiam ser assim tratados no passado.
4. Requer apenas lápis, papel, computador, etc. Não são necessárias instalações extensivas de laboratório (Alguns computadores são muito complexos e caros, mas eles podem ser utilizados para resolver todos os tipos de problemas. Por outro lado, muitos equipamentos de laboratório tem uma finalidade especial e adequada apenas a uma limitada variedade de tarefas.)
5. Não é necessário gastar tempo para construção dos modelos, montagem, verificação da instrumentação e coleta de dados.

Fonte: (DOEBELIN, 1990)

Sobre as classificações dos métodos de análise estrutural (Figura 2.3), onde os métodos de análise estrutural são subdivididos em teóricos (analíticos, numéricos e mistos) e experimentais (em sistemas reais ou reduzidos), sendo os métodos analíticos baseados em equações que governam o comportamento físico de um sistema estrutural. Um sistema estrutural pode ser definido como um conjunto de elementos estruturais interligados. Para estudar o comportamento desse sistema estrutural, por um método analítico, deve-se, primeiro, conceber um modelo simplificado (hipotético) desse sistema. As soluções das equações que governam o comportamento físico desse sistema estrutural simplificado são resolvidas de forma analítica, e representam a solução exata do problema simplificado.

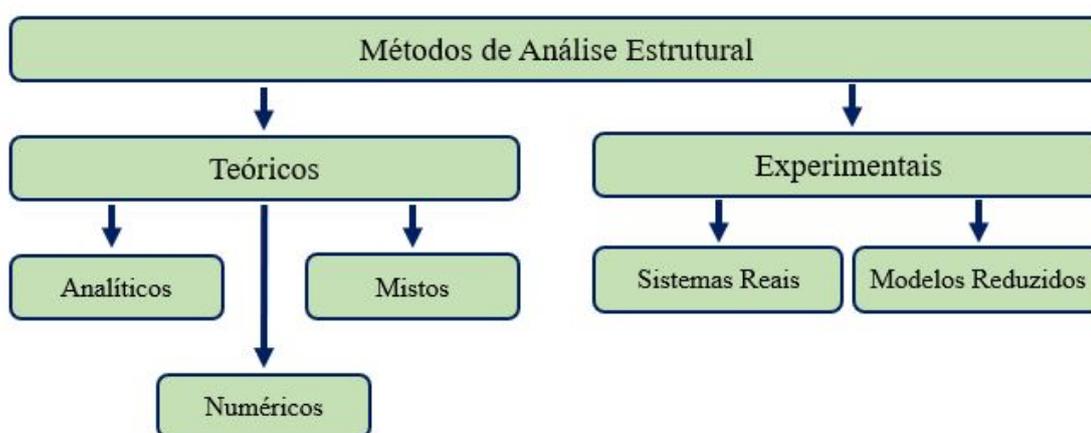
Quadro 2.2 – Métodos experimentais

Características Principais dos Métodos Experimentais
1. Normalmente fornece resultados que se aplicam somente ao sistema específico ensaiado. No entanto, técnicas como a análise dimensional podem permitir alguma generalização.
2. Não são necessárias hipóteses simplificadoras se os testes forem executados em um sistema real. O verdadeiro comportamento do sistema é obtido.
3. São necessárias medições precisas para obter o quadro real dos resultados. Isso pode exigir equipamentos caros e complexos. As características de todos os equipamentos de medição e gravação devem ser bem compreendidas.
4. É necessário um sistema real ou um modelo em escala. Se um modelo de escala for usado, a semelhança de todas as características significativas devem ser preservadas.
5. É necessário um tempo considerável para projetar, construir e preparar os aparelhos para ensaio

Fonte: (DOEBELIN, 1990)

Para Alves Filho (2013), os métodos analíticos clássicos permitem o cálculo da resposta exata dos deslocamentos, deformações e tensões na estrutura em todos os seus pontos, porém essas soluções são somente conhecidas para alguns casos, que fogem da maioria das aplicações práticas que encontramos no dia a dia. A maioria das estruturas de importância prática são complexas para serem analisadas pelos métodos clássicos. Para estruturas de forma arbitrária, a solução analítica frequentemente torna-se impossível, e o problema requer grandes e excessivas simplificações, resultando em cálculos pouco acurados.

Figura 2.3 – Métodos de análise estrutural



Fonte: Elaborado pelo autor

Souza (2015) apresentou os principais conceitos relacionados à energia de deformação e aos trabalhos virtuais, demonstrou três possibilidades para resolução da equação fundamental do Método da Carga Unitária: a integração numérica, a integração por Vereschagui e o uso de tabelas de integração, com o intuito de estudar aplicações do cálculo na determinação dos deslocamentos em estruturas reticuladas de concreto armado.

Alves Filho (2013) afirma que uma alternativa interessante para solução de problemas complexos é o uso de procedimentos aproximados, métodos numéricos, que podem ser aplicados em caráter geral, independentemente da forma da estrutura e da condição de carregamento, dentro de uma precisão aceitável para o problema. Essa abordagem pode ser feita utilizando o Método Numérico de Elementos Finitos. A combinação dos métodos numéricos com analíticos é definida como método misto de análise estrutural.

Os métodos experimentais, necessitam de equipamentos de medição, para determinação do comportamento físico da estrutural, esse comportamento pode ser representado pelos deslocamentos, deformações, dentre outros parâmetros. Também podem ser utilizados modelos reduzidos, visando a predição do comportamento físico que pode ocorrer na estrutural quando

construída (estrutura real). Portanto, esse método experimental com modelos reduzidos, pode ser uma excelente ferramenta para a tomada de decisão em projetos de engenharia.

Oliveira (2004) apresenta os procedimentos para análise teórica (diferentes modelos) e experimental de colunas em concreto armado sob ação de força centrada com resistência média à compressão de 40 MPa.

Nahum e Oliveira (2010) realizaram o monitoramento com extensômetros elétricos de sete colunas de um edifício residencial, cujo principal objetivo foi comparar as ações atuantes nas colunas determinadas a partir da análise experimental com os resultados fornecidos da simulação no programa computacional CAD/TQS[®]. As cargas simuladas para as colunas, mostraram-se coerentes com os resultados obtidos pela análise das deformações medidas e dos resultados de ensaios dos materiais empregados na estrutura.

2.4 Método dos elementos finitos

2.4.1 Conceituação geral

O Método de Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica capaz de analisar de forma aproximada o comportamento de problemas regidos por fenômenos físicos que podem ser expressos em equações diferenciais parciais ou ordinárias.

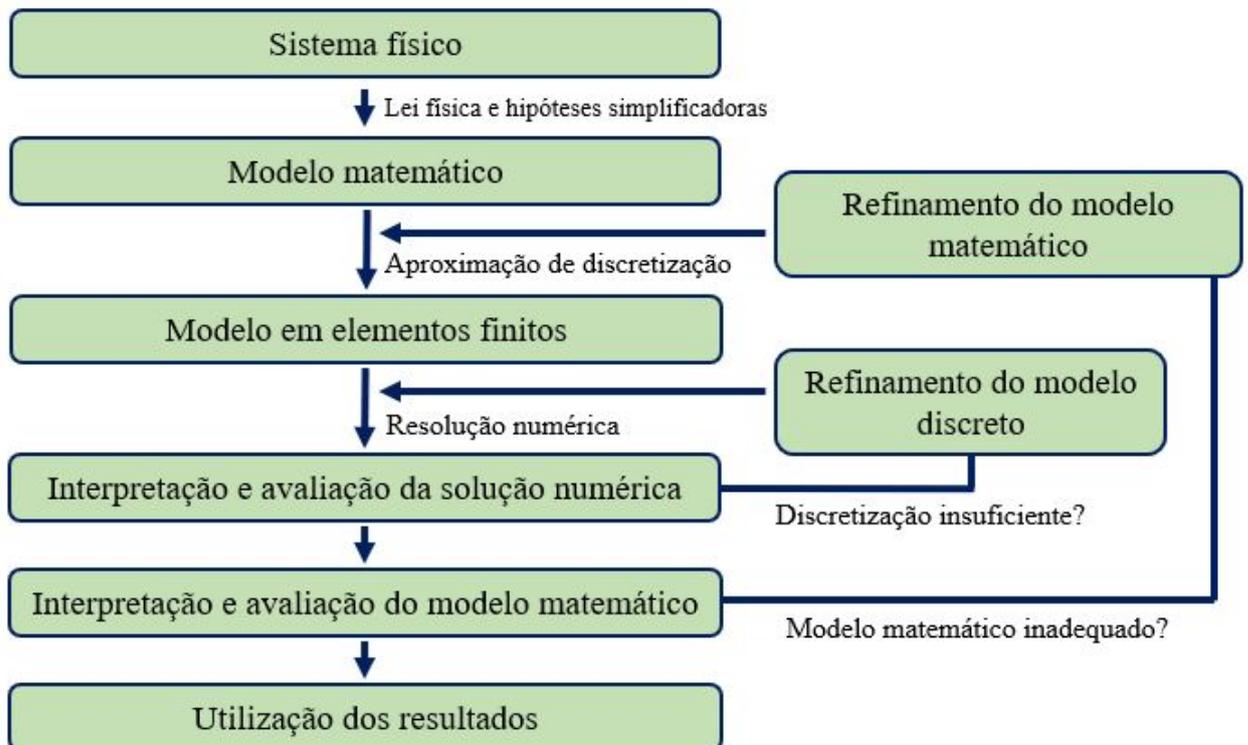
Para Belytschko e Fish (2009), muitos fenômenos em engenharia e ciências podem ser descritos em termos de equações diferenciais. Em geral, solucionar essas equações por meio de métodos analíticos clássicos para geometrias irregulares é quase impossível. O MEF é uma aproximação numérica com a qual estas equações diferenciais podem ser resolvidas de modo aproximado. Do ponto de vista da engenharia, o MEF é um método para resolver problemas de engenharia, tais como análise de tensões, transferência de calor, escoamento de fluidos e eletromagnetismo, por simulações de computador.

O MEF é uma ferramenta eficiente, sofisticada, largamente utilizada para obter soluções aproximadas de problemas em Engenharia Estrutural. Uma aplicação desse método na Engenharia Estrutural é o estudo do comportamento elástico linear e não linear das estruturas, por simulações numéricas em computador. Dentre os programas comerciais amplamente utilizados estão o SOLIDWORKS[®], ABAQUSTM, ANSYS[®], FEMAP[®], SAP2000[®] e AUTODESK[®] INVENTORTM.

Para Soriano (2009), o método parte do arbítrio de leis simples (usualmente polinômiais) para as variáveis dependentes primárias em subdomínios denominados *elementos finitos*, em substituição às leis exatas de solução do modelo matemático (que são desconhecidas) e de maneira a se ter continuidade nas interfaces dos elementos, na grande maioria dos desenvolvimentos.

Soriano (2009) afirma que esses elementos são interconectados por meio de pontos nodais em seus contornos e, como as referidas leis são arbitradas em função de parâmetros nodais, os infinitos pontos do modelo matemático contínuo são substituídos por um número finito de pontos, o que é chamado de processo de discretização do modelo matemático contínuo. Em uma condição matemática que garanta que a solução aproximada obtida convirja para a solução do modelo matemático original, na medida em que se reduz o tamanho dos elementos ou se aumenta a ordem das leis arbitradas para as referidas variáveis. Assim, esse modelo matemático, que já é aproximado ao sistema físico, tem seu comportamento determinado com aproximação adicional através de um modelo discreto do MEF (Figura 2.4).

Figura 2.4 – Contexto de uso do MEF



Fonte: (SORIANO, 2009)

2.4.2 Breve histórico do MEF

Courant (1943) apresentou as contribuições de dois físicos *Lord Rayleigh* e *Walther Ritz*, que investigaram a substituição da resolução dos problemas variacionais pelo uso de métodos aproximados com soluções equivalentes. Também apresentou uma abordagem pioneira, trabalhando com discretização do problema global em subdomínios discretos interconectados, objetivando a solução de problemas de equilíbrio e vibrações.

Turner et al. (1956) apresentaram formulações matemáticas e o método de montagem da matriz de rigidez para estruturas complexas. Clough (1960) apresentou pela primeira vez o termo *Elementos Finitos*. Turner et al. (1960) consideraram o efeito das grandes deformações na análise de estruturas submetidas as cargas externas e efeitos de temperaturas. Archer (1965) expandiu a abordagem do Método de Elementos Finitos para a análise dinâmica.

Argyris e Kelsey (1960) apresentaram os princípios fundamentais dos métodos de análise matricial de estruturas, incluindo os efeitos de temperaturas e a consideração de uma relação não linear entre tensão-deformação, revelando claramente a dualidade entre o método dos deslocamentos e o método das forças, originalmente esse trabalho foi publicado como uma série de artigos entre 1954 e 1955.

Zienkiewicz e Cheung (1967) publicam o primeiro livro sobre o MEF. Oden (1972) publicou um livro sobre análise não linear em mecânica do contínuo, estendendo as aplicações do método de elementos finitos de problemas lineares em estruturas a uma ampla classe de problemas práticos e não lineares.

Noor (1991) fez uma pesquisa detalhada das publicações sobre Elementos Finitos, apresentando como resultados uma extensas listas de publicações referentes ao estudo de Elementos Finitos. Até 1991, existia mais de cinquenta mil usuários de elementos finitos no mundo, essa atividade tinha um gasto estimado de cerca de um bilhão de dólares anualmente.

No Brasil, em 1975, o professor *Fernando Venâncio Filho* do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), publicou o livro intitulado "*Análise Matricial de Estruturas: Estática, Estabilidade, Dinâmica*". Neste livro, o professor abordou o Método de Elementos Finitos pelo princípio dos trabalhos virtuais e pelo princípio dos trabalhos virtuais complementares. Apresentou, o procedimento para análise estrutural pelo método dos deslocamentos e pelo método das Forças, os conceitos de estabilidade, a análise não linear e um exemplo simples de aplicação do método iterativo, os conceitos da análise dinâmica e um exemplo de aplicação, um programa

para análise matricial de estruturas com código em FORTRAN[®] com aplicação do método de *Cholesky* na resolução do sistema do MEF (VENÂNCIO FILHO, 1975).

A primeira tese sobre o MEF no Brasil foi defendida na COPPE-UFRJ, em 1970, pelo engenheiro Alcebíades Vascelos e foi desenvolvida em parte no Laboratório de Engenharia Civil de Lisboa (ELOY, 2011). Alcebíades desenvolveu um programa para a análise de estruturas de estado plano com o uso de elemento triangular, resolveu alguns problemas e comparou os resultados obtidos pelo programa com os fornecidos pela Teoria da Elasticidade. O primeiro curso sobre o MEF foi ministrado também na COPPE-UFRJ pelo professor Fernando Venâncio Filho em 1971 (ELOY, 2011).

Na UFLA, Silva (2013) e Silva, Silva e Magalhães (2014), apresentam os trabalhos desenvolvidos no Departamento de Engenharia, com aplicações do Método de Elementos Finitos na análise estática de uma colhedora de café. Obtiveram como respostas as tensões de *Von Mises*, deformações, deslocamentos e os fatores de segurança de alguns componentes estruturais.

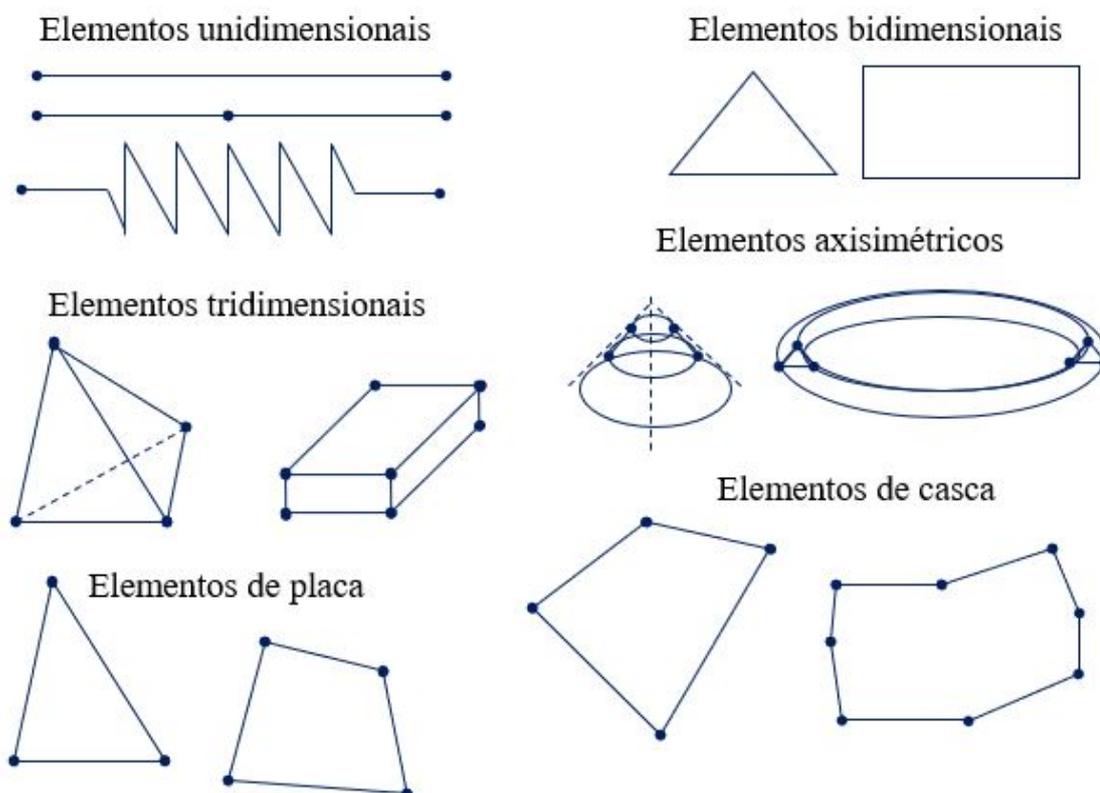
Rodrigues (2015) estudou os efeitos de flambagem em perfis tubulares retangulares metálicos, submetidos aos esforços de compressão axial e quantificou as deformações horizontais nas colunas utilizando a técnica de velocimetria por imagem de partículas (PIV) para avaliação do comportamento estrutural. Rodrigues (2015) utilizou o MEF para simulação numérica e estrutural das colunas, comparou os resultados obtidos das simulações numéricas em Elementos Finitos com o uso da técnica PIV e concluiu que a técnica PIV pode ser utilizada para o estudo de deslocamentos em colunas.

No período entre 2013 e 2016, no Departamento de Engenharia da Universidade Federal de Lavras - UFLA, sete dissertações com aplicações do Método de Elementos Finitos foram defendidas (SILVA, 2013), (RODRIGUES, 2015), (ALMEIDA, 2016a), (MAGALHÃES, 2016), (CARVALHO, 2016), (PICOY, 2016) e (ALMEIDA, 2016b), o que evidencia a potencialidade de novas investigações na área.

2.4.3 Tipos de elementos finitos

Soriano (2009) afirma que os elementos podem ser uni, bi e tridimensionais, de variadas formas e com números distintos de pontos nodais em seus lados e faces, assim como diferentes números e tipos de graus de liberdade por ponto nodal (Figura 2.5).

Figura 2.5 – Exemplos de formas de elementos finitos



Fonte: (CAMPILHO, 2012)

2.4.4 Malha de elementos finitos

Na modelagem em Elementos Finitos a construção da malha de Elementos Finitos é uma etapa de extrema importância, pois esse conjunto de elementos discretos interconectados nos nós, pode contribuir e garantir bons resultados para as simulações. Um procedimento de refinamento sucessivo da malha pode garantir a convergência da solução numérica para um resultado correto.

Soriano (2009) apresentou orientações para o refinamento manual de uma malha. Cook et al. (1974) e Brandão (2008), apresentaram os métodos de refinamento automático das malhas de elementos finitos, também denominado de métodos adaptativos, buscando através da adaptatividade, que o erro seja distribuído de maneira uniforme sobre toda a malha.

Para Soriano e Lima (2003) e Soriano (2009), o refinamento automático, dito autoadaptativo, é função de parâmetro ou nível de convergência especificado pelo usuário e é seletivo no sentido de atuar prioritariamente nas regiões que careçam de refinamento até que se obtenha erro de discretização uniformemente distribuídos em toda malha (em atendimento ao referido

parâmetro). Essas estratégias adaptativas de refinamento podem ser divididas, basicamente, em três tipos: h , p e r .

Segundo Cook et al. (1974) e Brandão (2008), os refinamentos dos tipos p e h são formas de aumentar o número do grau de liberdade do modelo. No refinamento do tipo h , não se altera o grau dos polinômios usados (mesmo tipo de elemento), o refinamento é feito pela divisão dos elementos discretos da malha. No refinamento do tipo p , ocorre um aumento do grau (p) do polinômio buscando enriquecer o espaço de solução. Uma outra forma de refinamento é o tipo r , onde o refinamento é realizado por meio do reposicionamento dos pontos nodais da malha melhorando assim a distribuição dos erros. Para Soriano (2009), a combinação dos refinamentos dos tipos p e h é denominada de refinamento tipo hp . Para Szabo e Babuška (1991), as convergências dos resultados dos refinamentos dos tipos h , p ou hp , são denominadas de convergência h , p ou hp .

Niemi et al. (2012) apresentaram um estudo sobre o comportamento da convergência das análises de elementos finitos para o problema de *Girkmann* com refinamentos do tipo hp e h . O problema de *Girkmann* corresponde a modelagem de uma casca fina axissimétrica apoiada sobre um anel de reforço igualmente axissimétrico. Mais detalhes sobre o problema de *Girkmann* podem ser encontrados em (GIRKMANN, 1956).

Rylo (2002) apresentou o desenvolvimento e implementação de métodos de autoadaptabilidade em malhas de elementos finitos bi e tridimensionais. A implementação do método de autoadaptabilidade do tipo hp , por meio de uma estimativa do erro local, foi testada e validada para modelos bi-dimensionais. Este resultado promissor mostrou que o método de autoadaptabilidade do tipo hp ainda pode ser muito explorado, principalmente nos aspectos relativos a análise de desempenho e estudo na implementação de outros tipos de estimadores de erro.

Freitas (1999) e Defilippo (2007), apresentaram um processo de refinamento da malha de elementos finitos baseado no critério de esbeltez do elemento. De acordo com o índice de esbeltez foram estabelecidos os números de divisões e os limites dos comprimentos desses elementos resultantes do processo de refinamento, evitando que o elemento refinado tenha um índice de esbeltez fora dos valores limites.

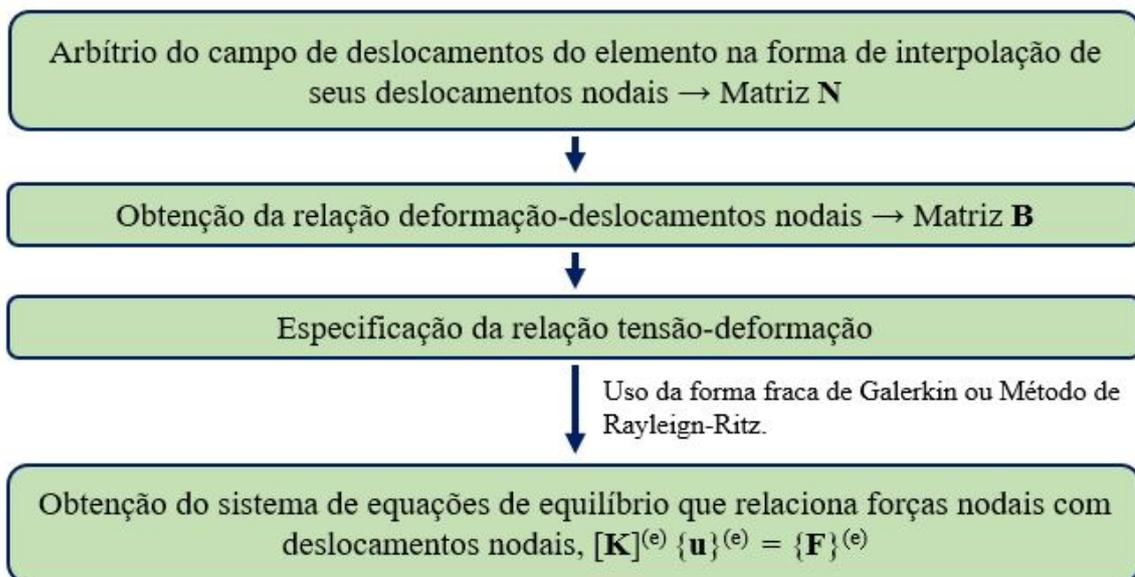
Aplicações dos recursos computacionais e matemáticos das técnicas de refinamento de malhas também foram apresentadas nos trabalhos de (DUARTE; ODEN, 1996), (RACHOWICZ; ZDUNEK, 2017), (BANK; NGUYEN, 2011), (NIEMI et al., 2012), (DYDUCH; HABRAKEN; CESCOTTO, 1992), (ROARTY; GROSLAND, 2004), (VEIGA et al., 2011), (BABUSKA;

SZABO; KATZ, 1981), (SOO-WON; BATHE, 1989) (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) e (HABRAKEN; CESCOTTO, 1990).

2.4.5 Formulação para análise estática linear

Para Soriano (2009), a formulação do MEF é feita na forma variacional direta do Método de *Rayleigh-Ritz* ou por meio da forma fraca do Método de *Galerkin*. A abordagem variacional é mais clássica que a de *Galerkin*, entretanto, essa última tem a vantagem de ser mais geral do que a de *Rayleigh-Ritz*. E ambas, no caso de sistema físico regido por funcional, fornecem os mesmos resultados. Para obtenção do sistema de equações de equilíbrio de um elemento, deve-se seguir as etapas apresentadas na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Etapas de obtenção do sistema de equações de um elemento



Fonte: (SORIANO, 2009)

Segundo Soriano (2009), Eloy (2011) e Oñate (1995), na formulação do MEF utiliza-se a matriz de interpolação N_e , cujos termos são funções conhecidas como funções de interpolação ou de forma. Essas funções de interpolação tem o objetivo de estabelecer o comportamento do elemento, em função dos deslocamentos nodais do elemento u_e , conforme Equação 2.5.

$$\{u\} = [N_e(x)] \{u_e\} \quad (2.5)$$

em que u é campo dos deslocamentos do elemento, N_e é a matriz de interpolação e u_e são os deslocamentos nodais do elemento.

Oñate (1995) e Cook et al. (1974), apresentou a matriz deformação do elemento finito, denominada de matriz B , Equação 2.6.

$$[B] = \left[\frac{dN_e(x)}{dx} \right] \quad (2.6)$$

em que B é a matriz deformação do elemento finito, $\frac{dN_e(x)}{dx}$ é a derivada primeira da matriz de interpolação N_e em relação a x .

Assan (2003) apresentou a relação tensão deformação, Equação 2.7.

$$\{\sigma_e\} = [D] \{u_e\} \quad (2.7)$$

em que σ_e é o vetor tensões da relação tensão-deformação, D é a matriz que contém os parâmetros elásticos que caracterizam o material e u_e é o vetor deslocamentos nodais do elemento.

Para Oñate (1995), a matriz D também é denominada de matriz constitutiva. De acordo com Eloy (2011), para materiais isotrópicos, os termos da matriz D dependem apenas dos seguintes parâmetros mecânicos do material: o módulo de elasticidade E e o coeficiente de *Poisson* ν .

Oñate (1995) e Cook et al. (1974) definiram a matriz de rigidez do elemento K_{ij}^e , utilizando as expressões do Princípio dos Trabalhos Virtuais, Equação 2.8.

$$[K_{ij}^{(e)}] = \int_0^{V^{(e)}} [B_i]^T [D] [B_j] dV \quad (2.8)$$

em que $K_{ij}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento, B_i^T é a transposta da matriz deslocamento-deformação, D é a matriz constitutiva do material, B_j é a matriz deslocamento-deformação

Oñate (1995) e Cook et al. (1974) definiram o vetor das forças aplicadas nodais, R_i^e , Equação 2.9. Essas forças nodais decorrem das forças externas distribuídas por unidade de volume R_V^e (Equação 2.10), das forças externas distribuídas por unidade de área R_A^e (Equação 2.11), das forças externas distribuídas por unidade de comprimento R_L^e (Equação 2.12), das forças devido as tensões iniciais $R_{\epsilon_0}^e$ (Equação 2.13), das forças devido as deformações iniciais $R_{\sigma_0}^e$ (Equação 2.14) e das forças diretamente aplicadas nos nós da estrutura Q .

$$\{R_i^e\} = \{R_V^e\} + \{R_V^e\} + \{R_L^e\} + \{R_{\sigma_0}^e\} - \{R_{\epsilon_0}^e\} \quad (2.9)$$

$$\{R_V^e\} = \int_0^{V^{(e)}} [N_i]^T \{b\} dV \quad (2.10)$$

$$\{R_A^e\} = \int_0^{A^{(e)}} [N_i]^T \{t\} dA \quad (2.11)$$

$$\{R_L^e\} = \int_0^{L^{(e)}} [N_i]^T \{s\} dL \quad (2.12)$$

$$\{R_{\sigma_0}^e\} = - \int_0^{V^{(e)}} [B_i]^T \{D\} \{\sigma_0\} dV \quad (2.13)$$

$$\{R_{\varepsilon_0}^e\} = \int_0^{V^{(e)}} [B_i]^T \{D\} \{\varepsilon_0\} dV \quad (2.14)$$

em que b é o vetor de forças de volume, t é o vetor de forças por unidade de área, s é o vetor de forças por unidade de comprimento, σ_0 é o vetor de tensões iniciais e ε_0 é o vetor de deformações iniciais.

Cook et al. (1974) definiram o sistema global de equações algébricas de equilíbrio para uma estrutura com n elementos, Equação 2.17. Nesse sistema, F é o vetor das forças nodais definido na Equação 2.16, Q é o vetor de forças externas aplicadas diretamente nos nós da estrutura (Equação 2.16), u é o vetor das incógnitas nodais e K é a matriz de rigidez global definida na Equação 2.15.

$$[K] = \sum_{e=1}^n [K_{ij}^e] \quad (2.15)$$

em que K é a matriz de rigidez global, obtida pela combinação da matriz de rigidez dos elementos K_{ij}^e , em um processo sistemático de montagem.

$$\{F\} = \{Q\} + \sum_{e=1}^n \{R_i^e\} \quad (2.16)$$

$$\{F\} = [K] \{u\} \quad (2.17)$$

em que F é o vetor global das forças nodais, Q é o vetor de forças externas aplicadas no nós, R_i^e é o vetor das forças aplicadas nodais definida na Equação 2.9.

Soriano (2009) apresentou um processo sistemático para a determinação da matriz de rigidez global K da estrutura em comportamento linear não dependente do tempo. Neste processo, a matriz de rigidez do elemento é definida em termos de seus parâmetros nodais. Os coeficientes de rigidez do elemento são transformados do sistema de referência local para o sistema de referência global e são somados de forma a garantir a igualdade dos parâmetros nodais nas interfaces dos elementos, Equação 2.15.

Para Campilho (2012), como o sistema da Equação 2.17 tem incógnitas nos vetores F e u , o sistema é inicialmente condensado por consideração apenas das variáveis desconhecidas em u . Os valores de u são depois utilizados para extrair do mesmo sistema de equações as variáveis secundárias em F . Como é comum estes sistemas de equações serem constituídos por dezenas de milhares de equações, e como K é simétrica (e em banda), é possível utilizar métodos de resolução otimizados que minimizam o espaço de armazenamento e esforço computacional.

Oñate (1995) apresentou equações para determinação do vetor tensões σ e do vetor deformações ε , Equações 2.18 e 2.19.

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u\} \quad (2.18)$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\} \quad (2.19)$$

em que o vetor σ representa as tensões, D é a matriz constitutiva (elasticidade), ε é o vetor deformações, B é a matriz deslocamento-deformação e u é o vetor global dos deslocamentos nodais.

Mais informações sobre o MEF na análise estrutural podem ser encontradas em (SZABO; BABUĀŠKA, 1991), (COOK et al., 1974), (SORIANO, 2009), (ELOY, 2011), (ZIENKIEWICZ; CHEUNG, 1967), (ASSAN, 2003), (REDDY, 1993), (BELYTCHKO; FISH, 2009), (SEGERLIND, 1984) e (OÑATE, 1995).

2.4.6 Análise estática não linear

As estruturas de edifícios em concreto armado apresentam comportamento não linear, esse comportamento é devido a não linearidade física e geométrica. A não linearidade física surge em função da relação constitutiva não linear entre tensões-deformações, deste modo a lei de *Hooke* não é válida. A não linearidade geométrica está relacionada com o aumento do

deslocamento procedente do acréscimo de carga gerado pela posição deformada da estrutura, ou seja, a posição geométrica não deformada difere sensivelmente da geometria deformada.

Plumbridge, Matela e Westwater (2003) apresentaram as formulações para análise linear e não linear pelo MEF e compararam as principais diferenças entre essas análises, Tabela 2.1.

Bueno e Loriggio (2016b) ressaltam que a escolha do procedimento mais adequado a ser usado depende de vários fatores, como por exemplo a magnitude dos deslocamentos e rotações na estrutura, o nível dos esforços normais atuantes, a sensibilidade da estrutura aos efeitos de segunda ordem, entre outros.

Peres, Penna e Pitangueira (2014) destacam que o desenvolvimento do MEF e dos modelos para análise não linear de estruturas tornaram a análise numérica uma alternativa viável e amplamente difundida, permitindo a modelagem de várias estruturas, compostas por diferentes materiais e sob o efeito de solicitações e restrições diversas.

Segundo Cook et al. (1974), na mecânica estrutural, a não linearidade pode ser classificada em não linearidade do material, geométrica e de contato. Os problemas dessas categorias são não lineares porque a rigidez e as forças atuantes são funções dos deslocamentos ou deformações.

Para Soriano (1996), uma maneira de resolver esses problemas é por meio de um processo incremental-iterativo, em que se busca uma configuração de equilíbrio da estrutura para uma carga externa. Neste processo incremental-iterativo o vetor P , que depende dos deslocamentos u , tem que ser aproximado em sucessivas iterações (para cada incremento) até que o vetor R seja nulo, Equação 2.20. Sendo P definido na Equação 2.21 em função do vetor de tensões σ que satisfaz as relações constitutivas dos materiais.

$$\{R\} = \{F\} - \{P\} \quad (2.20)$$

$$\{P\} = \int_0^{V_e} [B]^T \{\sigma\} dV \quad (2.21)$$

em que P é o vetor forças nodais equivalentes que depende do deslocamento u , R é vetor força residual de equilíbrio (desequilibrada), B_i^T é a transposta da matriz deslocamento-deformação e σ é o vetor tensões.

O algoritmo de solução de *Newton-Raphson* é comumente utilizado em problemas não lineares modelados em elementos finitos. Para Alves Filho (2012) o método *Newton-Raphson* é

Tabela 2.1 – Comparação entre a análise não linear e linear

Característica	Linear	Não linear
Carga-deslocamento	Os deslocamentos são linearmente dependente das cargas aplicadas.	As relações de deslocamento de carga são não linear.
Relação de tensão-deformação	Considera uma relação linear entre tensão e deformação.	Com a não linearidade material, este relacionamento é uma função não linear de deformação, tensão e/ou tempo.
Magnitude,dos deslocamentos	Alterações são assumidas como pequenas e são ignoradas. O estado original (não deformada) é utilizado como o estado de referência.	Os deslocamentos podem não ser pequeno; uma atualização do estado de referência pode ser necessária.
Propriedades do material	Propriedades lineares elásticas são geralmente fáceis de obter.	Propriedades não lineares podem ser difícil de obter.
Reversibilidade	O comportamento da estrutura é totalmente reversível após a remoção das cargas externas.	Após a remoção de cargas externas,o estado final pode ser diferente do estado inicial.
Condições de contorno	Permanecem inalteradas durante toda a análise.	Pode mudar, por exemplo, uma mudança na área de contato.
Sequência de carregamento	Não é importante. O estado final não é afetado pelo histórico de carga.	O comportamento da estrutura pode depender do histórico de carga.
Iterações e incrementos	A carga é aplicada em uma etapa de carregamento sem iterações.	A carga é muitas vezes dividida em pequenos incrementos com iterações realizadas para,garantir que o equilíbrio seja satisfeito em cada carga incremento.
Tempo computacional	Relativamente pequeno em comparação com problemas não linear.	Devido às muitas etapas de solução necessárias para a incrementação de carga e iterações, o tempo computacional é alto.
Utilização dos resultados	A hipótese da superposição dos efeitos é válida, os resultados podem ser fatorados e combinado.	A combinando de resultados não é possível, não é válido a superposição dos efeitos.
Estado inicial de tensão/deformação	Sem importância.	Geralmente necessária para problemas com não linearidade no comportamento do material.

Fonte: Adaptado de (PLUMBRIDGE; MATELA; WESTWATER, 2003)

um dos métodos mais importantes para o entendimento das estratégias iterativas. Outros métodos numéricos podem ser utilizados no processo de implementação computacional de uma rotina para análise não linear, tais como: método de *Newton-Raphson* padrão, método de *Newton-Raphson* modificado, método do comprimento de arco constante ("*Arc-Length Method*"), técnica do comprimento de arco elíptico, técnica do comprimento de arco esférico, técnica do comprimento de arco cilíndrico, técnica do comprimento de arco linearizado, dentre outros métodos.

Silva (2017) ratificou os conceitos de análise não linear e descreveu alguns dos métodos simplificados existentes, e apresentou alguns exemplos de validação numérica para a análise não linear geométrica empregando o método dos dois ciclos iterativos. Comparou os resultados das simulações pelo método dos dois ciclos iterativos com os resultados das simulações pelo Método de *Newton-Raphson* e obteve resultados satisfatórios para o entendimento do comportamento estrutural dos modelos.

Seixas (2003) realizou um estudo do comportamento não linear de modelos estruturais em concreto armado e validou as simulações numéricas em MEF com dados experimentais da literatura, e obteve uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais das colunas analisadas, e comprovou que os modelos numéricos são capazes de acompanhar de forma bastante aproximada as curvas carga-deslocamentos experimentais e de prever com precisão satisfatória as cargas de ruptura das colunas. O que evidencia a potencialidade e precisão do MEF para análise não linear de diferentes modelos estruturais.

Mais informações sobre o MEF na análise não linear de estruturas podem ser encontradas em (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), (CRISFIELD, 1991), (CRISFIELD, 1997), (COOK et al., 1974), (ALVES FILHO, 2012) e (BATHE, 2014).

2.4.7 Não linearidade geométrica

Para Corrêa (1991), uma análise com não linearidade geométrica envolve o estabelecimento do equilíbrio na configuração deformada da estrutura, computando-se os deslocamentos ocorridos. As deformações não se expressam linearmente em função desses deslocamentos e a estrutura sobre alterações de rigidez de acordo com a magnitude das deformações presentes.

Para Zermiani (1998), na análise da não linearidade geométrica de uma estrutura, objetiva-se a determinação das ações internas considerando os efeitos de segunda ordem (posição deformada). Os efeitos de segunda ordem são aqueles oriundos da mudança de geometria da estrutura

ou da barra com a incidência de carregamento externo. Em uma análise não linear, os efeitos de segunda ordem podem ser causados por diferentes formas, conforme Quadro 2.3.

De acordo com Segnini (2000), entende-se por não linearidade geométrica os efeitos causados em uma estrutura devido a mudanças na geometria, essas mudanças na geometria de uma estrutura podem ocorrer de diversas formas: grandes deformações, grandes rotações e grandes deslocamentos. No primeiro caso, a mudança na geometria é causada pelas deformações que não podem mais ser consideradas pequenas. No segundo caso, as rotações são grandes e afetam a geometria original, podendo ser pequenas as deformações. E no terceiro, caso os deslocamentos de corpo rígido são grandes, as rotações e as deformações podem ser pequenas.

Para Parente Junior et al. (2014), a análise não linear geométrica pode ser realizada utilizando a formulação lagrangiana ou corrotacional. Segundo Araújo da Silva (2009), a formulação referencial lagrangiana é dividida em dois tipos, referencial lagrangiano total ou referencial lagrangiano atualizado. No primeiro tipo, o referencial sempre corresponde à configuração da estrutura indeformada e descarregada, ou seja, trata-se de um referencial fixo. No segundo tipo, o referencial corresponde à última configuração de equilíbrio calculada e, portanto, apresenta um estado inicial de tensões, ou seja, trata-se de um referencial variável.

Quadro 2.3 – Causas do efeito da não linearidade geométrica

Causas do Efeito da Não Linearidade Geométrica
1. A influência da força axial na rigidez à flexão do elemento de barra.
2. Os efeitos dos deslocamentos relativos perpendiculares ao eixo axial. A combinação destes dois é conhecido como efeito P- Δ .
3. A mudança do comprimento da barra quando da existência de uma força axial. A combinação do primeiro com este terceiro é conhecido como efeito P- δ .
4. Excentricidades devido à falhas construtivas; as falhas construtivas, para algumas estruturas estão presentes e podem causar excentricidades à linha de carregamento, ocasionando uma alteração da geometria inicialmente proposta e por conseguinte, uma nova distribuição dos esforços.
5. Zonas de deformações diferenciadas devido às irregularidades geométricas da barra da estrutura. Representa o caso em que o eixo da barra da estrutura não é retilíneo por defeito de fabricação ou outro motivo e esta imperfeição vai adicionar à estrutura esforços que deverão ser considerados.

Fonte: Adaptado de (ZERMIANI, 1998)

Para Araújo da Silva (2009), a formulação referencial corrotacional possui a peculiaridade de poder ser utilizado em associação com os dois outros sistemas de referência, pois se trata de um sistema auxiliar, chamado sistema base, fixado nos nós do elemento e que são utilizados para cálculo, no nível do elemento, dos deslocamentos, mediante o qual os deslocamentos são separados em duas parcelas: uma correspondente ao movimento de corpo rígido e a outra referente à deformação do elemento. Segundo Rodrigues (2000), essa formulação corrotacional

permite que a solução avance sempre mais na trajetória de equilíbrio em relação à formulação tradicional na análises não linear geométrica e/ou física.

2.4.8 Método de *Newton-Raphson*

O método de *Newton-Raphson* é um processo iterativo que permite a resolução de equações não lineares, preciso e amplamente utilizado em análises não lineares de problemas de engenharia estrutural. Lopes (2008) aponta que esse método é comumente utilizado pelos programas de elementos finitos disponíveis atualmente.

Para Araújo da Silva (2009), o modelo de análise incremental/iterativa pelo método de *Newton-Raphson* é sem dúvida o mais difundido na comunidade científica para análise não linear de sistemas estruturais e consiste na aplicação fracionada do carregamento, chamado incremento de carga, cumulativamente ao longo da análise até que o carregamento seja todo aplicado e as equações algébricas de equilíbrio sejam resolvidas por um processo iterativo.

Segundo Bathe (2014), Cook et al. (1974), Reddy (1993) e Soriano (1996), a Equação 2.17 pode ser reescrita para problemas não lineares na Equação 2.22, correspondente ao incremento $n - 1$.

$$\{F\}_n - \{P\}_{n-1} = [K_T]_{n-1} \{\Delta u\}_n \quad (2.22)$$

$$\{u\}_n = \{u\}_{n-1} + \{\Delta u\}_n \quad (2.23)$$

$$[K_T] = \frac{d\{P\}}{d\{\Delta u\}} \quad (2.24)$$

em que K_T é a matriz de rigidez tangente definida na Equação 2.24 e os deslocamentos para o incremento n são expressos na Equação 2.23. Esses ciclos corretivos continuam até que as cargas residuais R e os deslocamentos incrementais Δu sejam suficientemente pequenos de acordo com a precisão, Equação 2.20.

Sindel e Tezcan (1996), apresentaram mais detalhes sobre a formulação da matriz de rigidez tangente K_T . Bathe (2014), Alves Filho (2012), Bhavikatti (2005), Reis e Camotim (2012), Plumbridge, Matela e Westwater (2003), Parente Junior et al. (2014), Rodrigues (2000), apresentaram uma outra forma de expressar a matriz de rigidez tangente K_T , Equação 2.25. Essa

matriz de rigidez tangente K_T pode ser decomposta em duas parcelas K_G e K_E , a primeira parcela relativa ao comportamento não linear geométrico e a segunda referente ao comportamento elástico linear.

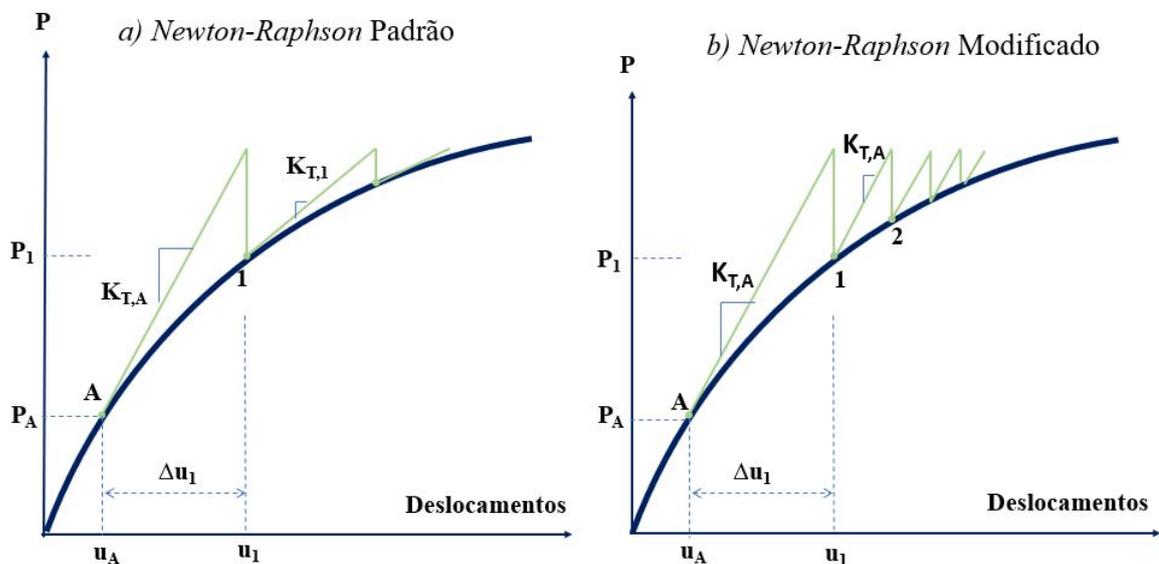
$$\left[K_T \right] = \left[K_G \right] + \left[K_E \right] \quad (2.25)$$

em que K_E é denominado de matriz de rigidez elástico e K_G de matriz de rigidez geométrica.

Velasco et al. (2014) apresentaram os conceitos da análise não linear de estruturas e afirmaram que: a matriz de rigidez K_T deve ser capaz de relacionar, com exatidão, os incrementos de deslocamentos e forças; a precisão do método depende da exatidão da rigidez tangente e do tamanho dos passos de carga.

Para Alves Filho (2012), o método *Newton-Raphson* possui duas definições, que são apresentadas como método de *Newton-Raphson* padrão e *Newton-Raphson* modificado. No método de *Newton-Raphson* padrão a matriz de rigidez tangente é atualizada em cada iteração e no método de *Newton-Raphson* modificado a matriz de rigidez tangente é atualizada uma única vez no início de cada incremento. A Figura 2.7 representa em um diagrama a relação entre forças P e deslocamentos u em uma análise não linear pelo método de *Newton-Raphson* padrão (a) e modificado (b). Em (a), a matriz de rigidez K é atualizada em cada iteração, para cada incremento de força P . Em b), a matriz de rigidez K é constante e atualizada uma única vez no início de cada incremento de força P .

Figura 2.7 – Métodos de *Newton-Raphson* padrão (a) e modificado (b)



Fonte: Adaptado de (COOK et al., 1974)

2.4.9 Critério de convergência

No método de *Newton-Raphson* o ciclo iterativo de aproximações sucessivas busca conduzir a resposta numérica para um erro mínimo. Segundo Cook et al. (1974) e Zienkiewicz e Taylor (2000), as iterações de equilíbrio podem cessar quando os resultados aproximados atenderem os critérios de convergência. Dois critérios de convergência são apresentados, a convergência dos deslocamentos Equação 2.26 e a convergência das forças Equação 2.27.

$$\left\| \{ \Delta u \} \right\| < \varepsilon_{TOL}^u \left\| \{ u \} \right\| \quad (2.26)$$

$$\left\| \{ R \} \right\| < \varepsilon_{TOL}^R \left\| \{ F \} \right\| \quad (2.27)$$

em que no controle dos deslocamentos, exige-se que a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais Δu seja menor que os deslocamentos totais da etapa de carga u vezes um valor de tolerância de deslocamentos ε_{TOL}^u , Equação 2.26. No controle das forças, exige-se que a norma Euclidiana das forças residuais R do incremento de carga em análise seja menor que a carga F do início do incremento vezes a tolerância de forças ε_{TOL}^F .

Para Zienkiewicz e Taylor (2000) e Rodrigues (2000), erros podem ocorrer no caso da utilização de apenas um destes tipos de verificação. Por exemplo, o erro devido à solução das equações discretas não lineares é um aditivo ao erro devido à discretização, para tal consideração é recomendável a verificação da norma de energia, Equação 2.28. Segundo Defilippo (2007) e Rodrigues (2000), é importante que exista um equilíbrio entre a precisão dos resultados e o custo computacional necessário para tal procedimento, levado em conta que valores muito altos podem levar a resultados pouco precisos e, caso contrário, valores muito baixos, à uma precisão exagerada e desnecessária, com custos computacionais excessivos.

$$\left\| \{ \Delta u \}^T \{ R \} \right\| < \varepsilon_{TOL}^E \left\| \{ u \}^T \{ F \} \right\| \quad (2.28)$$

em que Δu é a transposta do vetor dos deslocamentos incrementais, R é o vetor das forças residuais do incremento de carga em análise, u^T é a transposta do vetor dos deslocamentos totais da etapa de carga, F é o vetor força no início do incremento.

2.5 Processo Iterativo P-Δ

O Processo Iterativo P-Δ é um procedimento numérico que pode ser utilizado para estimar o comportamento não linear geométrico de estruturas, permite estimar a trajetória de equilíbrio de estruturas. Esse processo é simples, de fácil implementação computacional e comumente utilizados para análise dos efeitos de segunda ordem de estruturas civis.

Para Reis e Camotim (2012), em geral as equações são escritas na configuração indeformada da estrutura, sendo os efeitos geometricamente não lineares incorporados de uma forma indireta e iterativa. Nesse tipo de análise, a resolução de um problema não linear é feita efetivamente pela resolução de sucessivos problemas lineares.

Para Gaiotti e Smith (1989), Moncayo e Junior (2011) e Delalibera et al. (2014), em cada iteração obtém-se uma nova força lateral fictícia (H'_i) de um andar i . Esse procedimento sucessivo é repetido até alcançar a posição de equilíbrio e pode ser aplicado em edifícios de múltiplos andares (Figura 2.8 e Figura 2.9). Os esforços cortantes fictícios V' podem ser obtidos pela Equação 2.29 e as cargas laterais fictícias H' pela Equação 2.30.

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (2.29)$$

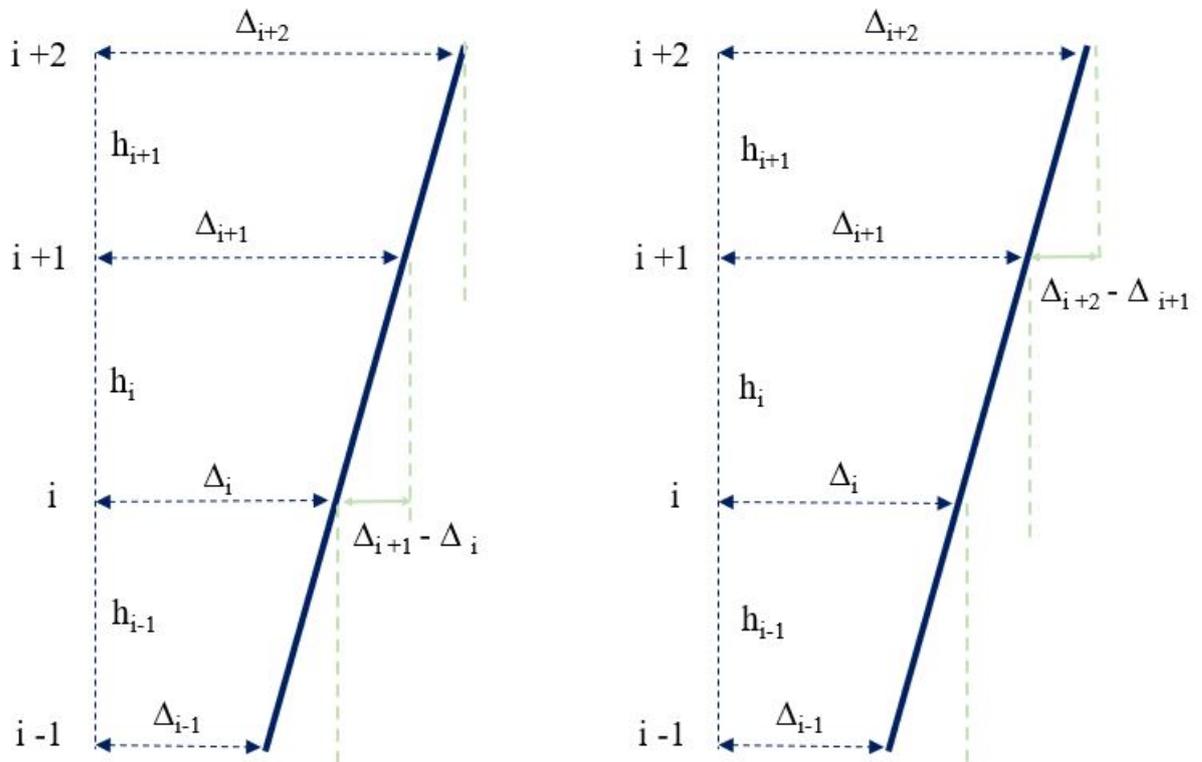
$$H'_i = V'_{i-1} - V'_i \quad (2.30)$$

em que H' é a força lateral fictícia de um andar i , V' é o esforço cortante fictícios, P são as forças verticais aplicadas em cada nível i , h é a diferença entre os níveis i (altura), Δ é o deslocamento horizontal de um andar i (Figura 2.8 e 2.9).

Delalibera et al. (2014) ressaltaram a importância da utilização de um processo de cálculo analítico, para análise de segunda ordem, em modelos simétricos e retangulares, sem alteração da geométrica dos pavimentos, pois estes fornecem uma resposta coerente com a realidade do comportamento da estrutura, e afirmou que os resultados são mais conservadores que processos de cálculo numéricos computacionais.

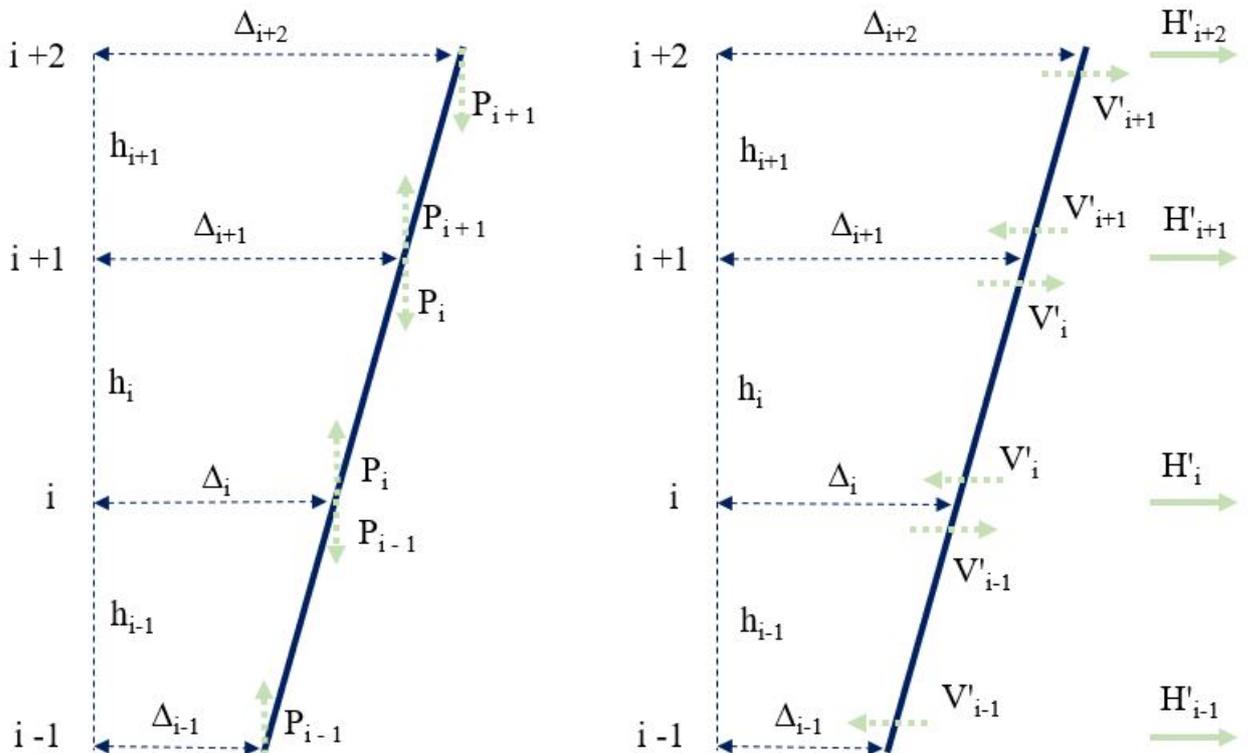
Para CISC (1980 apud GAIOTTI; SMITH, 1989), o processo iterativo P-Δ é repetido para cada incremento de força com base nos valores do deslocamento, até que o valor da iteração anterior não mude significativamente. Normalmente, duas ou três iterações são suficientes, se os resultados não convergem após cinco iterações, a estrutura pode ser classificada como instável.

Figura 2.8 – Deslocamentos horizontais entre os pavimentos



Fonte: Adaptado de (MONCAYO; JUNIOR, 2011)

Figura 2.9 – Esquema de forças verticais (a) e horizontais fictícias (b)



Fonte: Adaptado de (MONCAYO; JUNIOR, 2011)

2.6 Parâmetro de instabilidade α

Bueno e Loriggio (2016b) relataram a importância da verificação dos efeitos de segunda ordem para garantia da segurança da estrutura e constataram que o parâmetro de instabilidade α é uma forma efetiva para avaliação dos efeitos de segunda ordem na análise estática não linear de um pórtico plano de concreto armado.

Beck e König (1967), definiram o parâmetro α para análise de estabilidade de edifícios composto por elementos lineares submetidos as ações laterais e verticais. Segundo a NBR-6118 (ABNT, 2014), as estruturas reticuladas simétricas podem ser consideradas como sendo de nós fixos se seu parâmetros de instabilidade α forem menor que o valor α_1 , conforme Equações 2.31 e 2.32.

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{(E_{sec} I_c)}} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} n \leq 3 &\Rightarrow \alpha_1 = 0,2 + 0,1n \\ n \geq 4 &\Rightarrow \alpha_1 = 0,6 \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que:

n é o número de níveis de barras horizontais (andares) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;

H_{tot} é a altura total da estrutura, medida a partir do topo da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo;

N_k é o somatório de todas as cargas verticais atuantes na estrutura (a partir do nível considerado para o cálculo de H_{tot}), com seu valor característico;

$E_{sec} I_c$ representa o somatório dos valores de rigidez de todos os pilares na direção considerada. No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão $E_{sec} I_c$ de um pilar equivalente de seção constante.

Freitas, Luchi e Ferreira (2016) apresentaram o parâmetro de instabilidade α , com aplicação simulação computacional no *software* CAD/TQS[®], para análise de colunas em concreto armado com variação de tensão de compressão. Os resultados das simulações foram correlacionados com os valores de tensão de compressão das colunas.

2.7 Coeficiente γ_z

Segundo Franco e VASCONCELOS (1991), a utilização do γ_z como majorador dos momentos de primeira ordem fornece uma boa estimativa dos resultados da análise de segunda ordem; o método foi empregado com sucesso em edifícios altos com γ_z da ordem de 1,2 ou mais.

Para Kimura (2007), o coeficiente γ_z é um parâmetro que avalia a estabilidade global de um edifício de concreto armado de forma simples, rápida e bastante eficiente. Sua formação foi inteiramente deduzida e criada pelos Engenheiros brasileiros *Augusto Carlos de Vasconcelos* e *Mário Franco*. Edifícios de concreto armado com coeficiente γ_z superiores a 1,3 possuem um grau de instabilidade elevado, o ideal é projetar estruturas com um coeficiente γ_z inferior a 1,2.

Segundo a NBR-6118 (ABNT, 2014), o coeficiente de majoração dos esforços globais de primeira ordem para obtenção dos finais de segunda ordem, γ_z , válido para estruturas reticuladas de no mínimo quatro andares é dado pela Equação 2.33. As estruturas com $\gamma_z \leq 1,1$ são consideradas de nós fixos.

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (2.33)$$

em que: $\Delta M_{tot,d}$ é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estruturas; $M_{1,tot,d}$ é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de primeira ordem.

Bueno e Loriggio (2016b) utilizaram o coeficiente γ_z para o estudo do equilíbrio e das relações cinemáticas na configuração deformada em uma análise estática. Os autores relatam que o coeficiente γ_z apresenta resultados adequados para a obtenção dos efeitos de segunda ordem de um modelo de pórtico plano em concreto armado, tanto para deslocamentos quanto para os momentos fletores. Também verificaram que a aplicação do procedimento aproximado é simples e não requer conhecimentos avançados sobre análise não linear geométrica, como em outros métodos refinados.

Freitas, Luchi e Ferreira (2016) apresentaram o coeficiente γ_z e aplicaram os conceitos na simulação computacional no *software* CAD/TQS[®] de modelos de colunas em concreto armado

com variação da tensão de compressão. Os resultados das simulações foram correlacionados com os valores de tensão de compressão das colunas.

Oliveira et al. (2014) apresentaram uma alternativa para estimar o coeficiente majorador dos momentos de primeira ordem que deve ser aplicado em cada pavimento das estruturas de concreto armado, a partir dos valores obtidos para os coeficientes γ_z e β_2 . Esse coeficiente β_2 é geralmente utilizado para avaliação da estabilidade de estruturas em aço. As simulações foram realizadas com auxílio da ferramenta computacional ANSYS[®]. O processo simplificado de obtenção dos esforços finais é avaliado levando-se em conta a variação dos efeitos de segunda ordem ao longo da altura das estruturas.

Oliveira et al. (2017) realizaram um estudo da obtenção dos esforços finais utilizando o coeficiente γ_z levando em conta a variação dos efeitos de segunda ordem ao longo da altura dos edifícios. Os autores realizaram simulações numéricas para análise de primeira e segunda ordem utilizando a ferramenta computacional ANSYS[®] de diversos edifícios de médio porte em concreto armado. O estudo apresentado foi realizado para cada pavimento das estruturas e conduzido considerando a relação entre os momentos obtidos pela análise em segunda e primeira ordem. Os autores constataram por meio de uma análise estatística que essa relação varia ao longo da altura das estruturas e que conduz a um valor inferior a 1,05.

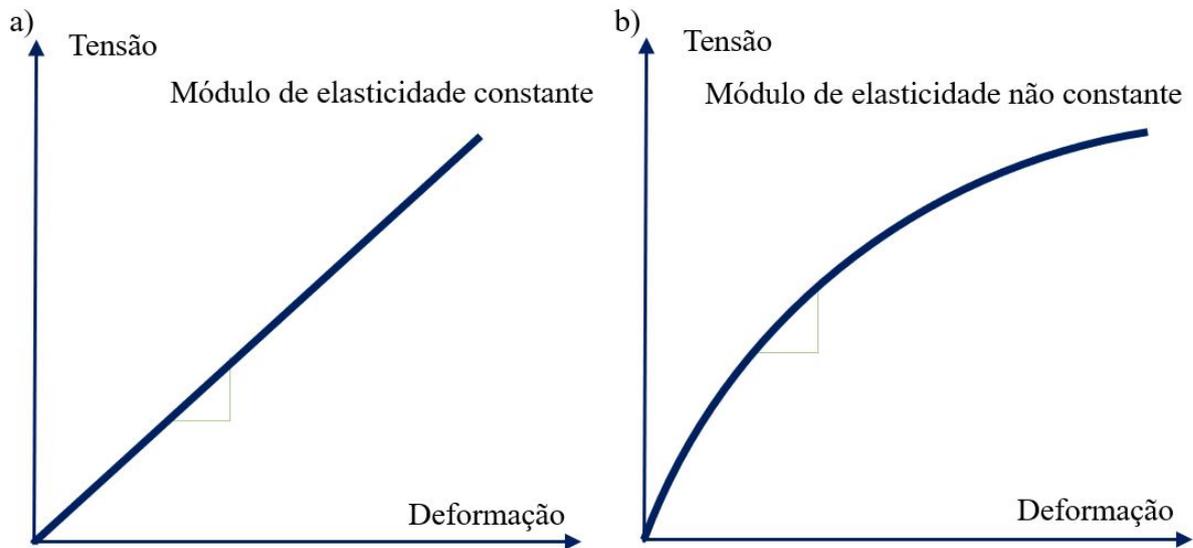
2.8 Não linearidade física

Na maioria dos projetos de estruturas, realizam-se simplificações quanto ao material. Um exemplo, é a consideração do material como elástico linear, o que nem sempre reflete a realidade do comportamento do material.

Para Zermiani (1998), a não linearidade física ou do material é uma característica da maioria dos materiais utilizados para fins estruturais em engenharia. Diz-se que um material é não linear quando não há uma proporção constante entre a tensão e a deformação do material, quando submetido a um carregamento externo, conforme representado na Figura 2.10.

Segundo a norma NBR-6118 (ABNT, 2014), a não linearidade física, presente nas estruturas de concreto armado, deve ser obrigatoriamente considerada. E pode ser considerada através da construção da relação momento-curvatura para cada seção, com armadura suposta conhecida, e para o valor da força normal atuante. A não linearidade física também pode ser considerada de forma aproximada pela redução da rigidez, denominada de rigidez secante, Equações 2.34, 2.35 e 2.36.

Figura 2.10 – Diagramas tensão-deformação (a) Comportamento linear do material (b) Comportamento não linear do material



Fonte: Adaptado de (ZERMIANI, 1998)

A rigidez secante dos elementos estruturais classificados como lajes é definidas na Equação 2.34.

$$EI_{sec} = 0,3E_{ci}I_c \quad (2.34)$$

em que a rigidez secante dos elementos estruturais classificados como vigas é expressa de acordo com os valores A'_s e A_s na Equação 2.35.

$$\begin{aligned} A'_s \neq A_s &\Rightarrow EI_{sec} = 0,4E_{ci}I_c \\ A'_s = A_s &\Rightarrow EI_{sec} = 0,5E_{ci}I_c \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que a rigidez secante para os elementos estruturais do tipo pilar (ou colunas) é definida na Equação 2.36. A'_s é a área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão e A_s é a área da seção transversal da armadura longitudinal de tração.

$$EI_{sec} = 0,8E_{ci}I_c \quad (2.36)$$

em que EI_{sec} é a rigidez secante, I_c é o momento de inércia da seção de concreto e E_{ci} é o módulo de elasticidade inicial do concreto.

E_{ci} deve ser determinado segundo o método de ensaio estabelecido na ABNT (ABNT, 2017), quando não forem realizados ensaios, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade inicial do concreto E_{ci} , em função da resistência característica do concreto f_{ck} , Equações 2.37 e 2.38.

$$20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \therefore E_{ci} = \alpha_e 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (2.37)$$

$$55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \therefore E_{ci} = 21500 \alpha_e \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.38)$$

em que α_e é o parâmetro em função da natureza do agregado, com valores de: 1,2 para basalto e diabásio; 1,0 para granito e gnaisse; 0,9 para calcário e 0,7 para arenito.

3 METODOLOGIA

3.1 Modelo estrutural

O modelo proposto neste trabalho, para estudo do comportamento de uma coluna em concreto armado, foi desenvolvido no Departamento de Engenharia da Universidade Federal de Lavras - UFLA. Nesta seção serão detalhadas as características do modelo desenvolvido.

3.1.1 Características geométricas do Modelo Estrutural

Em vista da necessidade de um modelo com comportamento não linear geométrico e sem efeitos de flambagem, foi proposto uma coluna com 5 metros de altura e seção transversal quadrada de 0,40 m \times 0,40 m, área transversal 0,1600 m², momento de inércia de $2,133333 \times 10^{-3}$ m⁴ nos eixos x e y . Com um comprimento de flambagem $L_e = 10$ m ($L_e = 2L$), definido conforme Figura 2.1. Segundo Scadelai (2004), uma coluna com essas características geométricas pode ser classificada como de esbeltez média, em função do índice do esbeltez, Equação 2.1. Como o índice de esbeltez foi $\lambda = 86,60$, valor muito próximo do limite que caracteriza a estrutura em esbelta, optou-se nesse trabalho pela classificação de esbelta.

Na concepção do modelo em relação as condições de apoio e geometria, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas:

- a) Foi adotado o modelo de barra para estudo do comportamento do problema proposto;
- b) Os graus de liberdade estão perfeitamente restringidos na base da coluna, sem nenhum deslocamento prescrito;
- c) Os graus de liberdade da borda superior estão perfeitamente livres, sem nenhuma restrição ao movimento;
- d) A estrutura está em equilíbrio estável.

3.1.2 Características dos materiais

O modelo proposto é de uma coluna em concreto armado, com uma resistência característica f_{ck} de 35 MPa e coeficiente de *Poisson* de 0,2. Em relação ao comportamento do material, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas:

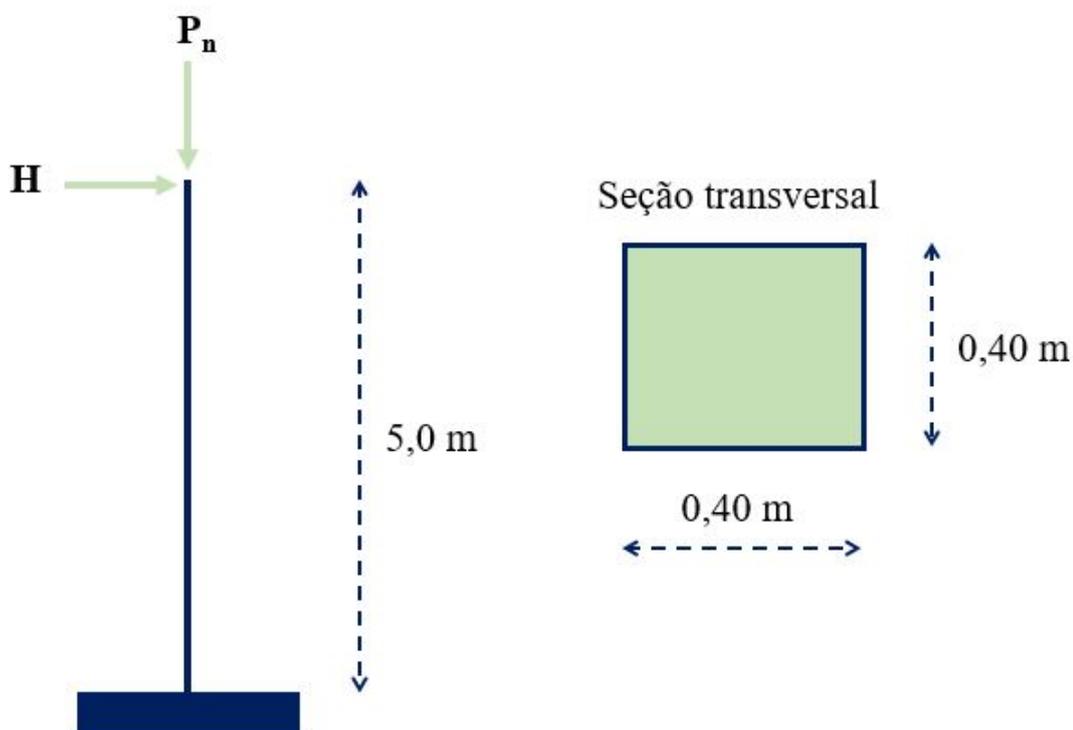
- a) A seção transversal permanece plana após o início da deformação até o equilíbrio final na posição deformada;

- b) Existe uma perfeita aderência entre o concreto e o aço; a deformação específica de uma barra de aço, é igual à deformação específica do concreto adjacente;
- c) Foi utilizado um agregado de gnaiss, o que permite a estimativa do módulo de elasticidade por meio da Equação 2.37;
- d) A não linearidade do material concreto armado é considerada conforme preconiza a NBR-6118 (ABNT, 2014);
- e) O concreto armado é isotrópico e homogêneo;
- f) A área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão é igual a área da seção transversal da armadura longitudinal de tração.

3.1.3 Características dos carregamentos

As ações externas atuantes são representadas por meio das cargas H e P. Sendo H a carga horizontal localizada no topo da coluna com o valor igual a 40 kN e P a carga vertical aplicada no topo da coluna com valor igual a 8000 kN (Figura 3.1).

Figura 3.1 – Modelo estrutural da coluna em concreto armado



Fonte: Elaborado pelo autor

Algumas hipóteses simplificadoras foram especificadas para o estudo das ações:

- a) As ações externas aplicadas são estáticas e fixas, outros efeitos externos são desconsiderados;
- b) Foram desconsiderados os efeitos da deformação do concreto ao longo do tempo;
- c) Foram desconsiderados os efeitos térmicos e a retração do concreto;
- d) As cargas são aplicadas no centro geométrico da seção transversal da coluna, sem excentricidades.

3.1.4 Estabilidade estrutural

A estabilidade do modelo estrutural foi garantida estabelecendo-se um valor de carga vertical P menor que a carga crítica P_{cr} , $P \leq P_{cr}$. Sendo P_{cr} , igual a 55804,64 kN, definido pela Equação 2.4.

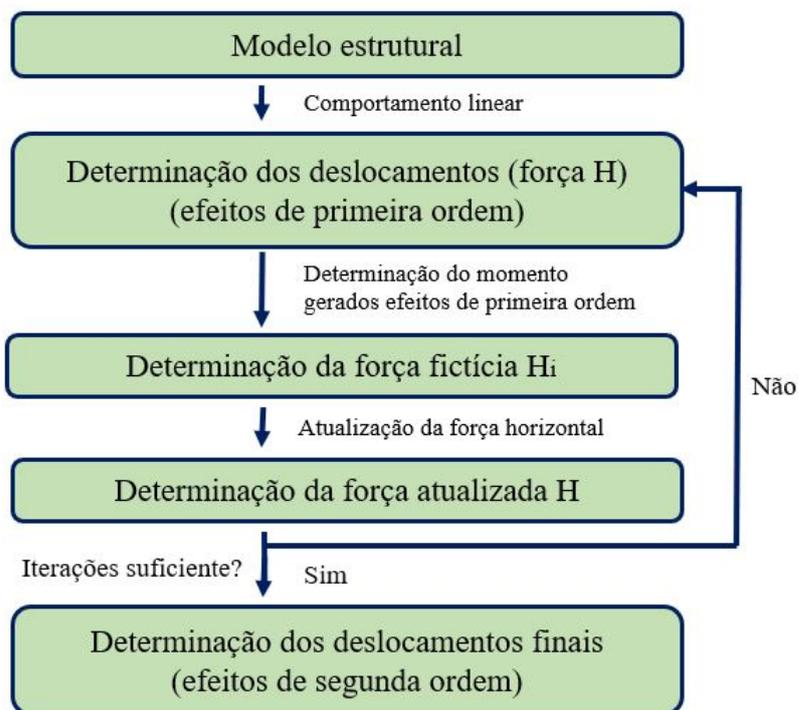
O parâmetro de instabilidade α e o coeficiente γ_z foram utilizados na avaliação da estabilidade e dos efeitos de segunda ordem da coluna em concreto armado em situação desfavorável, carga $P = 8000$ kN.

3.2 Análise não linear geométrica pelo Processo Iterativo P- Δ

O Processo Iterativo P- Δ está inserido em diferentes *software* de análise. Dentre eles, três popularmente são conhecidos pelos projetistas (EBERICK[®], SAP2000[®] e CAD/TQS[®]). Nesse trabalho uma rotina computacional foi desenvolvida em MATLAB[®] para implementação do processo iterativo P- Δ para n análises, conforme esquema da Figura 3.2.

Para o estudo da trajetória de equilíbrio pelo Processo Iterativo P- Δ , a força vertical total P foi dividida em 10 partes e aplicada de forma incremental, cada incremento com um valor correspondente a 10% da carga P . A primeira análise foi realizada para um valor de $P_1 = 0,10 \times P$, a segunda análise foi realizada com um valor de $P_2 = 0,20 \times P$, e assim sucessivamente, conforme Tabela 3.1.

De acordo com Silva (2004), para estruturas em comportamento elástico com rigidez adequada, o método converge geralmente após um ou dois ciclos de iteração. Se após cinco ciclos de iteração os resultados não convergirem a estrutura é considerada excessivamente flexível. Para Silva (2004 apud MACGREGOR; HAGE, 1977), o processo pode ser interrompido quando os deslocamentos de uma dada iteração não excedem em mais de 5% os da iteração anterior. Nesta pesquisa, o critério de convergência adotado estabelece que deve-se findar os

Figura 3.2 – Esquema simplificado do Processo Iterativo P- Δ 

Fonte: Elaborado pelo autor

ciclos de iterações quando as forças horizontais não diferirem significativamente em relação à iteração anterior.

Tabela 3.1 – Cargas para análises

Momentos (n Análises)	Cargas para n Análises
01º Análise	P01 = 0,10 P
02º Análise	P02 = 0,20 P
03º Análise	P03 = 0,30 P
04º Análise	P04 = 0,40 P
05º Análise	P05 = 0,50 P
06º Análise	P06 = 0,60 P
07º Análise	P07 = 0,70 P
08º Análise	P08 = 0,80 P
09º Análise	P09 = 0,90 P
10º Análise	P10 = 1,00 P

Fonte: Elaborado pelo autor

As análises foram efetuadas para cada valor P_n , com auxílio da ferramenta computacional MATLAB[®], no Laboratório de Processamento de Sinais da Universidade Federal de Lavras - UFLA. Os resultados foram apresentados de forma quantitativa em um gráfico que representa a trajetória de equilíbrio do modelo proposto.

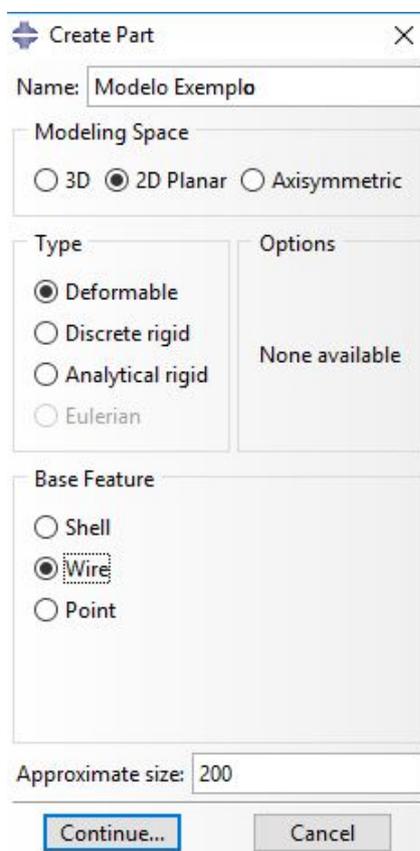
3.3 Coeficiente γ_z

Os efeitos de primeira ordem foram obtidos utilizando o método analítico de análise estática linear, com simulação numérica no *software* MATLAB[®], os resultados foram validados com simulações nos *software* ABAQUSTM Student 6.14 e livre FTOOL[®] - *Two-dimensional frame analysis tool* 3.01, no Laboratório de Processamento de Sinais da Universidade Federal de Lavras - UFLA. Foram determinados e avaliados os coeficientes γ_z das dez análises, conforme Equação 2.33 e Tabela 3.1.

3.4 Análise não linear geométrica pelo Método de Elementos Finitos

Dez cenários foram propostos para o estudo da trajetória de equilíbrio, cada análise com uma força específica P_n , conforme Tabela 3.1. No *software* ABAQUSTM, o primeiro passo para a análise foi a criação do modelo no módulo *Parts*, que possui ferramentas específicas, foi definido *Modeling Space: 2D Planar, Type: Deformable, Base Feature: Wire Planar*, conforme Figura 3.3.

Figura 3.3 – Create part



Fonte: Elaborado pelo autor

A elaboração da representação geométrica foi possível com a utilização da ferramenta *Create Lines: Connected*, com coordenadas de base ($X_{Base} = 0$ m; $Y_{Base} = 0$ m) e topo ($X_{Topo} = 0$ m; $Y_{Topo} = 5$ m).

A próxima etapa, no módulo *Property*, foi a definição das propriedades dos materiais *Elastic Type Isotropic* e os valores do *Young's Modulus* e *Poisson Ration* (Figura 3.4).

Figura 3.4 – *Create material*

The screenshot shows the 'Edit Material' dialog box with the following details:

- Name:** Material Modelo Exemplo 01
- Description:** (empty field)
- Material Behaviors:** Elastic (selected)
- General** | **Mechanical** | **Thermal** | **Electrical/Magnetic** | **Other**
- Elastic**
 - Type: Isotropic
 - Use temperature-dependent data
 - Number of field variables: 0
 - Moduli time scale (for viscoelasticity): Long-term
 - No compression
 - No tension
- Data**

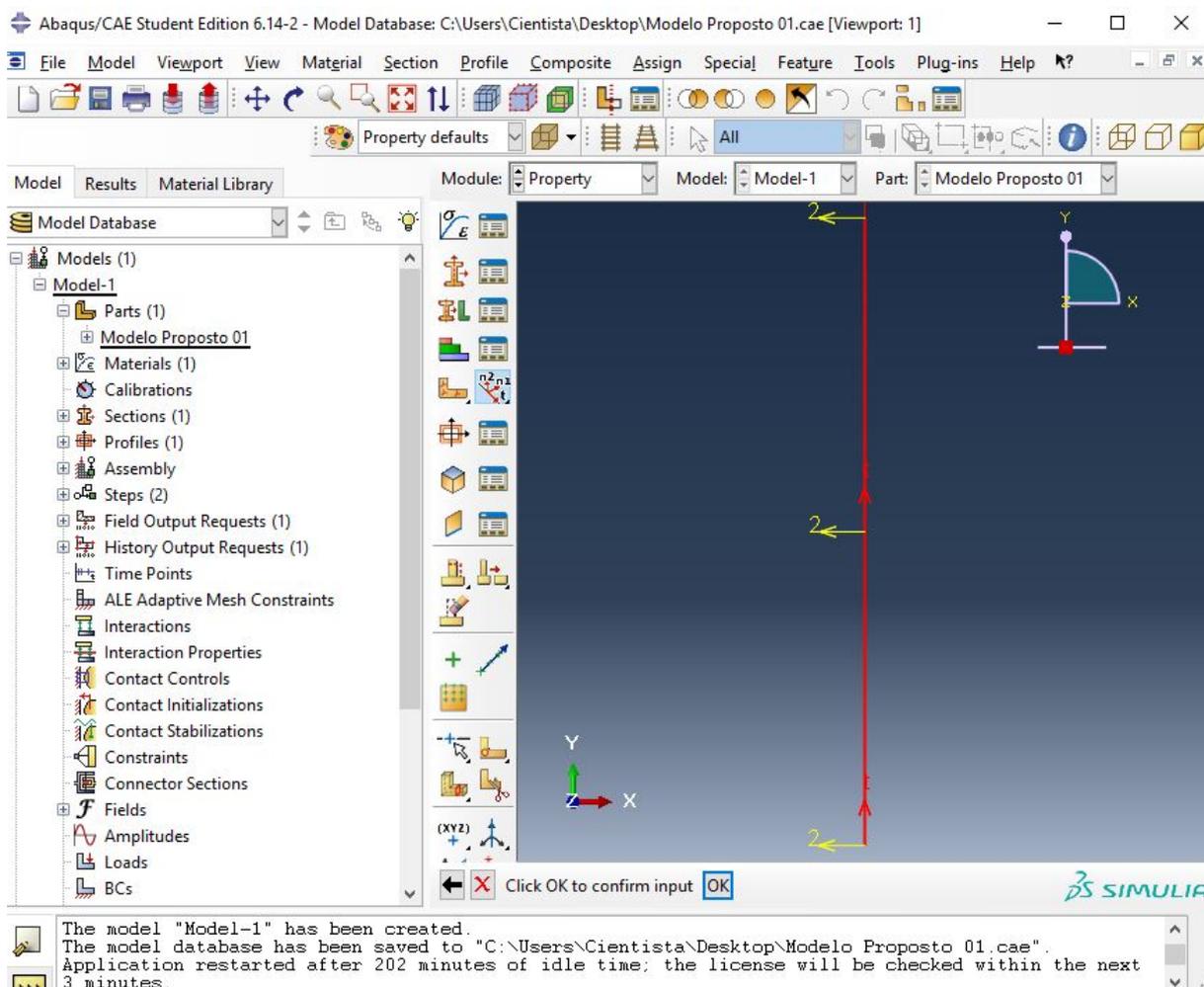
	Young's Modulus	Poisson's Ratio
1		

Fonte: Elaborado pelo autor

As seções transversais foram definidas como do tipo *Beam* e foi feito a atribuição dessas propriedades ao elemento em *Assign Section*. O módulo *Assembly* foi utilizado para *Create Instances from Parts* e montagem do conjunto(modelo) para uma posição referencial viável de análise (Figura 3.5).

As características do processo de análise foram definidas no módulo *Step, Type Static/General*, com a consideração da *NLGeom*(Não linearidade Geométrica), *Incrementation Au-*

Figura 3.5 – Assign beam orientation



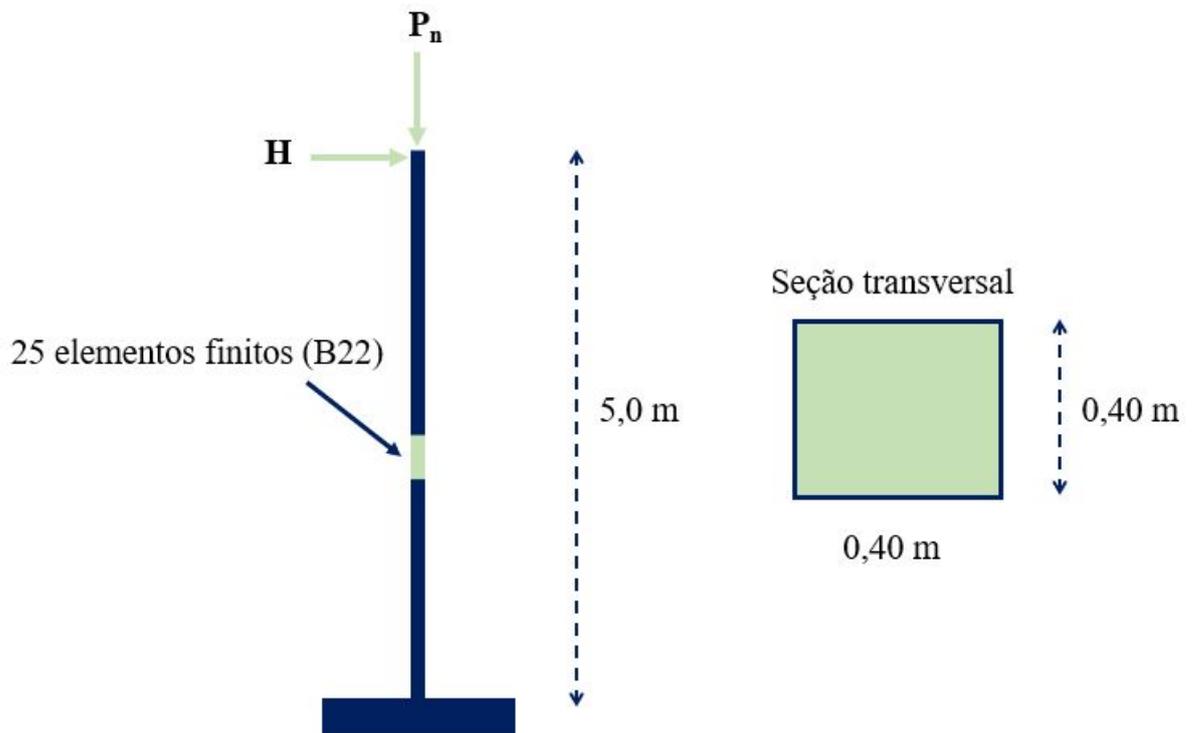
Fonte: Elaborado pelo autor

automatic, resolução de equações pelo *Method Direct*, com *Solution Technique Full Newton*. O módulo *Interaction* não foi utilizado, esse modelo não possui nenhuma iteração com outros corpos. O módulo *Load* foi utilizado para aplicação das cargas externas P_n e H , para as n análises, em *Create Load*; e para definição das condições de contorno em *Create Boundary Condition*.

No módulo *Mesh*, em *Assign Element Type*, foram definidas as características dos elementos utilizados nas simulações numéricas. Sendo, elementos do tipo *Beam* definidos em *Family*, com ordem *Quadratic* estabelecida em *Geometric Order*. Segundo o software ABAQUSTM esses elementos são intitulados de *B22 (A 3-node quadratic beam in a plane*, Figura 3.6)

O módulo *Mesh* também foi utilizado para definição da quantidade de elementos, em *Seed Edges*, optou-se pela utilização do método *By Number*, com refinamento manual do tipo h (Figura 3.7). De acordo com Soriano (2009), o refinamento do tipo h pode ser feito aumentando o número de elementos, inicia-se com a discretização do problema de meio contínuo em uma

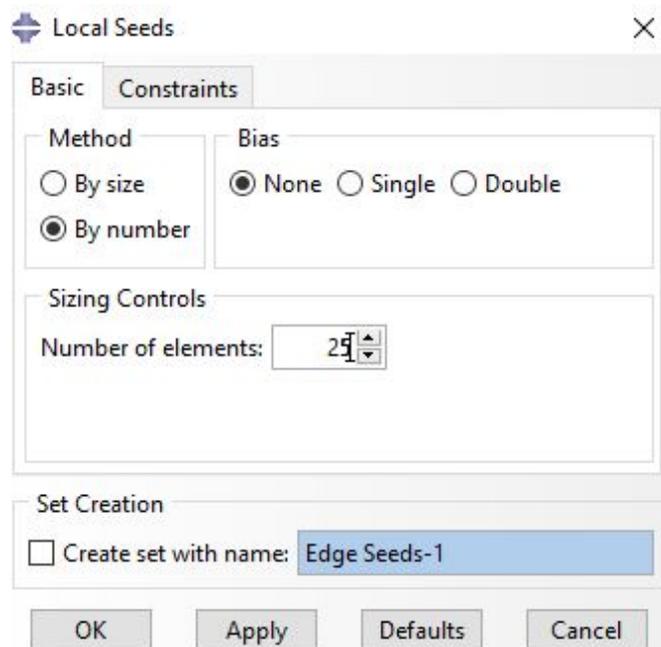
Figura 3.6 – Modelo de elementos finitos



Fonte: Elaborado pelo autor

malha simples, e, gradativamente esse modelo é refinado até chegar a resultados com a desejada acurácia. Posteriormente a ferramenta *Mesh Part* foi utilizada para criação da malha com 25 elementos finitos (pós-refinamento).

Figura 3.7 – Local seeds



Fonte: Elaborado pelo autor

No módulo de processamento *Jobs*, que faz parte da *Analysis*, foi criado um trabalho de processamento *Create Job*. Nesta etapa, após *Create Job* e *Submit*, foi realizada a visualização e o monitoramento do processo da simulação numérica. O pós-processamento foi realizado no módulo *Visualization*, onde foi realizado a representação gráfica, tratamento e seleção dos dados da análise não linear dos efeitos de segunda ordem. Esses resultados foram apresentados de forma quantitativa, no *software* MATLAB[®], em um gráfico que representa a trajetória de equilíbrio do modelo proposto. Mais detalhes sobre aplicações do MEF com o *software* ABAQUSTM, podem ser verificados em (BELYTSCHKO; FISH, 2009), (KHENNANE, 2013) e (CAMPILHO, 2012).

3.4.1 Validação das simulações numéricas

Os efeitos de primeira ordem foram validados pelo Método da Carga Unitária. De acordo com Souza (2015), o Método da Carga Unitária é uma alternativa para determinação dos deslocamentos em estruturas com comportamento linear baseada no princípios dos trabalhos virtuais. Para André et al. (2011) o princípio dos trabalhos virtuais é uma condição necessária e suficiente para o equilíbrio, quando o sistema é submetido a um conjunto de deslocamentos virtuais infinitesimais e possíveis, o que pode ser representado na Equação 3.1.

$$\delta\Gamma_i = \delta\Gamma_e, \forall \delta u \quad (3.1)$$

em que a Equação 3.1 é a expressão restrita e usual do teorema dos deslocamentos virtuais, onde $\delta\Gamma_i$ é o trabalho virtual interno, $\delta\Gamma_e$ é o trabalho virtual externo, para qualquer campo de deslocamentos virtuais ($\forall \delta u$).

Os efeitos de segunda ordem foram validados por meio de uma revisão bibliográfica de análises comparativas entre experimentação e simulações numéricas pelo MEF. Testes comparativos entre experimentos e simulações numéricas mostraram a viabilidade de utilização das simulações numéricas pelo MEF. Vale destacar o trabalho feito por Araújo da Silva (2009), que utilizou resultados numéricos de exemplos clássicos para validação dos modelos matemático-numérico para a análise não linear de instabilidade elástica de estruturas reticuladas.

3.5 Estudos comparativos

O *software* MATLAB[®] foi utilizado para análise estatística básica dos resultados das simulações numéricas. Um estudo comparativo foi realizado para avaliar os resultados dos efeitos de segunda ordem, do modelo da coluna esbelta em concreto armado, entre as duas formulações distintas: Processo Iterativo P- Δ e a Modelagem Numérica em Elementos Finitos. Onde os erros absolutos entre as simulações dos dez cenários foram obtidos pela Equação 3.2 e os erros relativos pela Equação 3.3.

$$E_A = \left| U_x^{2MEF} - U_x^{2P-\Delta} \right| \quad (3.2)$$

$$E_R = \left| \frac{U_x^{2MEF} - U_x^{2P-\Delta}}{U_x^{2MEF}} \right| \quad (3.3)$$

em que E_A é o erro absoluto entre as duas simulações (em módulo), E_R é o erro relativo entre as duas simulações em relação à simulação pelo MEF (em módulo), U_x^{2MEF} é deslocamento (efeito de segunda ordem) na horizontal (x) no topo da coluna, $U_x^{2P-\Delta}$ é deslocamento (efeito de segunda ordem) na horizontal (x) no topo da coluna pelo Processo iterativo P- Δ .

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Estabilidade estrutural

Os parâmetros de instabilidade α (Equação 2.31), foram apresentados para os dez cenários propostos na Tabela 4.1. Pode ser verificado que todos cenários apresentam parâmetros de instabilidade α maior que os limites α_1 (Equação 2.32). Os valores limites de α_1 foram iguais a 0,3 para todos cenários e foram determinados para um único nível ($n = 1$). Portanto, os efeitos de segunda ordem são significativos e o modelo estrutural pode ser classificado como de nós móveis.

Tabela 4.1 – Parâmetro de instabilidade α

Cenários	E_{sec} [kN/m]	I_c [m ⁴]	Altura [m]	P_n [kN]	α	α_1
01º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	800,00	0,59	0,30
02º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	1600,00	0,84	0,30
03º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	2400,00	1,03	0,30
04º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	3200,00	1,19	0,30
05º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	4000,00	1,33	0,30
06º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	4800,00	1,46	0,30
07º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	5600,00	1,57	0,30
08º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	6400,00	1,68	0,30
09º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	7200,00	1,78	0,30
10º Análise	26504037,43	2,1333E-03	5,00	8000,00	1,88	0,30

Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 Simulação numérica com o coeficiente γ_z

Os deslocamentos das simulações numéricas pelo método analítico de análise estática linear, com simulação numérica no *software* MATLAB[®], foram apresentados na Tabela 4.2 e validados com simulações nos *software* ABAQUSTM Student 6.14 e FTOOL[®] - *Two-dimensional frame analysis tool* 3.01. Segundo o critério da NBR-6118 (ABNT, 2014), as estruturas das oito primeiras análises em função dos coeficientes γ_z foram classificadas como de nós móveis. Foram determinados e apresentados os coeficientes γ_z (Equação 2.33) dos dez cenários propostos (Tabela 4.2).

A oitava análise, com um $\Delta M_{1,tot,d}$ que corresponde a 94,33% de $M_{1,tot,d}$, possui um γ_z elevado, com uma mudança abrupta dos valores dos coeficientes γ_z . Verificou-se que as simulações apresentam resultados negativos quando os valores de $\Delta M_{1,tot,d}$ correspondem a mais de 100% do $M_{1,tot,d}$. As duas últimas análises, 9º e 10º, apresentaram resultados inconsistentes,

negativos e que não são válidos para um estudo do comportamento não linear do problema proposto.

Tabela 4.2 – Coeficiente γ_z

Cenários	P_n [kN]	H [kN]	U_x [m]	$M_{1,tot,d}$ [kN.m]	$\Delta M_{tot,d}$ [kN.m]	γ_z
1º Análise	800,00	40,00	0,0295	200,00	23,5848	1,13
2º Análise	1600,00	40,00	0,0295	200,00	47,1696	1,31
3º Análise	2400,00	40,00	0,0295	200,00	70,7544	1,55
4º Análise	3200,00	40,00	0,0295	200,00	94,3392	1,89
5º Análise	4000,00	40,00	0,0295	200,00	117,924	2,44
6º Análise	4800,00	40,00	0,0295	200,00	141,5088	3,42
7º Análise	5600,00	40,00	0,0295	200,00	165,0936	5,73
8º Análise	6400,00	40,00	0,0295	200,00	188,6784	17,67
9º Análise	7200,00	40,00	0,0295	200,00	212,2632	-
10º Análise	8000,00	40,00	0,0295	200,00	235,848	-

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Simulação numérica pelo Método dos Elementos Finitos

Os resultados das simulações numéricas, deslocamentos da teoria de primeira ordem U_x^1 (linear) e da teoria de segunda ordem U_x^2 (não linear), pelo MEF, dos dez cenários propostos, são apresentados na Tabela 4.3. As simulações numéricas foram realizadas computacionalmente no *software* ABAQUSTM, para os diferentes cenários, todos com 25 elementos de ordem quadrática do tipo B22. Verificou-se, que o deslocamento máximo horizontal do topo da coluna foi obtido com uma carga $P_7 = 5600$ kN, conforme Tabela 4.3. Observou-se, também, para os cenários propostos, que os efeitos de segunda ordem apresentaram valores superiores que os resultados das análises de primeira ordem, podendo superar os efeitos de primeira ordem em até 46 vezes.

4.4 Simulação numérica pelo Processo Iterativo P- Δ

O Processo Iterativo P- Δ foi aplicado nos cenários propostos. Ao todo foram realizadas dez análises, em ciclos iterativos para determinação das forças fictícias e correspondentes deslocamentos. O ciclo foi interrompido quando os deslocamentos atingiram um valor nulo com precisão de quatro casas decimais. Os deslocamentos finais, denominados de efeitos de segunda ordem U_x^2 , somatório dos deslocamentos de cada iteração do processo iterativo, foram apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.3 – Simulações pelo MEF

Cenários	P_n [kN]	H [kN]	U_x^1 [m]	U_x^2 [m]
1º Análise	800,00	40,00	0,0296	0,0345
2º Análise	1600,00	40,00	0,0296	0,0413
3º Análise	2400,00	40,00	0,0296	0,0516
4º Análise	3200,00	40,00	0,0296	0,0689
5º Análise	4000,00	40,00	0,0296	0,1018
6º Análise	4800,00	40,00	0,0296	0,1888
7º Análise	5600,00	40,00	0,0296	1,3780
8º Análise	6400,00	40,00	0,0296	0,1961
9º Análise	7200,00	40,00	0,0296	0,0993
10º Análise	8000,00	40,00	0,0296	0,0664

Fonte: Elaborado pelo autor

Verificou-se, para as simulações numéricas pelo Processo Iterativo P- Δ , da coluna esbelta sugerida, que o número de iterações aumentou com o aumento das cargas. As oito primeiras análises alcançaram equilíbrio pelo o processo iterativo. O Processo Iterativo P- Δ não alcançou equilíbrio nas duas últimas análises, os resultados das simulações numéricas ratificaram que com forças verticais superiores a 7200 kN não é possível alcançar o equilíbrio, devido as contribuições significativas dessas forças verticais para os momentos fletores de segunda ordem.

Tabela 4.4 – Simulações pelo Processo Iterativo P- Δ

Cenários	P_n [kN]	H [kN]	U_x^1 [m]	Nº Iterações	U_x^2 [m]
1º Análise	800,00	40,00	0,0296	4	0,0336
2º Análise	1600,00	40,00	0,0296	6	0,0387
3º Análise	2400,00	40,00	0,0296	8	0,0458
4º Análise	3200,00	40,00	0,0296	10	0,0560
5º Análise	4000,00	40,00	0,0296	14	0,0721
6º Análise	4800,00	40,00	0,0296	20	0,1012
7º Análise	5600,00	40,00	0,0296	35	0,1695
8º Análise	6400,00	40,00	0,0296	111	0,5215
9º Análise	7200,00	40,00	0,0296	-	-
10º Análise	8000,00	40,00	0,0296	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

4.5 Análise comparativa das formulações

Os resultados das simulações numéricas pelo MEF foram comparados em uma análise estatística dos erros absolutos E_A (Equação 3.2) e relativos E_R (Equação 3.3), Tabela 4.5. Os

erros dos cenários em estudo foram obtidos por meio da comparação entre os valores dos deslocamentos das simulações de primeira e segunda ordem, simulados no *software* ABAQUSTM, com erros percentuais relativos de até 98%.

Tabela 4.5 – Análise das simulações pelo MEF

Cenários	P_n [kN]	H [kN]	U_x^1 [m]	U_x^2 [m]	E_A [m]	E_R [%]
1º Análise	800,00	40,00	0,0296	0,0345	0,0049	14,1%
2º Análise	1600,00	40,00	0,0296	0,0413	0,0117	28,4%
3º Análise	2400,00	40,00	0,0296	0,0516	0,0220	42,6%
4º Análise	3200,00	40,00	0,0296	0,0689	0,0393	57,0%
5º Análise	4000,00	40,00	0,0296	0,1018	0,0722	70,9%
6º Análise	4800,00	40,00	0,0296	0,1888	0,1592	84,3%
7º Análise	5600,00	40,00	0,0296	1,3780	1,3484	97,9%
8º Análise	6400,00	40,00	0,0296	0,1961	0,1665	84,9%
9º Análise	7200,00	40,00	0,0296	0,0993	0,0697	70,2%
10º Análise	8000,00	40,00	0,0296	0,0664	0,0368	55,4%

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Tabela 4.6, são apresentados os erros absolutos E_A (Equação 3.2) e relativos percentual E_R (Equação 3.3), a oitava análise apresentou o maior erro relativo percentual E_R de 166%.

Tabela 4.6 – Análise do MEF e do Processo Iterativo P- Δ

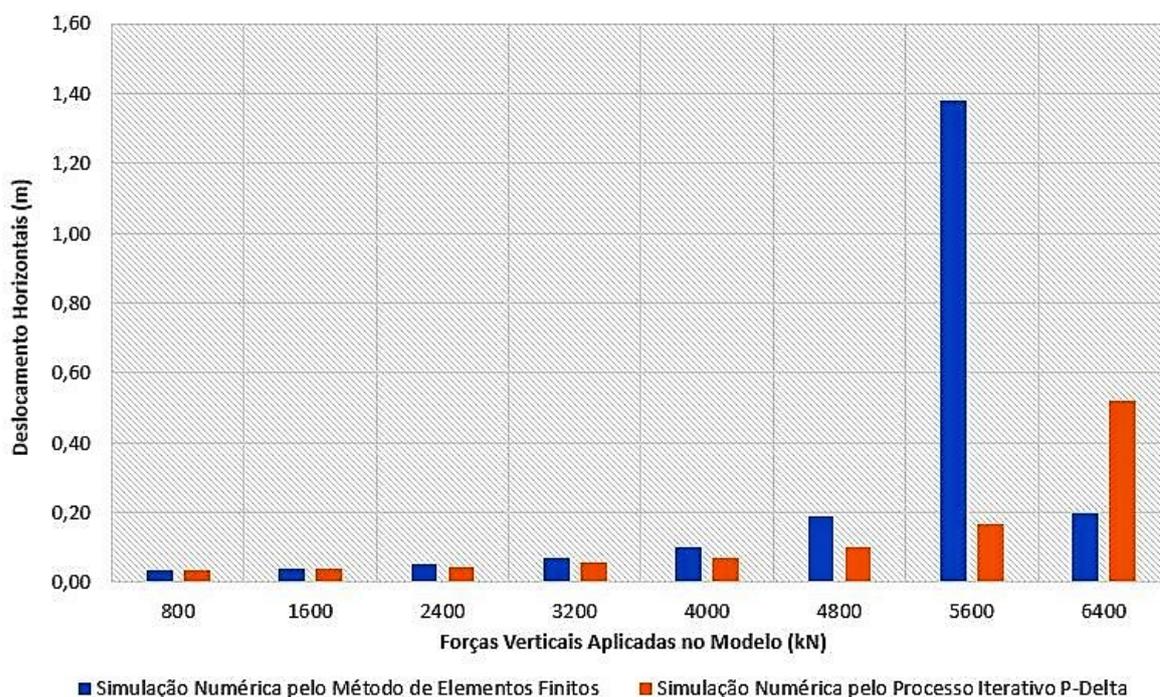
Cenários	P_n [kN]	H [kN]	MEF U_x^2 [m]	P- Δ U_x^2 [m]	E_A [m]	E_R [%]
1º Análise	800,00	40,00	0,0345	0,0336	0,0009	2,7%
2º Análise	1600,00	40,00	0,0413	0,0387	0,0026	6,3%
3º Análise	2400,00	40,00	0,0516	0,0458	0,0058	11,2%
4º Análise	3200,00	40,00	0,0689	0,0560	0,0128	18,6%
5º Análise	4000,00	40,00	0,1018	0,0721	0,0297	29,1%
6º Análise	4800,00	40,00	0,1888	0,1012	0,0876	46,4%
7º Análise	5600,00	40,00	1,3780	0,1695	1,2085	87,7%
8º Análise	6400,00	40,00	0,1961	0,5215	0,3254	166,0%
9º Análise	7200,00	40,00	0,0993	-	-	-
10º Análise	8000,00	40,00	0,0664	-	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 4.1, apresenta-se a diferença dos deslocamentos de segunda ordem das simulações numéricas pelo MEF e pelo Processo Iterativo P- Δ . Observa-se, que a diferença entre os valores começam a aumentar com o aumento da força vertical P, com máxima discrepância no cenário com P = 5600 kN.

Segundo CISC (1980 apud GAIOTTI; SMITH, 1989), normalmente duas ou três iterações são suficientes, se os resultados não convergem após cinco iterações, a estrutura pode ser

Figura 4.1 – Gráfico comparativo entre simulações numéricas



Fonte: Elaborado pelo autor

classificada como instável. Neste trabalho, as simulações realizadas alcançaram ciclos iterativos de 4 a 111 iterações, ratificando que quanto maior o número de iterações, maiores serão as divergências entre os processo de determinação dos efeitos de segunda ordem. Verificou-se que a estrutura pode alcançar uma situação de equilíbrio no Processo Iterativo P- Δ e os resultados divergirem de forma significativa dos resultados de simulações numéricas pelo MEF.

Tabarelli (2002 apud TABARELLI; ARAÚJO; PRESTES, 2002) analisaram o comportamento não linear geométrico de edifícios de andares múltiplos em aço e compararam a aplicação do método da carga fictícia com o MEF (simulação computacional no ANSYS[®]), obtiveram como resposta um erro de 3% entre as duas aplicações. Esse resultado está compatível com os resultados das análises realizadas no primeiro cenário proposto nessa pesquisa.

Testes comparativos entre experimentos e simulações numéricas mostraram a viabilidade de utilização das simulações numéricas pelo MEF, dentre esses trabalhos, vale destacar (ARAÚJO DA SILVA, 2009), (SILVA, 2017), (SEIXAS, 2003), (WOOD; ZIENKIEWICZ, 1977), (OLIVEIRA, 2004), (OLIVEIRA, 2011) e (BORGES, 1999). Nesse trabalho, os efeitos de primeira ordem foram validados por meio de um comparativo entre os resultados das simulações numéricas pelo MEF e os resultados pelo método analítico da carga unitária.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho, contribuiu para a análise das formulações necessárias no estudo do comportamento linear e não linear de uma coluna esbelta em concreto armado, possibilitou uma reflexão sobre as aplicações do parâmetro α e do coeficiente γ_z na avaliação dos efeitos de segunda ordem. Além disso, permitiu avaliar a aplicação do Processo Iterativo P- Δ em colunas esbeltas em concreto armado.

Essa pesquisa ratificou a importância do estudo das formulações para análise do comportamento não linear de colunas esbeltas em concreto armado. Observou-se, que os efeitos de segunda ordem são significativos em colunas esbeltas e que os resultados podem divergir dependendo do tipo de formulação utilizada.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho, verificou-se, que as simulações pelo Processo Iterativo P- Δ foram divergentes das simulações numéricas pelo MEF, chegando a apresentar um erro relativo de 166%. Nesta pesquisa, o processo iterativo mostrou-se impraticável nas situações de carregamentos elevados, não alcançando a situação de equilíbrio deformado em dois cenários. Esse processo também apresentou ciclos extensos de iterações, chegando até 111 iterações, o que afeta de forma significativa os custos computacionais. A aplicação do coeficiente γ_z na análise de colunas esbeltas em concreto armado não alcançaram resultados confiáveis, ratificando a importância de atender os critérios recomendados pela NBR-6118 (ABNT, 2014).

Conclui-se que o MEF é uma ferramenta que pode ser utilizada para análise de colunas com características semelhantes ao modelo proposto. Que na análise do modelo estudado as simulações numéricas pelo MEF apresentam resultados confiáveis, que podem ser utilizados com segurança na tomada de decisão em projetos de engenharia.

Como sugestões para novas pesquisas, recomenda-se:

- O estudo para validação experimental de simulações não lineares pelo MEF com intuito de avaliar a segurança do emprego dessa técnica nas práticas de Engenharia de Estruturas.
- O estudo do comportamento não linear pelo MEF na análise de estruturas em concreto armado com a consideração dos efeitos da aderência entre a armadura e o concreto.

REFERÊNCIAS

- ABDEL-ROHMAN, M. **Analysis of structures**. Kuwait University: BookSurge Publishing, 2014. 734 p. ISBN 978-85-98576-14-5.
- ALMEIDA, P. R. d. **Estudo do comportamento mecânico de córneas via simulações numéricas**. 80 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.
- ALMEIDA, T. P. **Metodologia para processamento do phase shift digital aplicado à técnica de shearografia**. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.
- ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE análise não linear**. 1. ed. São Paulo: Érica, 2012. ISBN 978-85-365-0395-0.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da Tecnologia CAE**. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013. ISBN 978-85-7194-741-2.
- ANDRADE, A. F.; OLIVEIRA, A. H.; AFONSO, S. Análise de confiabilidade de pórticos planos via método analítico form, considerando a não-linearidade geométrica. **Mecânica Computacional**, Buenos Aires, Argentina, Volume XXIX, n. 91, p. 8869–8880, 2010.
- ANDRÉ, J. C. et al. **Lições em mecânica das estruturas: trabalhos virtuais e energia**. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2011. ISBN 978-85-7975-003-8.
- ARAÚJO DA SILVA, A. A. **Análise não-linear assintótica modal da instabilidade de estruturas reticuladas**. 215 p. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- ARCHER, J. S. Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques. **AIAA Journal**, v. 3, n. 10, p. 1910–1918, 1965.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. **Energy theorems and structural analysis: a generalised discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations**. [S.l.]: London : Butterworths, 1960. "Originally published as a series of articles in Aircraft engineering between October 1954 and May 1955.". ISBN 978-1-4899-5852-5, 978-1-4899-5850-1.
- ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos**. 2. ed. São Paulo: Editora UNICAMP, 2003. 760 p. ISBN 978-85-268-1012-9.
- ASSAN, A. E. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Editora UNICAMP, 2013. v. 2. 760 p. ISBN 978-85-268-1012-9.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008. 247 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8522**: Concreto - Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão. Rio de Janeiro, 2017. 20 p.

BABUSKA, I.; SZABO, B. A.; KATZ, I. N. The p-version of the finite element method. **SIAM journal on numerical analysis**, SIAM, v. 18, n. 3, p. 515–545, 1981.

BANK, R. E.; NGUYEN, H. hp adaptive finite elements based on derivative recovery and superconvergence. **Computing and Visualization in Science**, Springer, v. 14, n. 6, p. 287–299, 2011.

BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. 2. ed. Watertown: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2014. ISBN 978-0-9790049-5-7.

BECK, H.; KÖNIG, G. Restraining forces (festhaltekräfte) in the analysis of tall buildings. In: COULL, A.; SMITH, B. S. (Ed.). **Tall Buildings**. Oxford: Elsevier, 1967. p. 513 – 536. ISBN 978-0-08-011692-1.

BELYTSCHKO, T.; FISH, J. **Um primeiro curso em elementos finitos**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 256 p. ISBN 978-85-216-1941-3.

BHAVIKATTI, S. **Finite element analysis**. New Delhi: New Age International, 2005. 324 p. ISBN 978-81-224-3671-6.

BORGES, A. C. L. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexocompressão oblíqua**. 110 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BRANDÃO, D. N. **Um refinamento h-adaptativo de malhas para o método dos elementos finitos utilizando uma estrutura de grafo**. 64 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

BUENO, J. R.; LORIGGIO, D. D. Analysis of second order effects: case study. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 9, n. 4, p. 494–501, 2016.

BUENO, J. R.; LORIGGIO, D. D. Analysis of second order effects: case study. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, scielo, v. 9, p. 494 – 501, 08 2016. ISSN 1983-4195.

CAMPILHO, R. D. S. G. **Método de elementos finitos: ferramenta para análise estrutural**. Porto, Portugal: Publindústria, 2012. 205 p. ISBN 978-989-723-028-8.

CARVALHO, E. d. A. **Protocolo para digitalização e modelagem de cafeeiro para fins de simulação numérica**. 114 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. São Paulo: Pini, 2013. v. 2. 617 p. ISBN 978-85-7266-276-5.

CISC. **Handbook of steel construction**. 3. ed. Willowdale: Canadian Institute of Steel Construction, 1980. 4-21 p. ISBN 978-0-88811-207-1.

CLOUGH, R. The finite element method in plane stress analysis proceedings. In: **ASCE Conference on Eletronic Computation**, Pittsburgh, p. 345–378, 1960.

COOK, R. D. et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. [S.l.]: Wiley New York, 1974. v. 4.

CORRÊA, M. R. S. **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. 342 p. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade de São Paulo, 1991.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American mathematical Society**, v. 49, n. 1, p. 1–23, 1943.

CRISFIELD, M. **Non-linear finite element analysis of solids and structures: essentials**. [S.l.]: Wiley, 1991. v. 1. 345 p. (Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, v. 1). ISBN 9780471929567.

CRISFIELD, M. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.]: Wiley, 1997. 494 p. (Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, v. 2). ISBN 9780471956495.

DEFILIPPO, F. B. **Geração automática de modelos de elementos finitos para análise de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore**. 122 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

DELALIBERA, R. G. et al. Avaliação dos critérios para análise da estabilidade global em edifícios de concreto armado: estudo de caso.(doi 10.5216/reec.v9i2.28875). **REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 9, n. 2, 2014.

DOEBELIN, E. **Measurement systems: application and design**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1990. 960 p. (McGraw-Hill Mechanical Engineering Series). ISBN 0-07-017338-9.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An hp adaptive method using clouds. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 237–262, 1996.

DYDUCH, M.; HABRAKEN, A.; CESCOTTO, S. Automatic adaptive remeshing for numerical simulations of metalforming. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 101, n. 1-3, p. 283–298, 1992.

ELOY, L. **Métodos dos elementos finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2011. ISBN 978-85-352-3929-4.

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A. d. Practical assessment of second order effects in tall buildings. **COLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro. Proceedings**, p. 307–323, 1991.

FREITAS, F. C.; LUCHI, L. A. R.; FERREIRA, W. G. Global stability analysis of structures and actions to control their effects. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, scielo, v. 9, p. 192 – 213, 04 2016. ISSN 1983-4195.

FREITAS, S. M. S. **Comportamento de colapso de plataformas offshore**. 145 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: fundamentos do projeto estrutural**. São Paulo: McGraw-Hill, 1976. 298 p.

- GAIOTTI, R.; SMITH, B. S. P-delta analysis of building structures. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 4, p. 755–770, 1989.
- GIRKMANN, K. **Flächentragwerke: einföhrung in die elastostatik der scheiben, platten, schalen und faltwerde**. 4. ed. Wein: Springer-Verlag, 1956. 596 p. ISBN 978-3-7091-4386-5.
- GRAZIANO, F. P. **Projeto e execução de estruturas de concreto armado**. São Paulo: O Nome da Rosa, 2005. 160 p. ISBN 85-86872-40-7.
- HABRAKEN, A.; CESCOTTO, S. An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 30, n. 8, p. 1503–1525, 1990.
- HELENE, P.; ANDRADE, T. Materiais de construção civil e princípios de ciência e engenharia de materiais. In: ISAIA, G. (Ed.). **Concreto de cimento portland**. São Paulo: IBRACON, 2010. v. 2, cap. 29, p. 945–984. ISBN 978-85-98576-14-5.
- HUGHES, T. J.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 194, n. 39, p. 4135–4195, 2005.
- KHENNANE, A. **Introduction to finite element analysis using MATLAB and ABAQUS**. New York: CRC Press, 2013. 453 p. ISBN 978-1-4665-8021-3.
- KIMURA, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculo de edifícios como o uso de sistemas computacionais**. São Paulo: Pini, 2007. 624 p. ISBN 978-85-7266-182-9.
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. v. 1. 306 p. ISBN 978-85-7193-205-0.
- LOPES, F. d. R. de C. **Influência do comportamento semi-rígido de placas de base e de ligações viga-coluna na resposta dinâmica de pórticos de aço**. 164 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, 2008.
- MACGREGOR, G. J.; WIGHT, J. K. **Reinforced concrete: mechanics and design**. Fourth edition. New Jersey: Prentice Hall, 2004. 1132 p. ISBN 0-13-142994-9.
- MACGREGOR, J. G.; HAGE, S. E. Stability analysis and design of concrete frames. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 103, n. 10, p. 1953–1970, 1977.
- MAGALHÃES, H. S. S. d. **Determinação das propriedades mecânicas de uma córnea utilizando otimização**. 109 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.
- MONCAYO, Z.; JUNIOR, W. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado**. 221 p. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2011.

- NAHUM, K. A. R.; OLIVEIRA, D. R. C. de. Monitoramento de pilares em edifícios altos de concreto armado. **RIEM-IBRACON Structures and Materials Journal**, v. 3, n. 2, 2010.
- NIEMI, A. H. et al. Finite element analysis of the girkmann problem using the modern hp-version and the classical h-version. **Engineering with Computers**, Springer, v. 28, n. 2, p. 123–134, 2012.
- NOOR, A. K. Bibliography of books and monographs on finite element technology. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers, v. 44, n. 6, p. 307–317, 1991.
- ODEN, J. **Finite elements of nonlinear continua**. New York: McGraw-Hill, 1972. (Advanced engineering series). ISBN 978-0070476042.
- OLIVEIRA, D. et al. Statistical analysis of second order effects variation with the stories height of reinforced concrete buildings. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, scielo, v. 10, p. 333 – 357, 04 2017. ISSN 1983-4195.
- OLIVEIRA, D. M. et al. Evaluation of second order moments in reinforced concrete structures using the γ_z and β_2 coefficients. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, scielo, v. 7, p. 329 – 348, 06 2014. ISSN 1983-4195.
- OLIVEIRA, R. **Análise teórica e experimental de estruturas planas de concreto armado com a consideração da fluência**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação da Universidade de São Paulo, 2011.
- OLIVEIRA, W. L. A. d. **Análise teórica e experimental de pilares de concreto armado sob ação de força centrada com resistência média à compressão do concreto de 40MPa**. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo, 2004.
- OÑATE, E. **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: análisis elástico lineal**. 2. ed. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995. 838 p. ISBN 84-87867-00-6.
- PARENTE JUNIOR, E. et al. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 7, n. 5, p. 879–904, 2014.
- PERES, L. M.; PENNA, S. S.; PITANGUEIRA, R. L. da S. Análise fisicamente não linear de pórticos de concreto armado. **XI Simpósio de Mecânica Computacional e II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional**, 2014.
- PICOY, Y. M. **Correlação digital de imagens para medições de deslocamentos em vigas em balanço**. 76 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.
- PLUMBRIDGE, W.; MATELA, R. J.; WESTWATER, A. Non-linear finite element analysis. In: _____. **Structural integrity and reliability in electronics: enhancing performance in a lead-free environment**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2003. p. 305–318. ISBN 978-1-4020-2611-9.

RACHOWICZ, W.; ZDUNEK, A. An h-adaptive mortar finite element method for finite deformation contact with higher order p extension. **Computers and Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 73, n. 8, p. 1834–1854, 2017.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1993. 684 p. ISBN 0-07-112799-2.

REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade e dimensionamento de estruturas**. Lisboa: Edições Orion, 2012. 688 p. ISBN 978-972-8620-19-6.

ROARTY, C. M.; GROSLAND, N. M. Adaptive meshing technique applied to an orthopaedic finite element contact problem. **The Iowa orthopaedic journal**, University of Iowa, v. 24, p. 21, 2004.

RODRIGUES, M. C. **Estudo de flambagem em colunas utilizando a técnica de velocimetria por imagem de partículas (PIV)**. 74 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2015.

RODRIGUES, P. F. N. **Ferramentas numéricas para a análise não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore**. 258 p. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

RYLO, E. C. **Adaptatividade hp aplicada em malhas de elementos finitos**. 171 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

SCADELAI, M. A. **Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118: 2003**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

SEGERLIND, L. J. **Applied finite element analysis**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1984. ISBN 0-771-62789-5.

SEGNINI, S. C. de A. **Estudo comparativo de formulações para a análise não-linear geométrica de treliças**. 148 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

SEIXAS, M. P. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado confinados através do método dos elementos finitos**. 129 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

SILVA, E. P. **Elementos finitos como ferramenta auxiliar na análise estrutural estática de uma colhedora de café do tipo automotriz**. 143 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Agrícola da Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

SILVA, E. P. da; SILVA, F. M. da; MAGALHÃES, R. R. Application of finite elements method for structural analysis in a coffee harvester. **Engineering**, Scientific Research Publishing, v. 6, n. 03, p. 138, 2014.

SILVA, M. F. D. S. **Ferramenta gráfico-interativa para o dimensionamento de pórticos planos de concreto armado considerando não linearidade geométrica**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2017.

SILVA, R. G. L. da. **Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em edifícios de aço utilizando métodos aproximados e análise rigorosa**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal Minas Gerais, 2004.

SINDEL, Z.; TEZCAN, S. Tangent stiffness properties of finite elements. **Computers and structures**, Elsevier, v. 58, n. 2, p. 351–365, 1996.

SOO-WON, C.; BATHE, K.-J. On automatic mesh construction and mesh refinement in finite element analysis. **Computers and Structures**, Elsevier, v. 32, n. 3-4, p. 911–936, 1989.

SORIANO, H.; LIMA, S. D. S. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: EDUSP, 2003. v. 48. 580 p. ISBN 9788531407307.

SORIANO, H. L. **Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. 411 p. ISBN 978-85-7393-880-7.

SORIANO, J. **Análise numérica de vigas de concreto de alta resistência considerando a não-linearidade física**. 130 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

SOUZA, R. M. de. Cálculo aplicado na determinação dos deslocamentos em estruturas reticuladas: ênfase no método da carga unitária. **8º Congresso Internacional de Pós-Graduação [ISSN: 2237 - 521X]**, Grupo Educacional UNIS/MG, Varginha, p. 15, 2015. Trabalho de Conclusão do Curso de Especialização em Ensino de Matemática e Física do Grupo Educacional UNIS/MG.

SZABO, B.; BABUĂŠKA, I. **Finite element analysis**. Canada: Wiley, 1991. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471502739.

TABARELLI, A. **Análise comparativa de sistemas verticais de estabilização e a influência do efeito P-Delta no dimensionamento de edifícios de andares múltiplos em aço**. Ouro Preto: Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto, 2002.

TABARELLI, A.; ARAÚJO, E. C. d.; PRESTES, J. A. S. Análise comparativa de sistemas verticais de estabilização e a influência do efeito p-delta no dimensionamento de edifícios de andares múltiplos em aço. **Rem: Revista Escola de Minas**, SciELO Brasil, v. 55, n. 4, p. 251–255, 2002.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. **Theory of elastic stability**. Tokyo, Japan: McGraw-Hill Kogakusha, 1961. 560 p. ISBN 978-0486472072.

TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.

TURNER, M. J. et al. Large deflections of structures subjected to heating and external loads. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, n. 2, p. 97–106, 1960.

VEIGA, L. B. D. et al. Some estimates for h–p–k-refinement in isogeometric analysis. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 118, n. 2, p. 271–305, 2011.

VELLASCO, P. C. G. d. S. et al. **Modelagem de estruturas de aço e mistas**. 1. ed. Rio de Janeiro - RJ: Elsevier, 2014. 335 p. ISBN 978-85-352-7197-3.

VENÂNCIO FILHO, F. **Análise matricial de estruturas: estática, estabilidade, dinâmica.** Rio de Janeiro: Almeida Neves, 1975. 256 p. Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

WOOD, R.; ZIENKIEWICZ, O. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. **Computers and Structures**, v. 7, n. 6, p. 725 – 735, 1977.

ZERMIANI, F. L. **Contribuição à análise não-linear geométrica de pórticos planos.** 151 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.

ZIENKIEWICZ, O.; CHEUNG, Y. **The finite element method in structural and continuum mechanics: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics.** New York: McGraw-Hill, 1967. 272 p. (European civil engineering series, v. 1).

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: solid mechanics.** 5. ed. Oxford: Butterworth-heinemann, 2000. v. 2. 459 p. ISBN 0-7506-5055-9.