

APLICAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BURR XII NA ANÁLISE DO TEMPO ATÉ A PRIMEIRA POSTURA DE CODORNAS

Danielle PERALTA¹
Josmar MAZUCHELI¹
Isabele Picada EMANUELLI²
Robson Marcelo ROSSI¹

- **RESUMO:** Geralmente em análise de sobrevivência a resposta observada indica o tempo transcorrido entre o início do estudo e a ocorrência de um determinado evento. Neste trabalho, a variável resposta, decorrente de um experimento fatorial 2×3 , descreve o número de dias transcorridos entre o nascimento e a primeira postura (evento) de codornas das linhagens amarela, azul e vermelha e submetidas a dois níveis de dieta alimentar. Tem-se como objetivo principal a seleção de uma distribuição de probabilidade que descreva de maneira razoável o comportamento da idade (em dias) até a primeira postura. Em cada um dos grupos estudados (linhagens versus dietas), dada a natureza da resposta, foram adotadas como candidatas as distribuições: Burr XII, Gama, Inversa-Gaussiana, Log-Normal, Weibull e Log-Logística. Para todas as distribuições foram estimados, pontualmente e intervalarmente, o tempo médio e o tempo mais provável da primeira postura, interpretados também como a idade média e a idade mais provável da primeira postura. Os procedimentos analíticos e gráficos, usados como ferramentas de discriminação, mostram que a distribuição Burr XII, na maioria dos grupos, é a mais indicada para descrever a variável resposta considerada. A escolha de uma distribuição de probabilidade capaz de descrever de maneira eficiente o fenômeno em estudo tem implicações no manejo animal e conseqüentemente na sustentabilidade da produção.
- **PALAVRAS-CHAVE:** Análise de sobrevivência; distribuição de probabilidade; função de verossimilhança; produção animal; seleção de modelos.

¹Universidade Estadual de Maringá - UEM, Departamento de Estatística, CEP: 87020-900, Maringá, PR, Brasil. E-mail: danielleperalta@outlook.com; jmazucheli@gmail.com; robsonmrossi@gmail.com

²Centro Universitário de Maringá - UNICESUMAR, Departamento de Pós-Graduação, Mestrado em Tecnologias Limpas, CEP: 85050-390, Maringá, PR, Brasil. E-mail: isabele.emanueli@unicesumar.edu.br

1 Introdução

A utilização de modelos que reflitam de modo parcimonioso a realidade biológica é de grande importância na otimização de sistemas de produção animal. Em se tratando de codornas, criadas para a produção de ovos, as ferramentas intrínsecas a área de análise de sobrevivência podem ser utilizadas na estimação de parâmetros, associados com o tempo até a primeira postura. Uma vez adotada uma distribuição de probabilidade, parâmetros como a idade média e a idade mais provável da primeira postura, importantes no processo de seleção de linhagens e/ou escolha de dietas mais efetivas, podem ser estimados (LEE e WANG, 2003; LAWLESS, 2003).

Uma questão importante e usual na análise estatística paramétrica refere-se a escolha da distribuição de probabilidade mais apropriada (MURTHY et al., 2004). Nos últimos anos foram propostas uma infinidade de novas distribuições para a análise de dados relacionados ao tempo até a ocorrência de algum evento de interesse. Apesar disso, distribuições de probabilidade tradicionais, como a Burr XII, a Gama, a Inversa-Gaussiana, a Log-Normal, a Weibull e a Log-Logística ainda mostram-se úteis (XIE et al., 2002). Neste trabalho o objetivo principal é selecionar, segundo vários critérios, uma dessas distribuições para que se descreva, de maneira aceitável, o comportamento do tempo até a primeira postura.

É importante destacar que, decorrente de seu rápido crescimento, as codornas atingem a maturidade sexual com idade entre 35 a 42 dias de vida, ou seja, inicia o seu ciclo de postura com idade precoce, o que é vantajoso comercialmente. Para fins comerciais recomenda-se uma vida útil de um ano. Durante o período produtivo, a produção de ovos pode chegar a valores superiores a 300 ovos por ave, quando manejadas e alojadas adequadamente (JESUS, 2007).

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é apresentada a motivação para a escolha da metodologia adotada. Algumas propriedades da distribuição Burr XII são apresentadas na Seção 3. As Subseções 3.1 e 3.2 apresentam, respectivamente, a estimação via função de verossimilhança da distribuição Burr XII, as distribuições alternativas consideradas e os métodos de discriminação. Algumas considerações a respeito dos dados utilizados são apresentadas na Seção 4. Os resultados dos procedimentos de discriminação e dos ajustes são apresentados e discutidos na Seção 5. Algumas considerações na Seção 6 finaliza este artigo.

2 Material e métodos

Nesse trabalho, para descrever o tempo até a primeira postura de codornas utilizou-se as distribuições de probabilidade: Burr XII, Gama, Inversa-Gaussiana, Log-Normal, Weibull e Log-Logística. A justificativa para a adoção das distribuições Burr XII, Inversa-Gaussiana, Log-Normal e Log-Logística relaciona-se ao fato que todas têm, de acordo com os valores dos parâmetros de forma, funções de risco cujo comportamento é unimodal. Na literatura de análise de sobrevivência a função

de risco também é conhecida por função de taxa de falha, definida como sendo a taxa de ocorrência de um evento por unidade de tempo (LAWLESS, 2003). Em uma distribuição com taxa de falha unimodal o número de eventos por unidade de tempo cresce até atingir um ponto de máximo e após esse máximo ser atingido essa taxa tende assintoticamente para zero ou algum outro valor a medida que o tempo tende ao infinito. Na prática, muitas vezes, tem-se interesse em estimar esse ponto de máximo, também chamado de ponto de mudança (MAZUCHELI et al., 2005, 2012).

Por sua vez, as distribuições Gama e Weibull foram adotadas por serem distribuições muito usadas em análise de dados de sobrevivência. Vale lembrar que ambas podem acomodar taxa de falha monótona crescente ou monótona decrescente tendo a distribuição Exponencial como caso particular.

Motivados por seus casos particulares e propriedades, que se assemelham às outras distribuições supracitadas, foi dado nesse trabalho ênfase maior à distribuição Burr XII (TADIKAMALLA, 1980).

3 A distribuição Burr XII

Burr (1942) propôs um sistema com 12 funções de distribuição de probabilidade sendo algumas delas com suporte nos reais positivos logo, muito usadas na análise de dados de sobrevivência. Graças a sua relação com outras distribuições de probabilidade, o membro do sistema Burr mais utilizado é a distribuição Burr tipo XII ou simplesmente Burr XII, também conhecida como distribuição Singh-Maddala (SINGH e MADDALA, 1976; TADIKAMALLA, 1980 e KLUGMAN et al., 2008).

Uma variável aleatória não negativa X com distribuição Burr XII tem as funções de densidade, de sobrevivência e de risco, escritas respectivamente, nas formas:

$$f(x | \Theta) = \frac{\gamma \alpha x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha} \left[1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\alpha \right]^{-(\gamma+1)}, \quad (1)$$

$$S(x | \Theta) = \left[1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\alpha \right]^{-\gamma}, \quad (2)$$

$$h(x | \Theta) = \frac{\gamma \alpha x^{\alpha-1}}{\theta^\alpha} \left[1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\alpha \right]^{-1} \quad (3)$$

em que $\Theta = (\theta, \alpha, \gamma)$ tal que $\theta > 0$ é o parâmetro de escala e $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma. O parâmetro $\gamma > 0$ não influencia o comportamento das funções de densidade e de risco, apesar de em muitos trabalhos ser definido como parâmetro de forma. É importante mencionar que a formulação original da distribuição Burr XII considerou $\theta = 1$. A formulação em que θ é desconhecido foi introduzida por Tadikamalla (1980).

A função densidade de probabilidade (1) é unimodal com máximo em $X_{\max} = \theta \sqrt[\alpha]{\frac{\alpha-1}{1+\gamma\alpha}}$ quando $\alpha > 1$ e é em forma de L para $\alpha \leq 1$. A função de risco (3) é decrescente quando $\alpha \leq 1$ e unimodal para $\alpha > 1$ com máximo em $\theta \sqrt[\alpha]{\alpha-1}$.

Esta última característica torna a distribuição Burr XII uma concorrente natural das distribuições Log-Normal, Inversa-Gaussiana, Log-Logística, entre outras.

Em adição aos parâmetros θ , α e γ pode-se adicionar um parâmetro de locação em (1) e por consequência em (2) e (3) a partir da transformação $Y = \mu + X$ para $X > \mu$. Para $\mu = 0$ e $\theta = 1$ Y tem distribuição Burr XII padrão. Para uma transformação da forma $Y = X^{-1}$ tem-se a distribuição Burr III, também conhecida como distribuição Dagum (TADIKAMALLA, 1980) e para $Y = \log(X)$ tem-se a distribuição Log-Burr XII (SILVA et al., 2008).

Alguns casos particulares da Burr XII incluem: a distribuição Lomax (Pareto do segundo tipo) para $\alpha = 1$, a distribuição Log-Logística para $\gamma = 1$ e a distribuição Weibull para $\gamma \rightarrow \infty$. Os trabalhos de Rodriguez (1977), Tadikamalla (1980) e Zimmer, Keats e Wang (1998) exploram em detalhes a conexão entre a Burr XII e outras distribuições de probabilidade.

Por fim, recentes extensões da Burr XII incluem ainda a distribuição Burr XII estendida (GHARIB et al., 2010), a Beta-Burr XII (PARANAÍBA et al., 2011), a Burr XII Geométrica (MOHIE EL-DIN e KOTB, 2011) e a Kumaraswamy Burr XII (PARANAÍBA et al., 2013), entre outras.

3.1 Estimação via Máxima Verossimilhança

Sejam x_1, \dots, x_n os valores observados de uma variável aleatória X com distribuição Burr XII e função de densidade definida em (1) com vetor de parâmetros $\Theta = (\theta, \alpha, \gamma)$. A função de verossimilhança e log-verossimilhança (PAWITAN, 2001; MILLAR, 2011) são escritas, respectivamente, como:

$$L(\Theta | \mathbf{x}) \propto \left(\frac{\gamma\alpha}{\theta^\alpha}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i^\alpha \left[1 + \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha\right]^{-(\gamma+1)} \quad (4)$$

e

$$\begin{aligned} \ell(\Theta | \mathbf{x}) \propto n [\log(\gamma) + \log(\alpha) - \alpha \log(\theta)] + \\ + \alpha \sum_{i=1}^n \log(x_i) - (\gamma + 1) \sum_{i=1}^n \log\left[1 + \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

As estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\Theta} = (\hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ de $\Theta = (\theta, \alpha, \gamma)$ são obtidas pela maximização da função log-verossimilhança. Neste caso a função de verossimilhança é maximizada, resolvendo-se, simultaneamente, em θ , α e γ as

equações:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\Theta | \mathbf{x}) = -\frac{n\alpha}{\theta} - \frac{(\gamma + 1)\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{1 + \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\Theta | \mathbf{x}) = \frac{n}{\alpha} - n \log(\theta) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{(\gamma + 1)}{\theta^\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha \log(x_i \theta^{-1})}{1 + \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \ell(\Theta | \mathbf{x}) = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \log \left[1 + \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\alpha \right]. \quad (8)$$

A partir da Equação (8) observa-se que $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\theta}, \hat{\alpha}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log \left[1 + \left(\frac{x_i}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\alpha}} \right]}$ enquanto que as Equações (6) e (7) devem ser resolvidas numericamente considerando-se $\gamma = \gamma(\theta, \alpha)$

Os intervalos de confiança para θ , α e γ podem ser construídos a partir da normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Como alternativa as estimativas de máxima verossimilhança pode-se considerar as obtidas a partir dos métodos descritos em Al-Noor e Al-Ameer (2014) ou Usta (2013). Esses métodos não são considerados neste trabalho.

Pela propriedade de invariância dos estimadores de máxima verossimilhança estima-se X_{\max} e $E(X)$, respectivamente, por $\hat{X}_{\max} = \hat{\theta} \sqrt[\hat{\alpha}]{\frac{\hat{\alpha}-1}{1+\hat{\gamma}\hat{\alpha}}}$ e $\widehat{E(X)} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\alpha}\Gamma(\hat{\gamma})} \Gamma\left(\frac{\hat{\gamma}\hat{\alpha}-1}{\hat{\alpha}}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)$ enquanto que $Var(\hat{X}_{\max})$ e $Var(\widehat{E(X)})$ são obtidas a partir da aplicação do método delta (CASELLA e BERGER, 1990). Será visto na Seção 5 que X_{\max} e $E(X)$ descrevem, respectivamente, a idade (em dias) mais provável e a idade média da primeira postura.

3.2 Distribuições de probabilidade alternativas e critérios de discriminação

Com propósitos de comparações, além da distribuição Burr XII, também foram consideradas 5 distribuições alternativas, resumidamente descritas a seguir.

- Distribuição Gama:

$$f(x | \theta, \alpha) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (9)$$

$$E(X) = \alpha\theta \text{ e, para } \alpha > 1, X_{\max} = \theta(\alpha - 1);$$

- Distribuição Inversa-Gaussiana:

$$f(x | \mu, \alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi x^3}} \exp\left[-\frac{\alpha(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right], \quad (10)$$

$$E(X) = \mu \text{ e } X_{max} = \mu \sqrt{1 + \frac{9\mu^2}{4\alpha^2}} - \frac{3\mu^2}{2\alpha};$$

- Distribuição Log-Normal:

$$f(x | \mu, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta x}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(x) - \mu}{\theta} \right)^2 \right], \quad (11)$$

$$E(X) = \exp(\mu + 0.5\theta^2) \text{ e } X_{max} = \exp(\mu - \theta^2);$$

- Distribuição Weibull:

$$f(x | \theta, \alpha) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp \left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha \right], \quad (12)$$

$$E(X) = \theta \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \text{ e, para } \alpha > 1, X_{max} = \theta \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

- Distribuição Log-Logística:

$$f(x | \theta, \alpha) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\alpha\right)^{-2}, \quad (13)$$

$$E(X) = \frac{\theta\pi}{\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \text{ e, para } \alpha > 1, X_{max} = \theta \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Os parâmetros $\theta > 0$, $\alpha > 0$ e $\mu > 0$ descrevem, respectivamente, a escala, a forma e a localização dessas distribuições. Somente na distribuição Log-Normal o parâmetro μ tem suporte nos números reais.

Na aplicação apresentada será mostrada que a escolha da distribuição mais apropriada baseia-se nos valores das estatísticas apresentadas a seguir:

- Critério da função log-verossimilhança: $-2 \log(L)$ em que $L = L(\hat{\Theta} | \mathbf{x})$ indica a função de verossimilhança localmente em $\hat{\Theta}$;
- Critério de informação de Akaike: $AIC = -2 \log(L) + 2p$;
- Critério de informação de Akaike corrigido: $AICc = -2 \log(L) + \frac{2np}{n-p-1}$;
- Critério de informação Bayesiano: $BIC = -2 \log(L) + p \log(n)$;
- Kolmogorov-Smirnov: $KS = \sqrt{n} \max(D^+, D^-) + \frac{0.19}{\sqrt{n}}$ em que $D^- = \max_i (F_{emp}(x_i) - z_i)$ se $F_{emp}(x_i) \geq z_i$ e $D^+ = \max_i (z_i - F_{emp}(x_i))$ se $F_{emp}(x_i) < z_i$, $i = 1, \dots, n$;
- Anderson-Darling: $AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2r_i - 1) \log(z_i) + (2n + 1 - 2r_i) \log(1 - z_i)$;
- Cramér-von Mises: $CvM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(z_i - \frac{2r_i-1}{2n}\right)^2$,

tal que n indica o tamanho da amostra, p é o número de parâmetros da distribuição teórica, $z_i = F(x_i | \hat{\Theta})$ é a função de distribuição teórica, $F_{emp}(x_i)$ é a função de distribuição empírica e r_i conta o número de observações menores ou iguais a x_i .

Em todos esses critérios decide-se em favor do modelo que apresenta o menor valor da estatística (HELD e SABANÉS BOVÉ, 2014).

4 Dados experimentais

Os dados utilizados referem-se ao tempo, em dias, do nascimento até a primeira postura de codornas (*Coturnix coturnix japonica*) provenientes de três linhagens e submetidas a duas dietas alimentares. Esses dados foram obtidos em um experimento conduzido entre agosto de 2006 e janeiro de 2007 no Setor de Coturnicultura da Fazenda Experimental da Universidade Estadual de Maringá. Aos 28 dias de idade as codornas passaram pelo processo de sexagem e as fêmeas foram divididas em dois grupos e alojadas em gaiolas individuais. Cada grupo passou a receber um de dois tipos de dietas: a primeira com nível preconizado de energia metabolizável de 2.900 *kcal/kg* (dieta I) e a segunda com nível de energia de 2.500 *kcal/kg* (dieta II). O número de codornas por linhagem e dieta foram distribuídas de acordo com os valores apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Distribuição do número de codornas na combinação dieta versus linhagem

Dieta	Linhagem		
	Amarela	Azul	Vermelha
I	163	186	201
II	145	188	177

Apesar de em análise de dados de sobrevivência ser comum a presença de observações censuradas (KLEIN e MOESCHBERGER, 1997) o evento definido como postura foi observado em todas as unidades amostrais — codornas.

5 Resultados e discussões

As Tabelas 2, 3 e 4 apresentam, para todos os modelos e grupos (linhagem versus dieta), os valores das estatísticas usadas como critérios de seleção de uma dentre todas as distribuições consideradas. O número sobrescrito indica, na coluna, a distribuição selecionada segundo a respectiva estatística enquanto que, a coluna nomeada como *R*, mostra a soma dos ranques/escores que na verdade serve para indicar a distribuição que mais vezes foi selecionada. Observa-se, com exceção da dieta I e linhagem azul (Tabela 3), que a distribuição Burr XII apresenta, segundo os critérios adotados, o melhor ajuste em relação às outras distribuições.

Nas Figuras 1, 2 e 3 tem-se as curvas de sobrevivência empíricas e as baseadas nas estimativas de máxima verossimilhança. Tanto as curvas empíricas como as provenientes dos ajustes das distribuições podem ser nomeadas de curvas de postura e estimam a probabilidade do tempo até a primeira postura ser superior a um número de dias quaisquer.

A partir da Figura 1 observa-se um melhor ajuste da distribuição Burr XII, seguido da distribuição Log-Logística. Na linhagem azul (Figura 2) os melhores ajustes foram das distribuições Log-Normal (dieta I) e Burr XII (dieta II). Para a

Tabela 2 - Valores da estatísticas usadas como critério de discriminação — linhagem amarela

	$-2 \log(L)$	AIC	AICc	BIC	KS	AD	CvM	R
Dieta I								
1	1008,3610 ¹	1014,3610 ¹	1014,5130 ¹	1023,6240 ¹	1,5530 ⁵	3,1889 ¹	0,1606 ¹	11 ¹
2	1050,0930 ⁵	1054,0930 ⁵	1054,1680 ⁵	1060,2680 ⁵	1,4148 ⁴	6,8562 ⁴	0,9108 ⁴	32 ⁵
3	1039,3820 ⁴	1043,3820 ⁴	1043,4570 ⁴	1049,5570 ⁴	1,3743 ¹	8,5035 ⁵	1,3263 ⁵	27 ⁴
4	1038,5370 ³	1042,5370 ³	1042,6120 ³	1048,7120 ³	1,4026 ³	5,9380 ³	0,7402 ³	18 ³
5	1133,2680 ⁶	1137,2680 ⁶	1137,3430 ⁶	1143,4430 ⁶	2,4026 ⁶	13,6439 ⁶	2,0281 ⁶	42 ⁶
6	1021,8500 ²	1025,8500 ²	1025,9250 ²	1032,0250 ²	1,3815 ²	3,7081 ²	0,2818 ²	14 ²
Dieta II								
1	911,7691 ¹	917,7691 ¹	917,9393 ¹	926,6993 ¹	1,8362 ⁵	3,4550 ¹	0,2391 ¹	11 ¹
2	959,9588 ⁵	963,9588 ⁵	964,0434 ⁵	969,9123 ⁵	1,4390 ²	8,4561 ⁴	1,3144 ⁴	30 ⁴
3	949,2240 ⁴	953,2240 ⁴	953,3085 ⁴	959,1774 ⁴	1,6821 ⁴	10,2297 ⁵	1,7898 ⁵	30 ⁴
4	948,5257 ³	952,5257 ³	952,6102 ³	958,4792 ³	1,3520 ¹	7,4715 ³	1,1145 ³	19 ³
5	1031,5440 ⁶	1035,5440 ⁶	1035,6290 ⁶	1041,4980 ⁶	2,5248 ⁶	13,4444 ⁶	2,1784 ⁶	42 ⁵
6	933,5087 ²	937,5087 ²	937,5932 ²	943,4621 ²	1,4581 ³	4,6643 ²	0,4256 ²	15 ²

1: Burr XII, 2: Gama, 3: Inversa-Gaussiana, 4: Log-Normal, 5: Weibull e 6: Log-Logística.

Tabela 3 - Valores da estatísticas usadas como critério de discriminação — linhagem azul

	$-2 \log(L)$	AIC	AICc	BIC	KS	AD	CvM	R
Dieta I								
1	1243,3640 ¹	1249,3640 ²	1249,4970 ³	1259,0250 ⁴	1,8075 ⁵	2,6709 ¹	0,1445 ¹	17 ²
2	1250,4930 ⁵	1254,4930 ⁵	1254,5590 ⁵	1260,9340 ⁵	1,0374 ²	3,7047 ⁴	0,3893 ⁴	30 ⁴
3	1245,3780 ³	1249,3780 ⁴	1249,4440 ²	1255,8190 ²	0,7933 ¹	5,0710 ⁵	0,6785 ⁵	22 ³
4	1245,3110 ²	1249,3110 ¹	1249,3770 ¹	1255,7520 ¹	1,1633 ³	3,3375 ³	0,3146 ³	14 ¹
5	1308,4930 ⁶	1312,4930 ⁶	1312,5590 ⁶	1318,9340 ⁶	1,9692 ⁶	7,4848 ⁶	0,9989 ⁶	42 ⁵
6	1247,0870 ⁴	1251,0870 ³	1251,1530 ⁴	1257,5280 ³	1,4645 ⁴	2,8034 ²	0,1878 ²	22 ³
Dieta II								
1	1313,3900 ¹	1319,3900 ¹	1319,5210 ¹	1329,1000 ¹	1,4823 ⁵	3,6896 ¹	0,0975 ¹	11 ¹
2	1347,6240 ⁶	1351,6240 ⁵	1351,6890 ⁵	1358,0970 ⁵	1,3492 ²	8,5283 ⁴	1,0642 ⁴	31 ⁵
3	1339,7150 ²	1343,7150 ²	1343,7800 ²	1350,1880 ²	1,4755 ⁴	10,3137 ⁵	1,5449 ⁵	22 ³
4	1339,8600 ⁴	1343,8600 ³	1343,9250 ³	1350,3330 ³	1,3074 ¹	7,7463 ³	0,9189 ³	20 ²
5	1399,8400 ³	1403,8400 ⁶	1403,9050 ⁶	1410,3130 ⁶	2,1165 ⁶	12,0127 ⁶	1,6899 ⁶	39 ⁶
6	1342,5570 ⁵	1346,5570 ⁴	1346,6220 ⁴	1353,0300 ⁴	1,4688 ³	6,0865 ²	0,4784 ²	24 ⁴

1: Burr XII, 2: Gama, 3: Inversa-Gaussiana, 4: Log-Normal, 5: Weibull e 6: Log-Logística.

linhagem vermelha, a distribuição Burr XII apresentou o melhor ajuste seguido da Inversa-Gaussiana (dieta I) e Log-Logística (dieta II). Em todos os grupos, a distribuição Weibull apresentou o pior desempenho. Nota-se que a seleção da distribuição segundo a inspeção informal ou subjetiva das curvas teóricas, sobrepostas às empíricas, estão de acordo com a seleção baseada nos valores das estatísticas e apresentadas nas Tabelas 2, 3 e 4. As verificações gráficas são subjetivas e não podem ser recomendadas para avaliar a qualidade do ajuste (RAYNER et al., 2009).

Tabela 4 - Valores da estatísticas usadas como critério de discriminação — linhagem vermelha

	$-2 \log(L)$	AIC	AICc	BIC	KS	AD	CvM	R
Dieta I								
1	1329,7810 ¹	1335,7810 ¹	1335,9040 ¹	1345,6760 ¹	1,9824 ⁵	5,1436 ¹	0,2633 ¹	11 ¹
2	1344,9810 ⁵	1348,9810 ⁵	1349,0420 ⁵	1355,5780 ⁵	1,3453 ³	7,2612 ⁴	0,7041 ⁴	31 ⁵
3	1339,0230 ²	1343,0230 ²	1343,0830 ²	1349,6190 ²	1,1558 ¹	9,0092 ⁵	1,0821 ⁵	19 ²
4	1339,0940 ³	1343,0940 ³	1343,1550 ³	1349,6910 ³	1,3120 ²	6,8241 ³	0,6237 ³	20 ³
5	1400,5800 ⁶	1404,5800 ⁶	1404,6410 ⁶	1411,1770 ⁶	2,0955 ⁶	10,3291 ⁶	1,2035 ⁶	42 ⁶
6	1344,1500 ⁴	1348,1500 ⁴	1348,2110 ⁴	1354,7460 ⁴	1,3986 ⁴	5,8748 ²	0,4068 ²	24 ⁴
Dieta II								
1	1268,6120 ¹	1274,6120 ¹	1274,7500 ¹	1284,1400 ¹	1,2322 ³	3,0232 ¹	0,0750 ¹	9 ¹
2	1305,3470 ⁵	1309,3470 ⁵	1309,4160 ⁵	1315,7000 ⁵	1,2468 ⁴	6,6574 ⁴	0,8240 ⁴	32 ⁵
3	1295,2080 ⁴	1299,2080 ⁴	1299,2770 ⁴	1305,5610 ⁴	1,4986 ⁵	8,4983 ⁵	1,2920 ⁵	31 ⁴
4	1294,8620 ³	1298,8620 ³	1298,9310 ³	1305,2140 ³	1,1529 ¹	5,9313 ³	0,6874 ³	19 ³
5	1375,9220 ⁶	1379,9220 ⁶	1379,9910 ⁶	1386,2740 ⁶	2,4086 ⁶	10,7495 ⁶	1,4627 ⁶	42 ⁶
6	1292,3110 ³	1296,3110 ²	1296,3800 ²	1302,6630 ²	1,2266 ²	4,7161 ²	0,3643 ²	15 ²

1: Burr XII, 2: Gama, 3: Inversa-Gaussiana, 4: Log-Normal, 5: Weibull e 6: Log-Logística.

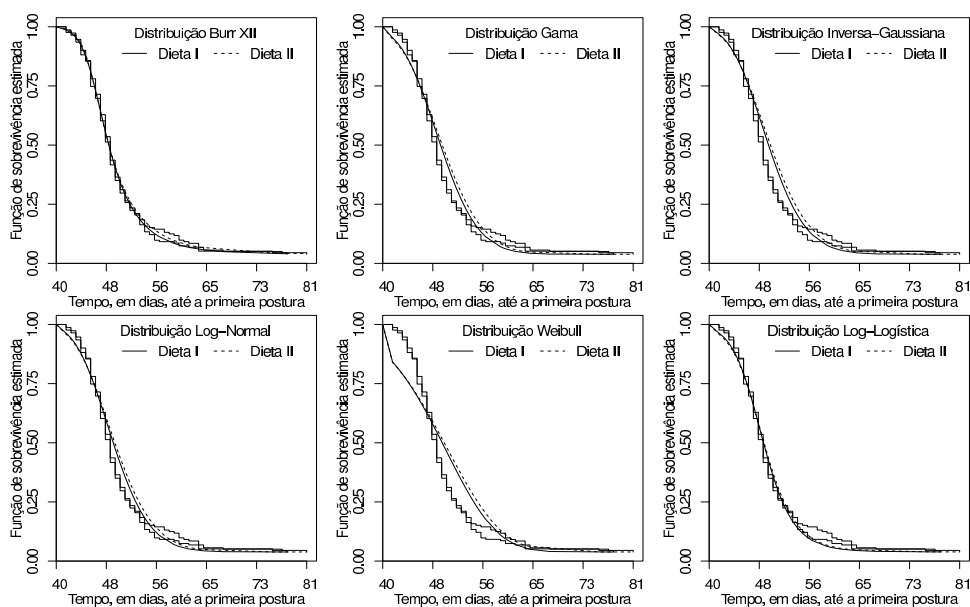


Figura 1 - Função de sobrevivência empírica e distribuições teóricas ajustadas — linhagem amarela.

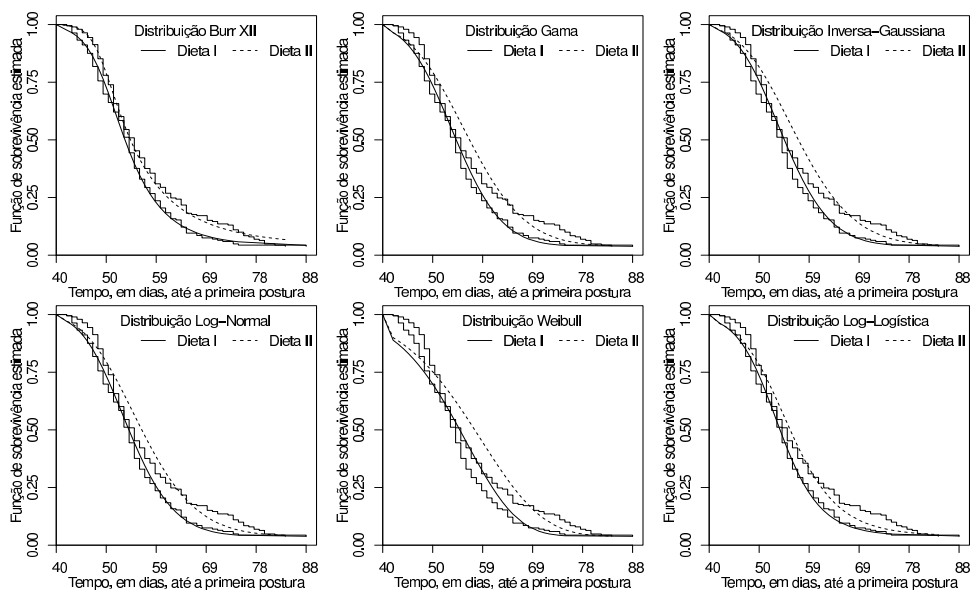


Figura 2 - Função de sobrevivência empírica e distribuições teóricas ajustadas — linhagem azul.

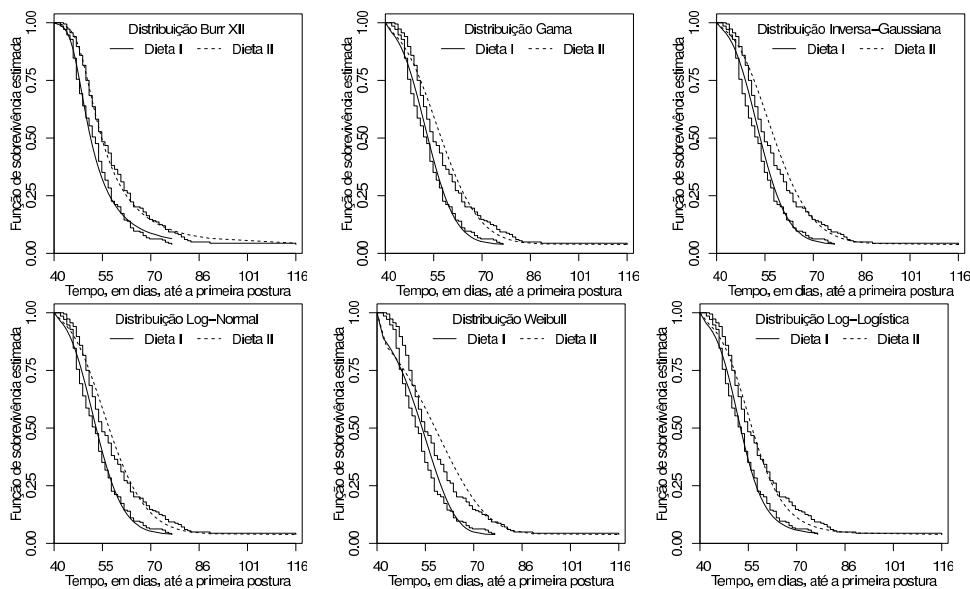


Figura 3 - Função de sobrevivência empírica e distribuições teóricas ajustadas — linhagem vermelha.

As Tabelas 5, 6 e 7 apresentam as estimativas de máxima verossimilhança, pontual e por intervalo, da idade média e da idade mais provável da primeira postura. Nitidamente, a primeira postura ocorre mais rapidamente na linhagem amarela (em torno de 40 dias) do que para as linhagens azul e vermelha (em torno dos 52 dias). É importante observar que apesar da distribuição Burr XII ter apresentado, em geral, ajuste superior as demais distribuições as estimativas pontuais são bastante próximas.

Tabela 5 - Estimativas de máxima verossimilhança da idade média e da idade mais provável da primeira postura — linhagem amarela

Modelo	Dieta	Média	E.P.	I.C. de 95%		T_{max}	E.P.	I.C. de 95%	
				L.I.	L.S.			L.I.	L.S.
1	I	40,7557	0,5150	39,7464	41,7651	37,9939	0,5214	36,9720	39,0159
	II	41,1354	0,6010	39,9575	42,3133	37,6300	0,5578	36,5367	38,7232
2	I	40,7778	0,4897	39,8179	41,7377	39,8249	0,4898	38,8650	40,7849
	II	41,1517	0,5553	40,0634	42,2401	40,0652	0,5554	38,9767	41,1537
3	I	40,7778	0,4785	39,8400	41,7156	39,4364	0,4706	38,5139	40,3588
	II	41,1517	0,5411	40,0913	42,2122	39,6336	0,5311	38,5925	40,6746
4	I	40,7466	0,4767	39,8112	41,6820	39,4281	0,4687	38,5084	40,3478
	II	41,1126	0,5390	40,0550	42,1702	39,6222	0,5288	38,5845	40,6599
5	I	40,1576	0,7204	38,7454	41,5698	41,8243	0,7895	40,2766	43,3719
	II	40,5685	0,8031	38,9942	42,1429	42,1727	0,8887	40,4307	43,9147
6	I	40,2042	0,4265	39,3683	41,0401	39,3312	0,4134	38,5209	40,1415
	II	40,3429	0,4747	39,4125	41,2732	39,3769	0,4556	38,4840	40,2698

1: Burr XII, 2: Gama, 3: Inversa-Gaussiana, 4: Log-Normal, 5: Weibull e 6: Log-Logística.

Tabela 6 - Estimativas de máxima verossimilhança da idade média e da idade mais provável da primeira postura — linhagem azul

Modelo	Dieta	Média	E.P.	I.C. de 95%		T_{max}	E.P.	I.C. de 95%	
				L.I.	L.S.			L.I.	L.S.
1	I	53,0896	0,5856	51,9418	54,2374	50,4831	0,8146	48,8866	52,0796
	II	55,8985	0,8227	54,2860	57,5109	49,7026	0,7083	48,3144	51,0908
2	I	53,0865	0,5255	52,0565	54,1165	52,1240	0,5256	51,0939	53,1541
	II	55,6968	0,6410	54,4404	56,9532	54,3098	0,6411	53,0533	55,5663
3	I	53,0865	0,5223	52,0629	54,1101	51,6798	0,5154	50,6697	52,6900
	II	55,6968	0,6342	54,4537	56,9399	53,6974	0,6229	52,4765	54,9183
4	I	53,0746	0,5220	52,0515	54,0976	51,6812	0,5149	50,6719	52,6904
	II	55,6714	0,6340	54,4288	56,9141	53,6953	0,6223	52,4756	54,9151
5	I	52,5823	0,6833	51,2431	53,9215	54,9999	0,7131	53,6022	56,3976
	II	55,3546	0,8016	53,7836	56,9256	57,8688	0,8555	56,1920	59,5455
6	I	52,7853	0,5192	51,7677	53,8030	51,6912	0,5247	50,6628	52,7196
	II	54,8721	0,6288	53,6396	56,1045	53,3398	0,5982	52,1674	54,5123

1: Burr XII, 2: Gama, 3: Inversa-Gaussiana, 4: Log-Normal, 5: Weibull e 6: Log-Logística.

Tabela 7 - Estimativas de máxima verossimilhança da idade média e da idade mais provável da primeira postura — linhagem vermelha

Modelo	Dieta	Média	E.P.	I.C. de 95%		T_{max}	E.P.	I.C. de 95%	
				L.I.	L.S.			L.I.	L.S.
1	I	52,5282	0,6539	51,2466	53,8098	47,6182	0,8391	45,9736	49,2628
	II	56,8514	0,9354	55,0180	58,6848	50,1789	0,8414	48,5297	51,8280
2	I	52,3600	0,4968	51,3863	53,3337	51,4173	0,4968	50,4436	52,3911
	II	56,6497	0,7337	55,2116	58,0878	54,9677	0,7338	53,5294	56,4059
3	I	52,3600	0,4931	51,3935	53,3265	50,9853	0,4867	50,0314	51,9392
	II	56,6497	0,7219	55,2348	58,0646	54,2598	0,7068	52,8746	55,6451
4	I	52,3477	0,4930	51,3814	53,3140	50,9848	0,4864	50,0314	51,9382
	II	56,6051	0,7203	55,1933	58,0169	54,2555	0,7047	52,8743	55,6367
5	I	51,9944	0,6281	50,7633	53,2256	54,3780	0,6504	53,1033	55,6528
	II	55,9437	0,9966	53,9904	57,8970	58,1699	1,1026	56,0089	60,3309
6	I	51,9341	0,4994	50,9553	52,9128	50,8402	0,4843	49,8911	51,7894
	II	55,7666	0,7024	54,3900	57,1433	53,9975	0,6677	52,6887	55,3062

1: Burr XII, 2: Gama, 3: Inversa-Gaussiana, 4: Log-Normal, 5: Weibull e 6: Log-Logística.

A Figura 4 apresenta as estimativas, segundo a distribuição selecionada, da idade média e da idade mais provável da primeira postura. De maneira subjetiva observa-se, na linhagem amarela, a ausência de efeito de dieta. A mesma conclusão não pode ser tirada para as linhagens azul e vermelha.

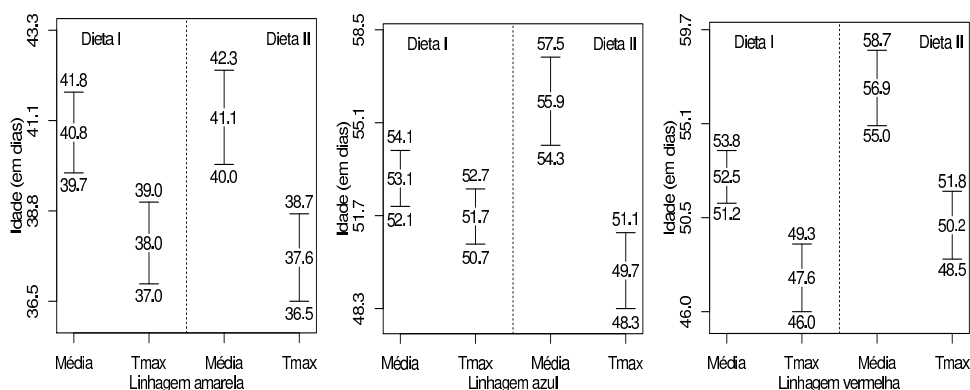


Figura 4 - Estimativas pontuais e por intervalo (coeficiente de confiança de 95%) da idade média e da idade mais provável da primeira postura para cada uma das combinações dieta versus linhagem e segundo a distribuição selecionada.

A Tabela 8 apresenta, em cada linhagem, as estimativas, pontuais e intervalares, das diferenças médias e diferenças entre as idades mais prováveis da primeira postura. Esses resultados vêm de encontro as conclusões subjetivas

provenientes da Figura 4.

Tabela 8 - Comparação do efeito da dieta em cada uma das linhagens

Linhagem	Parâmetro	Diferença	Valor-p	L.I.	L.S.
Amarela	Média	-0,3797	0,6314	-1,9308	1,1715
	T_{max}	0,3640	0,6336	-1,1326	1,8605
Azul	Média	-2,8239	0,0038	-4,7335	-0,9143
	T_{max}	1,9786	0,0239	0,2623	3,6949
Vermelha	Média	-4,3232	0,0002	-6,5602	-2,0863
	T_{max}	-2,5607	0,0312	-4,8897	-0,2317

6 Considerações finais

Neste trabalho buscou-se encontrar uma distribuição de probabilidade para explicar o comportamento da idade até a primeira postura de codornas. Segundo vários critérios de discriminação a distribuição Burr XII foi escolhida, dentre 5 distribuições rivais, em cinco de um total de 6 grupos (linhagens versus dietas). A partir da distribuição selecionada, sob o ponto de vista prático, pôde-se concluir a ausência de efeito da dieta na linhagem amarela. Enquanto que, nas linhagens azul e vermelha, o tempo médio de postura na dieta I ocorre 2 dias antes do que na dieta II. As mesmas conclusões, para as linhagens amarela e vermelha, são observadas para o parâmetro T_{max} . No entanto, T_{max} na linhagem azul, esse comportamento foi contrário, o tempo mais provável de primeira postura ocorre 2 dias antes na dieta II do que na dieta I. Naturalmente deve-se avaliar se a significância estatística de, por exemplo 2 dias, é precocidade postural suficiente para se decidir entre uma ou outra dieta.

Finalizamos, tomando emprestado de Rayner, Thas e Best (2009) o seguinte parágrafo:

“Goodness of fit is concerned with assessing the validity of models involving statistical distributions, an essential and sometimes forgotten aspect of the modeling exercise. One can only speculate on how many wrong decisions are made due to the use of an incorrect model”.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos pareceristas pelos valiosos comentários e sugestões. Danielle Peralta agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

PERALTA, D.; MAZUCHELI, J.; EMANUELLI, I. P.; ROSSI, R. M. Application of the Burr XII distribution in the laying quails data. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.35, n.1, p.1-16, 2017.

■ **ABSTRACT:** *Generally, in survival analysis the observed response is the time elapsed between the baseline and the occurrence of a particular event. In this paper the response variable describes the number days elapsed between birth and the first posture (event) of quails submitted to two treatments. The main objective is to select the best probability distribution to describe the behavior of the age (in days) to the first posture. For all groups, given the nature of the response, the probability distributions were considered: Burr XII, Gamma, Inverse Gaussian, Lognormal, Weibull and Log-Logistic. For all distributions were estimated the average time and the most probable time for the first posture. Analytical procedures and graphics, used as discrimination tools, showed that the distribution Burr XII is the most appropriate to describe the response variable. The choice of a probability distribution that efficiently describe the phenomenon under study have implications on animal management and consequently in sustainability of production.*

■ **KEYWORDS:** *Survival analysis; distribution probability; likelihood function; animal production; selection models.*

Referências

AL-NOOR, N.; AL-AMEER, H. A. Some estimation methods for the shape parameter and reliability function of Burr type XII distribution: Comparison study. *Mathematical Theory and Modeling*, v. 4, n. 7, p. 63–77, 2014.

BURR, I. W. Cumulative frequency functions. *Annals of Mathematical Statistics*, v. 13, p. 215–232, 1942. ISSN 0003-4851.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. [S.l.]: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1990. (The Wadsworth & Brooks/Cole Statistics/Probability Series).

EL-DIN, M. M. M.; KOTB, M. S. Recurrence relations for single and product moments of generalized order statistics for modified Burr XII-geometric distribution and characterization. *Journal of Advanced Research in Statistics and Probability*, v. 3, n. 1, p. 36–46, 2011.

GHARIB, M.; EL-DIN, M. M. M.; MOHAMMED, B. E. An extended Burr XII distribution and its application to censored data. *Journal of Advanced Research in Statistics and Probability*, v. 2, n. 1, p. 37–50, 2010.

HELD, L.; BOVÉ, D. S. *Applied statistical inference*. [S.l.]: Springer, Heidelberg, 2014. Likelihood and Bayes.

JESUS, D. N. C. d. *Avaliação dos efeitos da adição do óleo essencial de orégano (*origanum vulgare*) na dieta, sobre a fisiologia e a produtividade de codornas japonesas (*Coturnix Coturnix Japonica*)*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2007.

KLEIN, J. P.; MOESCHBERGER, M. L. *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data*. New York: Springer-Verlag, 1997.

KLUGMAN, S. A.; PANJER, H. H.; WILLMOT, G. E. *Loss models*. Third. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2008. (Wiley Series in Probability and Statistics). From data to decisions.

LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. Second. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003. (Wiley Series in Probability and Statistics).

LEE, E. T.; WANG, J. W. *Statistical methods for survival data analysis*. Third. [S.l.]: Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2003. (Wiley Series in Probability and Statistics).

MAZUCHELI, J.; COELHO-BARROS, E. A.; ACHCAR, J. A. Bootstrap confidence intervals for the mode of the hazard function. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, v. 79, n. 1, p. 39–47, 2005.

MAZUCHELI, J.; COELHO-BARROS, E. A.; ACHCAR, J. A. Inferences for the change-point of the exponentiated Weibull hazard function. *REVSTAT - Statistical Journal*, v. 10, n. 3, p. 309–322, 2012.

MILLAR, R. B. *Statistics in Practice*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2011.

MURTHY, D. N. P.; BULMER, M.; ECCLESTON, J. A. Weibull model selection for reliability modelling. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 86, n. 3, p. 257–267, 2004.

PARANAÍBA, P. F. et al. The beta Burr XII distribution with application to lifetime data. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 55, n. 2, p. 1118–1136, 2011.

PARANAÍBA, P. F. et al. The Kumaraswamy Burr XII distribution: theory and practice. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 83, n. 11, p. 2117–2143, 2013.

PAWITAN, Y. *In All Likelihood: Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

RAYNER, J. C. W.; THAS, O.; BEST, D. J. *Smooth tests of goodness of fit: using R*. Singapore, Chichester: John Wiley & Sons (Asia), 2009. (Wiley series in probability and statistics).

RODRIGUEZ, R. N. A guide to the Burr type XII distributions. *Biometrika*, v. 64, n. 1, 1977.

- SILVA, G. O. et al. Log-Burr XII regression models with censored data. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 52, n. 7, p. 3820–3842, 2008.
- SINGH, S. K.; MADDALA, G. S. A function for size distribution of incomes. *Econometrica*, v. 44, n. 5, p. 963–970, 1976.
- TADIKAMALLA, P. R. A look at the Burr and related distributions. *International Statistical Review. Revue Internationale de Statistique*, v. 48, n. 3, p. 337–344, 1980.
- USTA, I. Different estimation methods for the parameters of the extended Burr XII distribution. *Journal of Applied Statistics*, v. 40, n. 2, p. 397–414, 2013.
- XIE, M.; TANG, Y.; GOH, T. N. A modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 76, n. 3, p. 279–285, 2002.
- ZIMMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K. The Burr XII distribution in reliability. *Journal of Quality Technology*, v. 30, n. 4, p. 389–394, 1998.

Recebido em 25.11.2015.

Aprovado após revisão em 03.06.2016.