Testes de significância para seleção de modelos de mistura na presença de heterocedasticidade utilizando a abordagem *bootstrap*

MARCELO ANGELO CIRILLO
DEODORO MAGNO BRIGHENTI
CARLA REGINA GUIMARÃES BRIGHENTI

RESUMO

A adequacidade do ajuste de um modelo de mistura em função dos dados experimentais é comumente verificada por meio do teste de falta de ajuste. Porém, em se tratando de modelos de misturas heterocedásticos, a obtenção de um teste analítico para verificar a adequacidade de ajuste se depara com a complexidade algébrica envolvida. Assim, este artigo tem por objetivo propor testes de falta de ajuste na abordagem bootstrap, diferenciados por diferentes estruturas heterocedásticas e métodos de reamostragem, considerando um estudo de caso real referente a um experimento, no qual, a modelagem de mistura foi utilizada para otimização dos componentes de uma dieta energética de abelhas adultas confinadas em laboratório. Para estudo da precisão das estimativas foi utilizado o bootstrap duplo. Concluiu-se que o método *bootstrap* ponderado proporcionou resultados promissores para as diferentes estruturas heterocedásticas avaliadas neste trabalho.

Palavras chave

misturas / heterocedastia / valor-p / *bootstrap* / otimização

MARCELO ANGELO CIRILLO
Universidade Federal de Lavras, Dep. de Ciências Exatas
> macufla@gmail.com

DEODORO MAGNO BRIGHENTI
Doutor - Universidade Federal de Lavras, Dep. de Entomologia
> deodoro_santos@yahoo.com.br

CARLA REGINA GUIMARÃES BRIGHENTI
Universidade Federal de São João Del Rei, Dep. Engenharia de Biossistemas
> carlabrighenti@ufsj.edu.br

INTRODUÇÃO

Os modelos de misturas são utilizados em pesquisas, cuja finalidade é otimizar as proporções de cada componente, envolvido na formulação de um determinado produto. A determinação da melhor combinação dos componentes poderá conduzir a um resultado que diferencia a qualidade de um produto em relação aos demais concorrentes. Além do mais, a modelagem adequada destes experimentos poderá agregar resultados que permitam também a otimização do tempo e do custo de realização dos experimentos industriais.

Nesses experimentos, as proporções que determinam uma combinação, são dependentes entre si, uma vez que a manipulação de qualquer uma delas implicará no desbalanceamento das demais.

Mediante ao exposto, para considerar um modelo que possa representar essa dependência, com o propósito de determinar a combinação dos componentes, que otimize a resposta de interesse, utiliza-se técnicas de modelagem de superfície de resposta que por sua vez, está fundamentada na teoria clássica dos modelos de regressão (Myers e Montgomery, 1995). A validação dos modelos de misturas segue as suposições, normalidade dos resíduos e homocedasticidade das observações, tal como no modelo linear geral. Quando os resíduos não são homocedásticos, uma alternativa para contornar esse problema, dar-se-á na estimação da estrutura heterocedástica que explica a heterogeneidade das observações e posteriormente fazer a sua incorporação no ajuste do modelo (Weisberg, 1985).

A questão é determinar qual tipo de heterocedastia está presente nas observações. Rodrigues e Diniz (2006) mencionaram que a heterocedastia aditiva, é detectada quando a variância das observações é proporcional a uma das variáveis regressoras elevada ao quadrado. A heterocedastia multiplicativa é caracterizada pelo fato da variância ser proporcional a uma potência desconhecida de uma das variáveis regressoras. Nota-se que, devido às diferentes estruturas heterocedásticas que possam contemplar estas informações, torna-se difícil construir testes estatísticos que verifiquem a adequacidade do ajuste do modelo de mistura, na presença de heterogeneidade das observações.

Em consequência desse problema, tem-se uma motivação para a pesquisa de métodos de computação intensiva, com destaque para o método *bootstrap* (Efron, 1979). Uma das aplicações deste método na seleção destes modelos dar-se-á justamente na formulação de testes de falta de ajuste, obtidos da distribuição empírica da estatística proposta no teste, da qual, obtém-se o (valor-p) como medida de evidência.

Em virtude do que foi mencionado, o objetivo deste trabalho é propor testes de significância para seleção de modelos de misturas considerando diferentes estruturas de heterocedastia entre as observações, através da abordagem *bootstrap*. Dada a finalidade de validar a metodologia proposta, consideraram-se dados de um caso real de estudo, provenientes de um experimento utilizado para formular uma dieta energética para operárias de abelhas *A. mellifera* mantidas em laboratório, que caracterizam uma situação na qual a modelagem de misturas foi utilizada para formulação da dieta. Nesse experimento, a variável resposta observada mostrou-se heterogênea ao longo do tempo, sugerindo que o modelo de mistura ajustado para este experimento contemplasse uma estrutura de heterogeneidade na obtenção das estimativas dos parâmetros.

2. METODOLOGIA

2.1. DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Os dados experimentais utilizados para construção dos testes *bootstrap* propostos neste trabalho, foram obtidos em um experimento realizado no Laboratório de Biologia de Insetos do Departamento de Entomologia da Universidade Federal de Lavras sob condições laboratoriais controladas. O objetivo deste experimento foi estudar a melhor a combinação dos componentes a serem utilizados para a formulação de uma dieta energética que proporcionasse maior tempo de vida entre as operárias de abelhas *A. mellifera*.

O delineamento experimental adotado foi extreme-vértice (Piepel e Cornell, 1987) pelo fato de que as proporções referentes aos componentes utilizados para a formação da mistura, no experimento foram submetidas a restrições, descritas na Tabela 1.

Tabela 1. Restrições dos componentes utilizados na formulação da dieta energética, onde xi refere-se ao i-ésimo componente (i = 1,2,3).

Componentes	Valor mínimo (L_i)	Valor máximo (U_i)
Açúcar (x_1)	0,40	0,50
Água (x_2)	0,45	0,50
Suco de limão (x_3)	0,00	0,10

Fonte: Cirillo et al. (2009)

Os limites de cada componente x_i (i = 1,2,3) foram descritos pelo intervalo $L_i \leq x_i \leq U_i$, representando respectivamente, os valores do limite inferior e superior. No processo de otimização, a região experimental a ser explorada deverá obrigatoriamente respeitar esses limites, e a mistura das proporções dos três componentes (Tabela 1) seguirá a relação em (01).

$$\sum_{i=1}^{q} x_i = 1 \text{ com a restrição } Li \leq x_i \leq Ui \text{ e} \qquad (01)$$

q definido como o número de componentes.

Cada unidade experimental continha um recipiente plástico de 2,5 cm de diâmetro por 1,2 cm de profundidade. Cada recipiente possuía capacidade para 5 mL da dieta formulada (Tabela 2). Após a instalação do experimento, o acompanhamento comportamental das abelhas mantidas em confinamento, bem como, a avaliação do tempo de vida, até a morte dos indivíduos foi monitorada em um período de 504 horas, sendo que, a primeira avaliação foi feita nas primeiras 12 horas iniciais. O período de observação (x_4) foi tratado no processo de modelagem como uma variável de processo*

Tabela 2. Componentes (q) utilizados na modelagem de misturas considerando três repetições e uma covariável de processo.

Variável de processo	**Componentes**		
Tempo (h) x_4	**x_1**	**x_2**	**x_3**
12	0,50	0,50	0,00
12	0,50	0,45	0,05
12	0,50	0,42	0,08
12	0,50	0,40	0,10
12	0,49	0,49	0,02
12	0,49	0,48	0,03
12	0,48	0,45	0,07
12	0,47	0,47	0,06
12	0,45	0,45	0,10
504	0,50	0,50	0,00
504	0,50	0,45	0,05
504	0,50	0,42	0,08
504	0,50	0,40	0,10
504	0,49	0,49	0,02

* A definição de variável de processo em um modelo corresponde a um outro efeito que afeta a qualidade ou característica do produto. Neste trabalho, o efeito do tempo (período de execução do experimento) foi incluído no modelo em virtude da cristalização da solução o que certamente afeta a qualidade da dieta formulada.

Variável de processo	Componentes		
Tempo (h) x_4	x_1	x_2	x_3
504	0,49	0,48	0,03
504	0,48	0,45	0,07
504	0,47	0,47	0,06
504	0,45	0,45	0,10

Ressaltamos que no tempo inicial, o número de abelhas mortas era muito pequeno e que nos tempos subsequentes este número foi aumentando, assim percebeu-se que as observações apresentavam uma heterogeneidade considerável, sugerindo o uso de modelos heterocedásticos na mistura (Seção 2.2).

Por fim, a variável resposta foi caracterizada pelo número de indivíduos vivos, observado na gaiola em cada período de observação (Tabela 2), o que sugere o uso de um modelo linear generalizado com erros binomiais. Mediante esta situação, a pressuposição de normalidade dos erros seria violada, entretanto, dada que as estimativas dos parâmetros foram obtidas na abordagem bootstrap, este problema foi corrigido.

2.2. MODELAGEM DE MISTURAS COM ESTRUTURAS HETEROCEDÁSTICAS

Em concordância com o objetivo e com base nos resultados experimentais considerou-se o modelo linear geral na forma matricial definido em (2)

$$\mathbf{y} = \mathrm{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \text{ em que,} \tag{2}$$

y corresponde a um vetor $n \times 1$ de observações da variável resposta; ß um vetor $q \times 1$ de parâmetros desconhecidos; e um vetor dos erros aleatórios. Por fim, X representou a matriz de delineamento especificada de acordo com o planejamento experimental, tendo como referência os componentes descritos na Tabela 2.

De acordo com o modelo (2), sob heterogeneidade das observações, o estimador de mínimos quadrados generalizados (3), resulta no modelo linear ajustado (7). Ampliando a matriz de delineamento X com os termos quadráticos foi possível ajustar o modelo quadrático (8).

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathrm{X}'\Omega^{-1}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y} \text{ em que,} \tag{3}$$

Ω representou a estrutura de heterocedasticidade desconhecida, assim sendo, assumiu-se os seguintes estimadores: (4) White (1980); (5) MacKinnon e White (1985) e (6) Cribari-Neto e Soares (2003).

$$\hat{\Omega}_w = \text{diag}\left\{\frac{\hat{e}_1^2}{(1-h_1)^2},\ldots,\frac{\hat{e}_n^2}{(1-h_n)^2}\right\} \tag{4}$$

$$\hat{\Omega}_M = \text{diag}\left\{\frac{\hat{e}_1^2}{(1-h_1)},\ldots,\frac{\hat{e}_n^2}{(1-h_n)}\right\} \tag{5}$$

$$\hat{\Omega}_C = \text{diag}\left\{\frac{\hat{e}_1^2}{(1-h_1)^{\delta_1}},\ldots,\frac{\hat{e}_n^2}{(1-h_n)^{\delta_n}}\right\} \text{ em que, } \delta_i = \frac{nh_i}{p}\text{, sendo} \tag{6}$$

e_i o erro aleatório, h_i o elemento diagonal da matriz $H=X(X^tX)^{-1}X^t$ para $(i=1,\ldots,n)$ e p o seu posto.

$$E(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{q+1} b_i^* x_i \tag{7}$$

$$E(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{q+1} b_i^* x_i + \sum_{i=1}^{q+1}\sum_{i<j}^{q+1} b_{ij}^* x_i x_j \text{ sendo,} \tag{8}$$

$q+1$ o número de componentes e mais a covariável de processo e b_i^* corresponde às estimativas do modelo de mistura na forma canônica, isto é, considerando a restrição $x_1+x_2+x_3=1$. Desta forma, substituindo o intercepto $b_0\times 1$ por $b_0\times(x_1+x_2+x_3)$ e agrupando os termos em x_i, resultou nos coeficientes b_i^*, mantendo as especificações mencionadas anteriormente.

Com os modelos ajustados, foi possível estimar a estatística do teste de falta de ajuste (Like of Fit) convencional (Neto, Scarmínio e Bruns, 2003), conforme expressão (9).

Com os modelos ajustados, foi possível estimar a estatística do teste de falta de ajuste (Like of Fit) convencional (Neto, Scarmínio e Bruns, 2003), conforme expressão (9).

$$f_a = \frac{\left(\dfrac{SQR_l - SQR_q}{d}\right)}{QMR_q} \text{ em que,} \tag{9}$$

SQR_l e SQR_q referirem-se respectivamente, a soma quadrática do modelo de regressão linear e quadrático. Manteve-se d=3 em função da diferença dos parâmetros dos modelos (8) e (7) e QMR_q o quadrado médio residual.

A partir desta estatística os testes *bootstrap* (seção 2.3) foram construídos, no entanto, ressaltamos que não foram utilizados valores críticos provenientes da distribuição normal, portanto, a suposição de normalidade das observações não tem interesse para construção destes testes, uma vez que, os valores-p foram determinados a partir da distribuição empírica gerada em cada método bootstrap implementado.

2.3. CONSTRUÇÃO DOS TESTES BOOTSTRAP

A implementação dos testes *bootstrap* destinados a estimar o valor-p da estatística (9) foi realizada no software R versão 2.7.0 conforme as seguintes etapas:

1. Selecionou-se uma amostra aleatória $e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*$ de $\hat{e}$ com reposição.

2. Formou-se uma amostra bootstrap da variável dependente **y**. Nesta etapa, dois critérios foram estabelecidos, o bootstrap simples e ponderado. O *bootstrap* simples considerou que cada unidade amostral foi obtida por

$$y_i^* = X\hat{\beta} + e_i^* \text{ para (i=1,...,n).} \tag{10}$$

O *bootstrap* ponderado (Wu, 1986), assumiu para cada observação reamostrada, aleatoriamente, um valor t_i^* (i=1,...,n) proveniente de uma distribuição uniforme com média zero e variância unitária. Desta forma, cada unidade amostral que compôs a amostra *bootstrap* foi definida por (11)

$$y_i^* = X_i\hat{\beta} + t_i^* \frac{\hat{e}_i}{(1-h_i)} \text{ para (i=1,...,n) onde} \tag{11}$$

X_i referiu-se a i-ésima linha da matriz X.

3. Obteve-se as estimativas de mínimos quadrados generalizado (3) da amostra *bootstrap*, obtida nos dois critérios mencionados na etapa 2.

4. Para cada amostra bootstrap, obteve-se a estatística do teste da falta de ajuste conforme a expressão (9), denominada por f_b.

5. Os passos de (1)-(4) foram repetidos 1000 vezes, de forma que, para cada reamostragem, o valor-p, representado por p_b, foi obtido como a proporção do número de vezes em que o valor da estatística f_b foi superior à estatística f_a (9), calculado sobre os dados experimentais. Assim, p_b foi computado por

$$°p_b = \frac{\#\{f_b \geq f_a\}}{1000} \qquad (12)$$

Com a finalidade de obter um valor-p mais preciso, utilizou-se o bootstrap duplo (Davison e Hinkley, 1997), no qual, para cada reamostragem feita no *bootstrap* de 1º nível, foi realizada outra reamostragem, definida esta, como *bootstrap* de 2º nível. Assim sendo, foi possível computar um valor auxiliar para o valor-p (13), porém, realizando 500 reamostragens.

$$°p_b^* = \frac{\#\{f_b^* \geq f_b\}}{500} \qquad (13)$$

Posteriormente, o valor-p corrigido foi estimado por

$$°p_{cor} = \frac{\#\{p_b^* \leq p_b\}}{1000} \qquad (14)$$

Em todo este processo o número de operações realizadas foi de 500.000 reamostragens, para cada método de *bootstrap*: simples e ponderado. Com isso, nota-se que a precisão do valor-p requer um esforço computacional expressivo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Comumente em diversas aplicações que abordam o uso de métodos de reamostragem na modelagem de dados, mais especificamente, na estimação de parâmetros e construção de testes de hipóteses, a técnica do *bootstrap* paramétrico simples tem sido amplamente utilizada. Porém, se centralizarmos a discussão na heterocedasticidade das observações, esta técnica não contempla a heterogeneidade das mesmas (Cribari-Neto e Soares, 2003).

Além do mais, ao utilizar esta técnica na qual, sob a pressuposição de que cada observação é reamostrada com probabilidade uniforme, para que inferência seja realizada com precisão, é necessário dispor de um número elevado de reamostragens. Nesse caso, o processo computacional torna-se dispendioso, assim sendo, torna-se conveniente propor métodos que contribuam na redução deste esforço computacional. Uma alternativa, já conhecida para este problema, consiste na realização de uma reamostragem por importância. No contexto do método *bootstrap*, esta técnica foi introduzida por Johns (1988) e Davison (1988), em síntese, esta forma de reamostragem das observações altera deliberadamente as probabilidades de reamostragem, atribuindo maior importância a determinadas observações amostrais em relação às demais. Tal alteração provoca um aumento na precisão do estimador, proporcionado uma demanda menor no número total de reamostragens a serem realizadas. Uma outra questão que favorece esta redução envolve o uso de métodos robustos. Como por exemplo, o *bootstrap* ponderado, proposto por Wu (1986) utilizado neste trabalho, sendo este, robusto a presença de heterocedasticidade.

Em função desta discussão, os resultados encontrados na Tabela 1 referiramse as probabilidades empíricas do teste da falta de ajuste aplicado na modelagem de mistura, conforme especificado na metodologia (Seção 2.3).

Pelo fato de que a variável resposta apresentou alta heterogeneidade em função da observação da mortalidade das abelhas no decorrer do tempo e por não se conhecer a estrutura que explica esta heterocedasticidade, julgou-se adequado comparar o desempenho de três estimadores da matriz de covariância dos parâmetros. Com a finalidade de melhor inferir sobre a precisão das probabilidades obtidas para este teste, os resultados referentes ao *bootstrap* duplo são apresentados. Neste aspecto, procede-se com a apresentação e discussão dos resultados descritos na Tabela 3.

Tabela 3. Resultados das probabilidades empíricas referente a estatística do teste da falta de ajuste de um modelo de mistura com diferentes estimadores de estruturas heterocedásticas para a matriz de covariância dos parâmetros do modelo, considerando o método de *bootstrap* simples e ponderado.

	Método bootstrap		
Estrutura de heterocedasticidade	**Nível**	**Simples**	**Ponderado**
$\hat{\Omega}_W$	1° (p_b)	0,002	0,748
	2° (p_{cor})	0,001	0,774
$\hat{\Omega}_C$	1° (p_b)	0,006	0,746
	2° (p_{cor})	0,006	0,736
$\hat{\Omega}_M$	1° (p_b)	0,010	0,712
	2° (p_{cor})	0,014	0,686

Para ambos os métodos de reamostragem simples e ponderado, avaliado neste trabalho, os valores-p do teste de falta de ajuste, foram computados em dois níveis de aleatorização (Seção 2.3), sendo que, no primeiro nível o valor-p correspondente foi representado por p_b ao passo que, no 2º nível esta probabilidade é indicada pelo p_{cor}. Mantendo esta nomenclatura, os resultados encontrados na Tabela 3, evidenciaram para todos os estimadores heterocedásticos que o uso do *bootstrap* paramétrico simples, poderá proporcionar resultado enganoso em relação à decisão de rejeitar o modelo, que de fato é adequado aos dados experimentais. Esta afirmação é feita, com base baixas probabilidades observadas para este método e confirmadas pela precisão verificada nos resultados do *bootstrap* duplo.

Outra característica ressaltada por Cribari-Neto e Soares (2003) é o fato de que, quando os dados são provenientes de um mecanismo gerador heterocedástico as estimativas *bootstrap* não são consistentes e nem assintoticamente viesadas.

Em se tratando do *bootstrap* ponderado, as probabilidades obtidas para cada estimador resultaram em valores expressivos, permitindo ao pesquisar que decida individualmente se a evidência é suficientemente forte a favor da hipótese nula. Brighenti (2007) menciona que valores-p elevados fornecem evidência de que a hipótese nula é verdadeira, enquanto um valor-p relativamente pequeno indica que existe evidência dos dados contra esta hipótese. Reportando esta interpretação para os resultados encontrados neste trabalho, podemos constatar que de fato, o *bootstrap* ponderado, para todos os estimadores em questão, resultou probabilidades a favor da hipótese nula, assim sendo, há evidências estatísticas para afirmar que o modelo de mistura quadrático ajustou-se adequadamente aos dados experimentais, não requerendo a pesquisa de um modelo de ordem superior.

Um resultado específico ao desempenho dos estimadores observados neste estudo, se deu em relação à precisão da probabilidade obtida por meio do *bootstrap* duplo. Neste contexto, verifica-se que o estimador proposto por Cribari-Neto e Soares (2003) resultou em uma melhor precisão, quando comparado com os demais estimadores. Supostamente uma explicação para esta pequena diferença de precisão em relação aos estimadores de White (1980) e MacKinnon e White (1985) é o fato de que o estimador de White (1980) poderá apresentar um viés expressivo em amostras de tamanho finito, mesmo incluindo os termos de correção, o que originou o estimador de Mackinnon e White (1985). Neste trabalho, ambos os estimadores por meio do bootstrap duplo, revelaram praticamente a mesma diferença na precisão.

CONCLUSÕES

Recomenda-se o uso do *bootstrap* ponderado para verificar a adequacidade de ajuste de modelos heterocedástico, independente da estrutura de heterocedastia assumida.

Em relação à precisão do valor-p do teste de falta de ajuste o estimador da matriz de covariância dos parâmetros do modelo proposto por Cribari-Neto e Soares (2003) foi mais preciso em relação aos demais estimadores comparados.

~ *Agradecimentos*

Os autores agradecem o auxílio financeiro recebido do CNPq aprovado em projeto do edital universal com referência no Edital MCT/CNPq 15/2007.

Agradecemos também ao Departamento de Entomologia pela utilização dos laboratórios e equipamentos.

BIBLIOGRAFÍA

Brighenti, C.R.G. (2007). *Testes com erros frequentistas condicionais e testes com interpretação bayesiana e frequentista condicional,* UFLA-Universidade Federal de Lavras, Depto de Ciências Exatas, Tese de doutorado, Lavras.

Cirillo, M.A.; Brighenti, C.R.C.; Brighenti, D.M. (2009). Otimização dos componentes de uma dieta energética de abelhas *Apis mellifera* Linnaeus, 1758 (Hymenoptera: Apidae) através da modelagem de misturas In: XI Escola de Modelos de Regressão, Recife.

Cribari-Neto, F.; Soares, A.C.N. (2003). Inferência em modelos heterocedásticos, *Revista Brasileira de Economia*, 57, 319-335.

Cornell, J.A. (1990). *Experiments with Mixtures: Designs, Models and the Analysis of Mixture Data.* Second edition, John Wiley & Sons, New York.

Davison, A.C. (1988). Discussão dos artigos de D.V. Hinkley e T. J. DiCiccio e J. P. Romano. *Journal of the Royal Statistical Society*, 50, 356-357.

Davison, A.C.; Hinkley, D.V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application.* Cambridge University Press, New York.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics,* 7,1-26.

Johns, M.V. (1988). Importance sampling for bootstrap confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 709-714.

MacKinnon, J.G.; White, H. (1985). Some heteroskedasticity consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. *Journal of Econometrics*, v.29, 305-325.

Myers, R.H.; Montgomery, D.C. (1995) *Response Surface Methodology: Process ands Product Optmization Using Designed Experiments*, Wiley

Neto, B.B.; Scarminio, I.S., Bruns, R.E. (2003). *Como fazer experimentos – Pesquisa na ciência e na industria*, 2 edição, Campinas

Piepel,G.F.; J.A.Cornell. (1987) Designs for Mixture-Amount Experiments, *Journal Quality Technology,* v.19, 11-28.

R Development Core Team (2008). R: *A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org.

Rodrigues, S.A., Diniz, C.A.R. (2006) Modelo de regressão heterocedástico, *Revista Matemática e Estatística*, v.24, 133-146.

Vieira, A.F.C.; Dal Bello, L.H.A. (2006) Experimentos com misturas para otimização de processos: Uma aplicação com respostas não normais, *Pesquisa Operacional*, v.26, 605-623.

Weisberg, S. (1985). *Applied Linear Regression*, Willey, New York.

White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix and a direct test for heteroskedasticity. Econometrica, v.48 ,817-838.

Wu, C.F.J. (1986). Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *Annals of Statistics*, v.14,1261-1295.