

**PROPOSTAS DE TESTES MULTIVARIADOS
PARA COMPARAR MATRIZES DE
COVARIÂNCIAS DE POPULAÇÕES NORMAIS
DEPENDENTES**

MARCELO ANGELO CIRILLO

2006

MARCELO ANGELO CIRILLO

**PROPOSTAS DE TESTES MULTIVARIADOS PARA
COMPARAR MATRIZES DE COVARIÂNCIAS DE
POPULAÇÕES NORMAIS DEPENDENTES**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras,
como parte das exigências do Programa de Pós-
Graduação em Agronomia, área de concentração em
Estatística e Experimentação Agropecuária, para a
obtenção do título de “Doutor”

Orientador:

Prof^o. Dr. Daniel Furtado Ferreira

Co-orientador:

Prof^a. Dra. Thelma Sáfyadi.

**LAVRAS
MINAS GERAIS – BRASIL
2006**

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de
Processos Técnicos da**

Biblioteca Central da UFLA

Cirillo, Marcelo Angelo

Propostas de testes multivariados para comparar matrizes de covariâncias
de populações normais dependentes / Marcelo Angelo Cirillo. -- Lavras : UFLA, 2006.

111 p. p. : il.

Orientador: Daniel Furtado Ferreira

Tese (Doutorado) – UFLA.

Bibliografia.

1. Bootstrap. 2. Inferência Bayesiana. 3. Populações normais dependentes. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD-519.538

MARCELO ANGELO CIRILLO

**PROPOSTAS DE TESTES MULTIVARIADOS PARA
COMPARAR MATRIZES DE COVARIÂNCIAS DE
POPULAÇÕES NORMAIS DEPENDENTES**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras,
como parte das exigências do Programa de Pós-
Graduação em Agronomia, área de concentração em
Estatística e Experimentação Agropecuária, para a
obtenção do título de “Doutor.”

APROVADA em, 10 de Abril de 2006.

Profº. Dr. Júlio S.S. Bueno Filho
Profª. Dra. Lúcia Pereira Barroso
Profº. Dr. Marcelo Tavares
Profª. Dra. Thelma Sáfadi

UFLA
IME – USP
UFU
UFLA

Profº. Dr. Daniel Furtado Ferreira
DEX – UFLA
(Orientador)

LAVRAS
MINAS GERAIS - BRASIL
2006

À

**Minha amada esposa Juliana
pelo amor, dedicação, compreensão e
pelo presente que ainda se está "guardado".**



Ofereço

Aos meus pais,

Euclides Cirillo e

Alice Malassise Cirillo.

Às minhas irmãs,

Marcia Simone Cirillo e

Eveline Simara Cirillo

Dedico.

AGRADECIMENTOS

A **DEUS**, por ter estado comigo em todos os momentos da minha vida.

À Universidade Federal de Lavras pela oportunidade e confiança em meu trabalho, a qual terei a honra e o prazer de fazer parte do quadro de docentes.

À Fapemig pela concessão da bolsa de estudos.

Aos colegas de classe, em especial Luís, Washington, Marcelo, Eric e Fabiano, Zé Waldemar e Janser.

Aos professores do DEX/ULFA pelos ensinamentos e amizade.

Ao Prof. Daniel Furtado Ferreira pela orientação, dedicação e exemplo não só de pessoa, como também de profissionalismo.

Aos amigos Paulo e Michella pela amizade e consideração.

Ao Wagner Cavali pelo imenso apoio nos momentos difíceis, desde o tempo em que trabalhamos juntos. (Valeu Guri).

À Lúcia Mendonça pela sincera amizade e incentivo nas consultorias.

À “sogra” Dora Vigilato pela força e apoio.

Aos amigos Carla e Deodoro Brighenti, pela sincera amizade e exemplo de vida (não esquecendo do Luquinha e recém chegado Thiago .

Ao Rômulo, família e aos amigos da UNIMONTES pela confiança no meu trabalho.

Aos meus familiares, tios e primos, com muito carinho. Enfim, a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para meu crescimento e sucesso. **DEUS** os abençoe.

SUMÁRIO

	Página
LISTA DE TABELAS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	6
2.1 Distribuições Multivariadas e Variância Generalizada	6
2.1.1 Distribuição Normal Multivariada	6
2.1.2 Distribuição Wishart.....	10
2.1.3 Variância Generalizada	12
2.2 Introdução à Inferência Clássica e Frequentista.....	15
2.3 Fundamentos da Teoria da Decisão.....	17
2.3.1 Testes da Razão de Verossimilhanças.....	20
2.4 Introdução à Inferência Bayesiana	25
2.4.1 Informação a Priori e Probabilidade Subjetiva.....	26
2.4.2 Distribuição a Posteriori.....	29
2.4.3 Intervalos de Confiança Bayesiano	30
2.4.4 Uma Breve Abordagem Sobre os Métodos Numéricos Utilizados na Inferência Clássica e Bayesiana.....	31
2.5 Teoria Bayesiana e Frequentista na Tomada da Decisão	34
3 MATERIAL E MÉTODOS.....	37
3.1 Propostas de Testes Multivariados para Comparar k-Matrizes de Covariâncias de Populações Normais Dependentes.....	37

3.2 Fatores Utilizados na Avaliação dos Testes	39
3.3 Simulação das Populações.....	40
3.4 Inferência Frequentista Via o Método <i>Bootstrap</i>	45
3.5 Inferência Bayesiana	47
3.6 Cálculo das Probabilidades do Erro tipo I e Poder.....	50
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	52
4.1 Considerações Sobre as Probabilidades de Rejeição dos Testes Multivariados Propostos para Comparar k-Matrizes de Covariâncias de Populações Normais Dependentes	52
4.2 Probabilidades do Erro Tipo I	53
4.3 Poder dos Testes Multivariados para Comparar Matrizes de Covariâncias de k Populações Normais Dependentes.....	68
4.4 Aplicação dos Testes Baseados na Razão dos Determinantes e Traços Considerando as Matrizes de Covariâncias Geradas via os Métodos <i>Bootstrap</i> e Bayesiano	85
4.4.1 Determinação dos p-valores dos Testes Baseados na Razão dos Determinantes e Traços Considerando a Geração das Matrizes de Covariâncias foi dada pelos Método <i>Bootstrap</i> e Bayesiano.....	90
5 CONCLUSÕES.....	93
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94
ANEXO 1	99
ANEXO 2	102
ANEXO 3	108

LISTA DE TABELAS

Tabela	Títulos	pg.
1	Tipos dos erros em testes de hipóteses.	19
2	Layout da matriz $Y_{g \times pk}$ utilizada na determinação do parâmetro matriz de covariância sob a situação de heterogeneidade ($\delta > 1$).	42
3	Probabilidades do erro tipo I para as situações de baixa e alta correlação avaliadas nas combinações de número de populações (k) e número de variáveis (p) considerando o critério definido pela razão do traço.	64
4	Probabilidades do erro tipo I considerando a variância generalizada dada pela razão dos determinantes e pela razão dos traços nos testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelos métodos <i>bootstrap</i> e bayesiano nas duas correlações globais avaliadas por diferentes tamanhos amostrais com o nível de significância fixado em 1%, k=8 e p=12.	67
5	Poder do teste multivariado baseado na razão dos determinantes para comparar k-matrizes de covariâncias de populações normais dependentes em que as matrizes foram geradas pelos métodos <i>bootstrap</i> e bayesiano com diversos tamanhos amostrais, considerando o número de populações (k = 8) e o número de variáveis (p = 2).	79

6	Poder do teste multivariado baseado na razão dos determinantes para comparar k-matrizes de covariâncias de populações normais dependentes, em que as matrizes foram geradas pelos métodos <i>bootstrap</i> e bayesiano com diversos tamanhos amostrais, considerando o número de populações ($k = 8$) e número de variáveis ($p = 3$).	81
7	Poder do teste multivariado baseado na razão de determinantes para comparar k-matrizes de covariâncias de populações normais dependentes em que as matrizes foram geradas pelos métodos <i>bootstrap</i> e bayesiano, com diversos tamanhos amostrais considerando o número de populações ($k = 12$) e número de variáveis ($p = 8$).	83
8	Dados referentes à avaliação do efeito do exercício de força sobre o estresse oxidativo no plasma de mulheres na terceira idade, coletados em 16 mulheres voluntárias antes e após a realização de exercícios durante 4 semanas.	86
9	Probabilidades p dos testes baseados na razão de determinantes e traços em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelos os métodos <i>bootstrap</i> e bayesiano.	91

RESUMO

Cirillo, Marcelo Angelo. **Propostas de testes multivariados para comparar matrizes de covariâncias de populações normais dependentes.** 2006. 111p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) Universidade Federal de Lavras, Lavras MG*.

Na literatura encontram-se diversos testes para comparar k -matrizes de covariâncias populacionais; contudo, a principal suposição é de que as amostras sejam provenientes de populações normais multivariadas independentes. Na ausência dessa suposição, o número de testes relatados na literatura é bastante reduzido e limitado a situações em que o número de populações é relativamente pequeno. A motivação para realização desse trabalho é justamente propor testes baseados na razão de variâncias generalizadas para comparar tais matrizes oriundas de populações normais dependentes. As matrizes de covariâncias foram geradas por meio das teorias frequentista (*bootstrap*) e bayesiana. Concluiu-se que os testes, cujas matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* foram mais poderosos do que os testes em que estas matrizes foram geradas por meio da inferência bayesiana.

* Comitê Orientador: Daniel Furtado Ferreira (Orientador) Coorientador: Thelma Sáfadi

ABSTRACT

Cirillo, Marcelo Angelo. **Proposed of multivariate tests for comparing covariance matrices of dependent normal populations**. 2006. 111p. Thesis (Doctorate in Experimental Statistics and Agricultural Experimentation) – Federal University of Lavras, Lavras, Minas Gerais, Brazil.*

A number of tests may be found in the literature to compare k-covariance matrices, assuming independent multivariate normal populations. For the cases that this assumption is violated there is a reduced number of such tests in the literature mainly with a small number of populations. The motivation of this work is to propose new tests based on generalized variances ratios for comparing covariance matrices of dependent normal multivariate populations. The covariance matrices were generated using frequentist (bootstrap) and bayesian theory. The tests that used bootstrap for generating the covariance matrices were more powerful than the bayesian approach for obtaining the covariance matrices.

* Guidance Committe: Daniel Furtado Ferreira – UFLA (Major Professor), Thelma Sáfadi.

1 INTRODUÇÃO

Dentre as suposições exigidas para a realização de inferência estatística paramétrica, supostamente, a mais importante é a suposição de que as amostras sejam independentes e provenientes de populações, cujas distribuições são conhecidas. Dentre essas distribuições, a distribuição normal é preponderante no sentido de que várias distribuições amostrais (Ex. t-student, Qui-quadrado, Cacuchy etc...) são originadas. A importância da distribuição normal implica diretamente na construção de testes de hipóteses e intervalos de confiança que são utilizados para comparação de parâmetros populacionais como: média, variâncias e quantis, etc.

Há situações em que a independência é verificada nos resíduos, haja visto que as observações poderão apresentar alguma forma de dependência. Um exemplo clássico é dado na modelagem de séries temporais, mais especificamente, os modelos autorregressivos (Box & Pierce, 1970) utilizados em séries temporais, cujas observações apresentam-se dependentes no tempo, com uma estrutura de correlação geralmente conhecida. Todavia, a validação do modelo é feita mediante a verificação da independência dos resíduos, denominado no contexto como ruído branco.

Embora na maioria das técnicas estatísticas paramétricas exija-se que as amostras sejam independentes das amostras, não se pode excluir situações práticas, das quais a independência entre as observações é ausente. Uma situação típica são os ensaios de bioequivalência, nos quais;

em síntese, tem-se o objetivo de verificar se uma nova droga apresenta uma eficácia similar à outra droga “padrão”. O delineamento consiste em aplicar ambas as drogas nas mesmas unidades amostrais classificadas em dois grupos distintos, diferenciando apenas a ordem de recebimento. Neste caso, o indivíduo apresenta-se como o próprio controle. Este delineamento é conhecido como crossover (Wang et al., 1999). Para as análises provenientes destas respostas que são correlacionadas, deve-se considerar esta estrutura de correlação.

Uma hipótese que surge naturalmente diante deste tipo de experimento refere-se à igualdade das matrizes de covariância das populações tratada e controle (Wang et al., 1999). Entretanto, os testes comumente utilizados como os de Bartlett (O’Brien, 1992) e Levene (Levene, 1960), não poderão ser utilizados, pois em sua construção considera-se a independência das amostras. Isto posto, tem-se como principal motivação a pesquisa de um teste multivariado para igualdade de covariâncias em situações que consideram a dependência das observações multivariadas entre as populações.

É evidente que este problema não é atual; portanto, alguns resultados encontram-se na literatura. Entretanto, de um modo geral, os testes propostos por diversos autores são definidos sob a teoria da verossimilhança. Assim, far-se-á na seqüência um breve histórico. Para um melhor entendimento, será assumido o número de variáveis seja igual a p e o número de populações igual a k .

Finney (1938) foi o primeiro a estudar esse problema considerando apenas o caso univariado ($p = 1$) e duas populações ($k = 2$), com correlação conhecida entre a mesma variável das duas populações.

Posteriormente, Pitman (1939) e Morgan (1939) propuseram um teste de razão de verossimilhanças, porém com a matriz de correlação desconhecida. Desde então, muitos autores exploraram estes resultados, mas, considerando apenas o caso univariado ($p = 1$) e diferentes números de populações.

Em relação ao número de populações a ser considerado, Roy & Potthoff (1958) concentraram-se em resolver o problema para o caso bidimensional, isto é, $k = 2$ e o número de variáveis $p \geq 2$. Todavia, não obtiveram sucesso na construção do teste. Jiang et al. (1999) constataram que o teste proposto por Roy & Potthoff (1958) apresentava deficiências nas pressuposições impostas. Smith & Kshisagar (1985) apresentaram um teste de razão de verossimilhanças para testar matrizes de covariâncias provenientes de duas populações normais dependentes, no entanto, os autores não conseguiram definir uma expressão analítica do estimador de máxima verossimilhança sob a hipótese nula. Em decorrência desse problema numérico de maximização das funções de verossimilhança, os autores conduziram a resolução deste problema utilizando certos valores iniciais, que resultassem em uma estimativa da matriz de covariância positiva definida.

Em uma situação mais ampla, representada pelo número de populações $k \geq 2$ e pelo número de variáveis $p \geq 2$, Krishnaiah (1975) propôs um teste para comparar duas ou mais matrizes de covariância provenientes de populações normais dependentes. Tal teste foi formalizado sob a suposição de que a diagonal das matrizes de covariância fossem iguais; porém, a principal crítica dada a esse teste é

que o mesmo foi construído sem qualquer restrição ou suposição referente à estrutura de dependência entre essas matrizes.

Jiang et al. (1999) avaliaram, por meio de simulação Monte Carlo, alguns testes baseados em razão de verossimilhanças, utilizados na comparação de matrizes de covariâncias de populações normais dependentes. A diferenciação entre cada teste se deu por diferentes correções no número de graus de liberdade, propostas por diferentes autores, de tal forma, que para cada correção originaram-se novas estatísticas. Por se tratarem de testes provenientes da razão de verossimilhanças, e considerando a hipótese H_0 , assintoticamente essas estatísticas são distribuídas segundo uma distribuição qui-quadrado. Os resultados encontrados por esses autores foram restritos apenas ao caso bidimensional, uma vez que a extensão desses testes para p-dimensões tornou-se inviável face ao problema numérico de maximização de verossimilhança.

Uma segunda motivação, não menos importante, para se enfatizar a necessidade de apresentar um teste geral para a igualdade de matrizes de covariâncias na presença de dados correlacionados no tempo ou no espaço, refere-se à checagem do atendimento dos pressupostos na análise de variância e nos testes T^2 de Hotelling. Exige-se que os dados submetidos a uma análise de variância multivariada tenham resíduos normais p-variados, com média nula e matriz de covariância constante. Para checar a suposição de covariâncias constantes, quando há k populações ou tratamentos, é necessário que exista a disponibilidade de um teste mais geral. Como foi relatado anteriormente, estes testes não existem ou são limitados para a situação de dependência.

Quando existem dificuldades devidas aos métodos numéricos ou ao desenvolvimento de testes utilizando a teoria exata ou assintótica, é possível utilizar métodos de computação intensiva. A estes métodos são atribuídas soluções simples, nas mais variadas situações reais (Manly, 1997). Em geral, quando são propostos novos testes desta natureza ou baseados em aproximações e distribuições assintóticas, deve-se avaliar seus desempenhos por meio de simulação Monte Carlo. Basicamente, utiliza-se checagem do tamanho real dos testes e da magnitude de seu poder para várias configurações de seus parâmetros.

A necessidade de novas propostas de testes estatísticos torna-se mais atrativa se for considerada a incorporação de informações resultantes de experimentos anteriores; portanto, evidencia-se a necessidade de realizar inferência bayesiana associada à análise multivariada.

Em virtude do que foi mencionado, este trabalho objetivou propor testes multivariados para comparar matrizes de covariâncias provenientes de k populações normais multivariadas dependentes, em que as matrizes de covariâncias foram geradas via os métodos *bootstrap* e bayesiano, bem como, estudar suas propriedades relativas às taxas de erro tipo I e ao poder.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Em conformidade com a metodologia estatística utilizada neste trabalho, dividiu-se o referencial teórico nos seguintes tópicos: distribuições multivariadas e variância generalizada (Seção 2.1); introdução à inferência clássica e freqüentista (Seção 2.2); fundamentos da teoria da decisão (Seção 2.3); introdução à inferência bayesiana (Seção 2.4) e teoria da decisão (Seção 2.4); e teoria bayesiana e freqüentista na tomada da decisão (Seção 2.5). Posteriormente, procedeu-se a descrição de cada seção.

2.1 Distribuições Multivariadas e Variância Generalizada.

As distribuições apresentadas nessa seção essencialmente referem-se à distribuição Normal Multivariada, Wishart e suas propriedades. O conceito de variância generalizada é adicionado a esta seção por se tratar de uma importante medida utilizada nas mais diversas áreas da análise multivariada.

2.1.1 Distribuição Normal Multivariada.

Considerando o vetor de variáveis aleatórias $\underline{X} = (X_1, \dots, X_p)^t$ tal que cada componente X_i ($i=1, \dots, p$) é distribuída por uma normal com média μ e variância σ^2 , tem-se que a distribuição conjunta destes componentes é a distribuição normal multivariada; então, estes parâmetros podem ser representados matricialmente. Assim, representa-se

o vetor de médias populacionais por $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^t$ e a matriz de covariância, por $\Sigma_{p \times p}$. Em geral utiliza-se a notação $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ para definir tal distribuição, sendo que a função de densidade é definida pela expressão (1).

$$f_{\underline{X}}(\underline{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{\left\{ -\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^t \Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}) \right\}} \quad (1)$$

Com base nesta função, Giri (1995) demonstrou um importante teorema cuja utilização é dada na combinação de diversas populações normais multivariadas, representada unicamente por uma matriz de partição.

Teorema 1: Seja $\underline{X} = (\underline{X}_{(1)}^t; \underline{X}_{(2)}^t)^t$, em que cada componente representa um vetor de observações multivariada com as seguintes dimensões: $\underline{X}_{(1)} = (X_1, \dots, X_q)^t$ e $\underline{X}_{(2)} = (X_{q+1}, \dots, X_p)^t$, referindo-se, respectivamente, à primeira e segunda população. Analogamente, o vetor de médias populacional $\underline{\mu}$ e a matriz de covariância Σ seguem a seguinte partição:

$$\underline{\mu} = (\underline{\mu}_{(1)}^t, \underline{\mu}_{(2)}^t)^t \quad (2)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dado que \underline{X} tem uma distribuição normal multivariada com os parâmetros definidos nas expressões (2) e (3) e, fazendo $\Sigma_{12} = \underline{0}$, implicará que $\underline{X}_{(1)}$ e $\underline{X}_{(2)}$ são normais independentes com os parâmetros dados por cada componente das expressões (2) e (3).

Por conseqüência, a forma quadrática expressa na função de densidade (1) é resumida por:

$$(\underline{x}-\underline{\mu})^t \Sigma^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu}) = (\underline{x}_{(1)}-\underline{\mu}_{(1)})^t \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}_{(1)}-\underline{\mu}_{(1)}) + (\underline{x}_{(2)}-\underline{\mu}_{(2)})^t \Sigma_{22}^{-1} (\underline{x}_{(2)}-\underline{\mu}_{(2)}). \quad (4)$$

Desta forma, tem-se que $f_x(\underline{X})$ poderá ser escrita como produto de duas distribuições marginais (expressão 5).

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} |\Sigma_{11}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x}_{(1)}-\underline{\mu}_{(1)})^t \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}_{(1)}-\underline{\mu}_{(1)}) \right\}} \times \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p-q}{2}} |\Sigma_{22}|^{\frac{1}{2}}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x}_{(2)}-\underline{\mu}_{(2)})^t \Sigma_{22}^{-1} (\underline{x}_{(2)}-\underline{\mu}_{(2)}) \right\}} \quad (5)$$

De acordo com o Teorema 1 e assumindo $\Sigma_{12} \neq \underline{0}$ como conseqüência deste teorema, Giri (1995) demonstrou as seguintes propriedades:

- a) A marginal de $\underline{X}_{(1)}$ é uma $N_q(\underline{\mu}_{(1)}, \Sigma_{11})$;

b) A condicional de $\underline{X}_{(2)}$ dado $\underline{X}_{(1)} = \underline{x}_{(1)}$ é $N_p(\underline{\mu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\underline{x}_{(1)} - \underline{\mu}_1))$.

Em relação às transformações lineares e quadráticas de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal multivariada, representada por $\underline{X} \sim N_p(\underline{0}, I_n)$, e assumindo uma transformação linear $\underline{Y} = B\underline{X}$ e $\underline{Z} = A\underline{X}$, tal que $B_{k \times n}$ e $A_{m \times n}$ são matrizes de constantes, Giri (1995) provou que:

$$\begin{pmatrix} \underline{Y} \\ \underline{Z} \end{pmatrix} \sim N_{k+m} \left[\begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} BB^t & BA^t \\ AB^t & AA^t \end{pmatrix} \right], \quad (6)$$

implicando na afirmação de que \underline{Y} e \underline{Z} são não correlacionados se e somente se $AB^t=0$.

Considerando a matriz de partição, também se pode construir a função de verossimilhança de uma distribuição normal multivariada com os parâmetros citados pelas expressões (2) e (3). Para isso, basta fazer o produtório das densidades dos $X_{i(s)}$ com $i=1, \dots, n$ considerando o modelo probabilístico dado na expressão (1). A expressão analítica da função de verossimilhança é

$$L(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} \left(s + n(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu})(\bar{\underline{x}} - \underline{\mu})^t \right) \right\}}, \quad (7)$$

em que s representou a realização amostral da variável aleatória S definida como matriz de soma de quadrados e produtos.

A importância da função de verossimilhança é facilmente verificada em diversos estudos, principalmente nos que envolvam estimação de parâmetros; contudo, dá-se maior destaque à realização da inferência bayesiana, que será apresentada na seção 2.4.

2.1.2 Distribuição Wishart.

O estimador da matriz de covariância Σ é dado pela matriz S. A obtenção desta matriz pode ser feita mediante uma matriz de soma de quadrados e produtos multiplicada por $1/(n-1)$, em que n corresponde ao número total de observações. (Johnson & Wichern, 1998).

A distribuição deste estimador, em amostragens da normal multivariada, foi apresentada por Giri (1995) como distribuição de Wishart com a notação dada por $W(v, \Sigma)$, em que $v = n-1$ corresponde aos graus de liberdade. A função densidade desta distribuição é dada por:

$$f_W(s | v, \Sigma) = \frac{|s|^{\frac{(v-p-1)}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}\Sigma^{-1}s\right\}}}{2^{\frac{vp}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{\frac{v}{2}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{(n-i)}{2}\right)} \quad (8)$$

A distribuição de Wishart (8) tem importantes propriedades, que facilitam sua aplicação na análise multivariada. Uma delas foi demonstrada por Giri (1995), originando o seguinte teorema.

Teorema 2: Seja a matriz de partição da matriz de somas de quadrados e produtos S definida por:

$$S_{(q+p) \times (q+p)} = \begin{pmatrix} S_{(11)} & S_{(12)} \\ S_{(21)} & S_{(22)} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

em que $S_{(11)}$ é uma matriz $q \times q$; $S_{(22)}$ é uma matriz $p \times p$ $S_{(12)}$ é uma matriz de dimensão $(q < p)$. Analogamente, tem-se a matriz de partição Σ definida da seguinte forma:

$$\Sigma_{pq \times pq} = \begin{pmatrix} \Sigma_{(11)} & \Sigma_{(12)} \\ \Sigma_{(21)} & \Sigma_{(22)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Com base nesse teorema, têm-se as seguintes propriedades:

a) $S_{(11)} - S_{(12)}S_{(22)}^{-1}S_{(21)}$ tem distribuição de $W_q(n-(p-q), \Sigma_{(11)} - \Sigma_{(12)}\Sigma_{(22)}^{-1}\Sigma_{(21)})$;

b) $S_{(22)}$ tem distribuição $W_{p-q}(n, \Sigma_{(22)})$;

c) A distribuição condicional de $S_{(12)}S_{(22)}^{-1}$ dado $S_{(22)} = s_{(22)}$ é normal multivariada $N_{pq}(\Sigma_{(12)}\Sigma_{(22)}^{-1}, \Sigma_{(22)} - \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}\Sigma_{(12)} \otimes s_{(22)}^{-1})$;

d) $S_{(11)} - S_{(12)}S_{(22)}^{-1}S_{(21)}$ é independente de $(S_{(12)}, S_{(22)})$.

Note que a distribuição de Wishart nada mais é do que uma generalização da distribuição qui-quadrado para p dimensões. Analogamente, tem-se essa generalização em relação à distribuição

inversa qui-quadrado, denominada por Wishart Inversa. A função densidade é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3: Seja W uma matriz aleatória distribuída por uma Wishart representada por $W(v, \Sigma)$ então a distribuição de $S^{-1}=W^{-1}$ é dada pela função densidade.

$$f_S(s | v, \Sigma) = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{v}{2}} |s|^{-\frac{(v+p+1)}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(\Sigma^{-1}s^{-1})\right\}}}{2^{\frac{vp}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{v-i+1}{2}\right)} \quad (11)$$

2.1.3 Variância Generalizada.

Considerando p variáveis observadas em cada unidade amostral, conforme mencionado na seção anterior, sabe-se que toda a variância amostral é descrita pela matriz de covariância C (12). Entretanto, em muitas situações torna-se desejável expressar toda esta informação em um único número. Sendo assim, Johnson & Wichern (1998) apresentaram o conceito de variância generalizada.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1p} & c_{2p} & \cdots & c_{pp} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Dada a matriz C , Johnson & Wichern (1998) definiram a variância generalizada pelo seu respectivo determinante ou traço, de forma equivalentemente, o produto e soma dos seus autovalores ($\lambda_i, i = 1, \dots, p$). A justificativa para representação desta medida é verificada pela interpretação geométrica, mais especificamente explicada pela área de um trapezóide (no caso bidimensional, por exemplo) gerada dentro de um plano, por dois vetores de desvios representados por $e_1 = y_1 - \bar{x}_1 \underline{1}$ e $e_2 = y_2 - \bar{x}_2 \underline{1}$. Desta forma, considerando estas duas dimensões, Johnson & Wichern (1998) demonstram que o $|C|$ pode ser escrito por:

$$|C| = \frac{(\text{área})^2}{(n-1)^2}. \quad (13)$$

Expandindo esse resultado para p -dimensões, a expressão (13) é análoga, porém, a área é substituída por um volume gerado em um hiperplano por $p-1$ vetores e_1, e_2, \dots, e_p . Assim, a variância generalizada é definida por

$$|C| = \frac{(\text{volume})^2}{(n-1)^p}. \quad (14)$$

Fixado um conjunto de dados, nota-se que na expressão (14) a variância generalizada é proporcional à raiz quadrada do volume gerado por p vetores de desvios. Portanto, o volume ou $|C|$ será pequeno, se as variâncias c_{ii} forem relativamente pequenas, ou grande, se as variâncias

forem grandes. É evidente, que este volume está associado ao ângulo entre os vetores, de tal forma que, o volume será pequeno caso o valor do ângulo seja próximo de 0° ou de 180° e grande quando o valor do ângulo for próximo a 90° .

Agora, há situações em que o valor da variância generalizada pode ser nulo; diante disto, supostamente pode-se inferir que há alguma degeneração no sentido de que, pelo menos uma das linhas da matriz de desvios (15) é uma combinação linear de uma ou mais linhas. Isso deve ocorrer sempre que o tamanho amostral for inferior ao número de variáveis.

$$\begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{1p} - \bar{x}_p \\ x_{21} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{2p} - \bar{x}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} - \bar{x}_1 & x_{n2} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{np} - \bar{x}_p \end{bmatrix} \quad (15)$$

Embora neste referencial os fundamentos da variância generalizada tenham sido ilustrados considerando apenas a matriz de covariância amostral C , convém salientar que esses mesmos conceitos são válidos para a matriz de covariância populacional Σ e matriz de covariância amostral padronizada R (matriz de correlação amostral). Para maiores detalhes, veja Johnson & Wichern (1998).

2.2 Introdução à Inferência Clássica e Frequentista.

Segundo Paulino et al. (2003), a motivação para a realização da inferência clássica é a generalização dos resultados obtidos a partir de uma amostra de n unidades para uma determinada população. Exemplificando estas situações, tem-se uma população X e uma possível amostra obtida pode ser representada pelo vetor (x_1, x_2, \dots, x_n) . O conjunto dessas amostras é definido em um espaço amostral χ .

Uma característica importante da inferência estatística clássica consiste em reconhecer a variabilidade existente de amostra para amostra. Por existir esta variabilidade, a população X pode ser encarada como uma variável aleatória. Analogamente, essa variabilidade também é presente em populações multivariadas em que as variáveis aleatórias são vetores dados por $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$, em que cada componente X_i também é uma variável aleatória unidimensional.

Seja no contexto univariado ou multivariado, toda informação populacional é sumariada por uma função de distribuição (F). Usualmente, esta função é conhecida por meio da existência de algum conhecimento inicial sobre a natureza do fenômeno aleatório em estudo, ou sobre o mecanismo gerador de dados, ocasionando, assim, uma família de distribuições \mathfrak{F} , da qual F é pertencente (Paulino et.al., 2003).

As distribuições de \mathfrak{F} são representadas pelas respectivas funções de densidade (\mathfrak{F}^*), em que cada função é identificada pelos parâmetros, os quais podem ser uni ou multidimensionais. Considerando o parâmetro θ com domínio num conjunto Θ , denominado espaço

paramétrico, tem-se que o modelo estatístico associado a uma amostra pode ser escrito por:

$$\mathfrak{S}^* = \{\pi(x | \theta) : \theta \in \Theta\}, x \in \chi. \quad (16)$$

No caso multivariado, para o qual se tem a variável multidimensional $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$, em que cada X_i é independente, o modelo estatístico, além de ser condicionado ao parâmetro θ , pode ser representado por meio das densidades marginais das variáveis X_i , $i = 1, 2, \dots, p$.

$$\mathfrak{S} = \left\{ \pi(\underline{x} | \theta) = \prod_{i=1}^p \pi_i(x_i | \theta) : \theta \in \Theta \right\}, x \in \chi. \quad (17)$$

Após a determinação de um modelo estatístico, um dos objetivos do modelo é o cálculo de probabilidades. A partir deste ponto, têm-se diferentes interpretações. Paulino et al., (2003) exemplificam a interpretação da probabilidade da seguinte forma:

- **Interpretação Clássica:** Considera os resultados igualmente possíveis ou prováveis nas aplicações. Nesta interpretação, define-se a probabilidade de um acontecimento como o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Um exemplo bem didático dessa interpretação é afirmar que a probabilidade de obter cara ao lançar uma moeda não viciada é 0,5.

- **Interpretação Freqüentista:** Baseia-se na regularidade estatística das freqüências relativas e sustenta que a probabilidade de um

dado acontecimento pode ser medida observando a frequência relativa do mesmo acontecimento, em uma sucessão numerosa de experiências idênticas e independentes. Para exemplificar a interpretação frequentista, considera-se uma moeda irregular (viciada) lançada 1000 vezes, e observam-se a face cara 540 vezes. Portanto, a probabilidade estimada de sair cara é 0,54.

2.3 Fundamentos da Teoria da Decisão.

Nesta seção, os princípios básicos da teoria de decisão serão apresentados. Essencialmente, Berger (1985) definiu θ como uma quantidade que afeta o processo de decisão; a esta quantidade denominou-se estado da natureza no sentido de realizar ou não uma tomada de decisão. Em conseqüência, assumiu-se Θ como um conjunto não vazio de possíveis estados da natureza, ou seja, o espaço paramétrico, a partir do qual decisões devem ser tomadas.

Uma outra característica importante, mencionada por Berger (1985) dentro de um processo de tomada de decisão e um elemento principal a ser considerado, é a função perda, representada por $l(\cdot)$, em que, dada uma particular ação a_1 , a ela se associa o estado θ_1 ; assim $l(\theta_1, a_1)$, será bem especificada. Generalizando, para todo o domínio tem-se $l(\theta, a)$ para todo $(\theta, a) \in \Theta$.

Na terminologia da estatística clássica, na formalização das hipóteses estatísticas considera-se H_0 (hipótese nula) como a hipótese de interesse; caso H_0 seja rejeitada, aceita-se como verdadeira a hipótese

alternativa H_1 . Com base nessas hipóteses, Berger (1985) descreveu as hipóteses nula e alternativa em função de um parâmetro θ ; assim, em H_0 afirma-se que $\theta \in \Theta_0$, e em H_1 , $\theta \in \Theta_1$. No caso em que $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, classificou-se H_0 como uma hipótese simples. Caso contrário, diz-se que H_0 é composta; semelhantemente, essa classificação é válida para a hipótese alternativa H_1 .

Seguindo essa definição, Bolfarine & Sandoval (2001) resumiram o teste de uma hipótese estatística à função de decisão $d: \chi \rightarrow \{a_0, a_1\}$, em que a_0 corresponde à ação de considerar a hipótese H_0 como verdadeira e a_1 corresponde à ação de considerar a hipótese H_1 como verdadeira. Nesta definição, χ denota o espaço amostral associado à amostra x_1, \dots, x_n . A função de decisão d divide o espaço amostral χ em dois subconjuntos dados por:

$$A_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \chi ; d(x_1, \dots, x_n) = a_0\}, \quad (18)$$

$$A_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \chi ; d(x_1, \dots, x_n) = a_1\}, \quad (19)$$

em que $A_0 \cup A_1 = \chi$ e $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Como em A_0 têm-se os pontos amostrais $x = (x_1, \dots, x_n)$ que levam à aceitação de H_0 , nomeou-se A_0 por região de aceitação e, por analogia, A_1 por região de rejeição ou crítica de H_0 , uma vez que os pontos pertencentes a essa região conduzem à região de rejeição.

Considerando um teste de hipótese H_0 versus H_1 , sendo ambas as hipóteses simples, Bolfarine & Sandoval (2001) descreveram os possíveis riscos ao fazer alguma afirmação sobre aceitação ou rejeição de H_0 . Para

isso, associou-se uma função denominada como função perda $l(\theta, d)$ às ações de aceitar ou rejeitar H_0 . Esta função assume apenas os valores 0 e 1, respectivamente, correspondendo às ações de a decisão estar correta ou incorreta. Este tipo de função perda é definido por Berger (1985) como função perda “0-1”, sendo apropriada para estudos dos erros de decisão, de tal forma que o valor esperado desta função é conhecido como função Risco, representadas por $R(\theta_0, d)$ e $R(\theta_1, d)$:

$$R(\theta_0, d) = 0.p[X \in A_0 | \theta_0] + 1.p[X \in A_1 | \theta_0] = p[X \in A_1 | \theta_0] = \alpha \quad (20)$$

$$R(\theta_1, d) = 0.p[X \in A_1 | \theta_1] + 1.p[X \in A_0 | \theta_1] = p[X \in A_0 | \theta_1] = \beta \quad (21)$$

Os riscos α e β são conhecidos como probabilidades dos erros classificados como do tipo I e II, respectivamente. Mais precisamente, o erro tipo I ocorre quando se rejeita H_0 , sendo H_0 verdadeira, enquanto o erro tipo II ocorre quando se aceita H_0 , sendo H_0 falsa. A situação descrita nas expressões dos riscos, pode ser resumida na Tabela 1.

Tabela 1 - Tipos dos erros em testes de hipóteses.

Decisão	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Aceitar H_0	Decisão Correta	Erro do Tipo II
Rejeitar H_0	Erro do Tipo I	Decisão Correta

Em consequência da probabilidade do erro tipo II, o poder de um teste com região crítica A_1 para testar $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta = \theta_1$ é:

$$\pi(\theta_1) = p[X \in A_1 | \theta_1] = 1 - \beta. \quad (22)$$

2.3.1 Testes da Razão de Verossimilhanças.

Nesta seção serão abordados os testes da razão de verossimilhanças utilizados para comparar a igualdade entre k-matrizes de covariâncias. Inicialmente, seguindo a notação proposta por Giri (1995) será apresentado o caso para populações normais multivariadas independentes. Posteriormente, novas versões do teste da razão de verossimilhanças proveniente de diferentes autores, incluindo a situação de populações dependentes, serão apresentadas.

Seja a observação multivariada representada por $X_{ij} = (X_{ij1}, \dots, X_{ijp})^t$, com $i=1, \dots, n_j$ e $j=1, \dots, k$, em que o valor de k é igual ao número de populações, n_j é número de observações da j-ésima população e p é o número de variáveis proveniente de uma distribuição normal multivariada $N_p(\underline{\mu}_j, \Sigma_{jj})$, em que $\underline{\mu}_j = (\mu_{j1}, \dots, \mu_{jp})^t$ representou o vetor de médias populacional desconhecido e Σ_{jj} , $j=1, \dots, k$, a j-ésima matriz de covariância populacional. Desta forma, a matriz de covariância particionada (23) é dada abaixo.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1j} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \Sigma_{ij} & \cdots & \Sigma_{kk} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Considerando que a hipótese de interesse é definida por $H_0: \Sigma_{11} = \dots = \Sigma_{kk}$, e de acordo com as especificações mencionadas acima, o vetor de médias $\underline{\mu}_j, j = 1, \dots, k$ é desconhecido e $\sum_{j=1}^k n_j = N$. O estimador da matriz de somas de quadrados e produtos (S_j), a soma dos estimadores S_j indicado por S_t e o vetor de médias amostrais (\bar{X}_j) são definidos por:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ij} - \bar{X}_j)^t, \quad S_t = \sum_{j=1}^k S_j \quad \text{e} \quad \bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n_j}. \quad (24)$$

Seja Θ o espaço paramétrico $\{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_k; \Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{kk}\}$, do qual, obtém-se um subconjunto denominado por espaço reduzido, definido sob H_0 e representado por $\omega = \{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_k, \Sigma\}$. As funções de verossimilhança são dadas por:

$$L(\Theta | \underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^k |\Sigma_j|^{-\frac{n_j}{2}} \times e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_{j=1}^k \Sigma_j^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \mu_j)(x_{ij} - \mu_j)^t \right) \right\}}, \quad (25)$$

$$L(\omega | \underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{\frac{N}{2}} \times e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \mu_j)(x_{ij} - \mu_j)^t \right) \right\}}. \quad (26)$$

Os valores máximos das funções de verossimilhanças no espaço paramétrico completo e reduzido são dados por:

$$\max_{\Theta} L(\Theta) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^k \left| \begin{pmatrix} S_j \\ n_j \end{pmatrix} \right|^{-\frac{n_j}{2}} \times e^{\left\{ \frac{1}{2}N \right\}} ; \quad (27)$$

$$\max_{\omega} L(\omega) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left| \frac{S_t}{N} \right|^{-\frac{N}{2}} \times e^{\left\{ \frac{1}{2}N \right\}} . \quad (28)$$

A rejeição da hipótese nula é dada quando $\lambda \leq c$, em que c é uma constante requerida de acordo com o tamanho do teste, mormente conhecida como valor crítico, e λ é denominado como estatística do teste.

$$\lambda = \Lambda^{\frac{N}{2}} = \frac{\max_{\omega} L(\omega)}{\max_{\Theta} L(\Theta)} = \frac{N^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^k |S_j|^{\frac{n_j}{2}}}{|S_t|^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^k (n_j)^{\frac{pn_j}{2}}} \leq c \quad (29)$$

Sob a hipótese nula, a estatística do teste da razão de verossimilhanças (LRT) pode ser reescrita por

$$\text{LRT} = -2 \ln \lambda = -N \ln \Lambda . \quad (30)$$

e possui distribuição assintoticamente qui-quadrado com $\frac{p(p+1)(k-1)}{2}$ graus de liberdade.

A estatística do teste da razão de verossimilhanças descrita na expressão (30) pode ser modificada, tal que sua distribuição assintótica possa ser mais bem aproximada da distribuição qui-quadrado. Estas

modificações propostas por diferentes autores implicam em uma melhoria, principalmente para o caso de amostras pequenas. Assim sendo, apresentam-se algumas melhorias na aproximação assintótica da distribuição qui-quadrado.

Bartlett (1937) propôs a primeira aproximação nos graus de liberdade dada simplesmente por $n=N-1$; em consequência desta modificação, o teste da razão de verossimilhanças ficou definido por:

$$LRT_1 = -n \ln \Lambda . \quad (31)$$

Box (1949) mostrou que o fator de correção denominado m_1 conduziu a uma melhor aproximação para a distribuição qui-quadrado para pequenas amostras. Essa correção consistiu em calcular a seguinte expressão:

$$m_1 = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(k + 1)}{6kn(p + 1)}, \text{ em que,} \quad (32)$$

em que, k é igual ao número de populações.

Vale ressaltar que na modificação proposta pelo autor manteve-se $n=N-1$.

Uma observação importante é que o valor m_1 está entre 0 e 1 e também considerando a situação de independência, isto é, $\Sigma_{ij} = 0$ para $i \neq j = 1, \dots, k$. Com essas considerações, definiu-se o seguinte teste da razão de verossimilhança:

$$\text{LRT}_2 = -m_1 n \ln \Lambda = - \left\{ n - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(k + 1)}{6k(p + 1)} \right\} \ln \Lambda . \quad (33)$$

Krishnaiah (1975) reformulou o teste assumindo uma matriz de covariância não nula Σ_{ij} para $i \neq j = 1, \dots, k$; porém, o problema de testar H_0 transformou-se em teste de independência de um vetor de p variáveis aleatórias para um vetor $p(k-1)$ de variáveis aleatórias. Desta forma, o fator de correção m_2 foi introduzido como:

$$m_2 = 1 - \frac{pk + 1}{2n} . \quad (34)$$

Aplicando m_2 na expressão (30), a estatística do teste da razão de verossimilhanças apresentou a seguinte forma:

$$\text{LRT}_3 = -m_2 n \ln \Lambda = - \left\{ n - \frac{pk + 1}{2} \right\} \ln \Lambda . \quad (35)$$

2.4 Introdução à Inferência Bayesiana.

Seja uma quantidade de interesse θ . A informação de que dispomos sobre θ é referenciada por uma distribuição probabilística $p(\theta)$, a qual pode ser incrementada observando um valor aleatório $X=x$ relacionado com o parâmetro θ . A distribuição amostral $\pi(x|\theta)$ representa essa relação. Conforme os valores de X são observados, a quantidade de informação sobre θ é atualizada por meio do Teorema de Bayes (Gelman et al., 2003), definido por:

$$\pi(\theta | x) = \frac{\pi(x | \theta)\pi(\theta)}{\pi(x)}. \quad (36)$$

Fixado um valor x , a função $L(\theta;x) = \pi(x|\theta)$ é denominada por função de verossimilhança, que fornece a plausibilidade de cada um dos possíveis valores de θ , ao passo que $\pi(\theta)$ é denominada por distribuição a priori de θ . Essas duas fontes de variação, priori e verossimilhança, são combinadas, originando a distribuição a posteriori de θ , $\pi(\theta | x)$. Portanto, tem-se a forma usual do teorema de Bayes, dado por $\pi(\theta|x) \propto L(\theta;x) \times \pi(\theta)$. Observa-se que na fórmula (36), o termo $1/\pi(x)$ não depende de θ , caracterizando essa razão como uma constante normalizadora.

2.4.1 Informação a Priori e Probabilidade Subjetiva.

O conceito freqüentista de probabilidade envolve basicamente uma seqüência de repetições para um determinado evento, tratado como um subconjunto de Θ . A idéia da repetição justifica a denominação “teoria freqüentista”. Todavia, há situações, como, por exemplo, dados observacionais, em que não é possível a realização destas repetições, as quais são, a essência da probabilidade freqüentista. Neste caso, surge a teoria da probabilidade subjetiva.

A idéia principal da teoria da probabilidade subjetiva é que a probabilidade de um dado evento conduz a uma crença pessoal da “chance” da ocorrência do mesmo. Em relação ao cálculo de probabilidades, há uma diferença muito clara entre as duas abordagens. Na teoria freqüentista é suficiente uma freqüência relativa do evento de interesse. Já no caso da probabilidade subjetiva, esta é obtida simplesmente por meio de uma inspeção. Kahneman et al. (1982) ressaltaram uma deficiência nessa teoria quando seu uso é feito por pessoas leigas, com grande risco da realização de uma dedução não consistente.

A relação entre a probabilidade subjetiva e a inferência bayesiana é facilmente compreendida quando se consideram um parâmetro θ e a informação do pesquisador sobre ele, baseada em algum conhecimento a priori. Esta informação é representada por uma função de distribuição $\pi(\theta)$, denominada por distribuição a priori. A importância desta distribuição está relacionada ao fato de se considerar o parâmetro θ como fixo ou aleatório, pois em situações em que θ é fixo predomina a

teoria freqüentista. No caso de θ ser aleatório, é razoável inferir de um ponto de vista subjetivo.

Para que a distribuição $\pi(\theta)$ seja completamente obtida de forma subjetiva, deve-se considerar o espaço paramétrico Θ discreto, sendo que a probabilidade subjetiva é determinada para cada elemento de Θ . Porém, se o espaço paramétrico for contínuo, a construção de $\pi(\theta)$ é mais complexa (Berger, 1985). Entretanto, na “ausência”, ou no pouco conhecimento do pesquisador em relação ao parâmetro θ , isto não impede a realização de uma análise bayesiana. Um exemplo típico é dado por Berger (1985) por meio de um simples teste de duas hipóteses, em que a informação a priori pode ser especificada pela probabilidade 0,5. Nota-se que, neste exemplo, nenhuma informação sobre o parâmetro foi inserida; porém algum conhecimento a priori, intuitivamente, foi considerado. Este tipo de informação é denominado por priori não informativa.

Agora, suponha-se que o interesse seja estimar a média θ de uma distribuição normal. O espaço paramétrico é definido por $\Theta = (-\infty, \infty)$. Pode-se considerar uma priori não informativa, o que é razoável assumir, uma vez que todos os possíveis valores de θ têm o mesmo peso. Porém, se $\pi(\theta) = c > 0$, implicará em π ter massa infinita, isto é, $\int \pi(\theta) d\theta = \infty$, ou seja, a integral não constitui uma função densidade. Todavia, a escolha da constante c não é importante e, assim, pode-se fazer $\pi(\theta)=1$. Desta forma, $\pi(\theta)$ é denominado como priori uniforme em \mathbb{R}^1 , sendo um tipo particular de uma priori não informativa.

Um grupo especial de prioris não informativas, cuja aplicação é mais ampla, face a diversos problemas, foi construído por Jeffreys (1961).

Este grupo de prioris é conhecido na literatura como priori de Jeffreys e sua expressão geral é dada por:

$$\pi(\theta)=[I(\theta)]^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

em que, $I(\theta)$ é matriz de informação de Fisher (38), dada por:

$$I(\theta)=-E_{\theta}\left[\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2}\right]. \quad (38)$$

Se $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^t$ for um vetor, Jeffreys (1961) sugere que $\pi(\theta) = |I(\theta)|^{\frac{1}{2}}$. Considerando a matriz de covariância Σ , Bernardo e Smith (1994) definiram a priori de Jeffreys como $|\Sigma|^{-\frac{(p'+1)}{2}}$, lembrando que, no contexto desse trabalho, $p' = pk$, em que p representou o número de variáveis e k , o número de populações.

Uma importante classe de distribuição a priori é denominada por priori hierárquica (Good, 1983). A idéia do uso dessas prioris se dá em determinados problemas para os quais a informação do pesquisador possa apresentar uma forma estrutural e subjetiva. Este tipo de priori é freqüentemente utilizado em modelos com r estágios ou que apresentem uma hierarquia, tal que o conhecimento estrutural de θ_i i.i.d ($i=1, 2, \dots, p$) conduz à primeira descrição de uma priori em estágios dada por.

$$\pi_1(\theta) = \prod_{i=1}^r \pi_0(\theta_i), \quad (39)$$

em que π_0 é a priori inicial.

O índice subscripto 1 em π_1 indica uma priori de primeiro estágio. A aproximação hierárquica para uma priori de segundo estágio π_2 seria dada pela mesma expressão, porém sendo π_0 substituído por π_1 .

Por fim, mencionam-se as prioris conjugadas (Gelman et al., 2003). A idéia é de que as distribuições a priori e a posteriori (vide Seção 2.4.2) pertençam à mesma classe de distribuições. Assim, a atualização do conhecimento que se tem em relação ao parâmetro θ envolve apenas uma mudança nos hiperparâmetros, sendo estes utilizados como indexadores da família de distribuições e diferentes do parâmetro de interesse.

2.4.2 Distribuição a Posteriori.

A análise bayesiana é conduzida combinando uma informação a priori $\pi(\theta)$ com a informação amostral $\pi(x|\theta)$. A distribuição resultante dessa combinação é denominada distribuição a posteriori de θ dado x . A notação utilizada é $\pi(\theta|x)$; assim, a expressão para a distribuição a posteriori é dada por:

$$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta). \quad (40)$$

Note que $\pi(x,\theta)$ forma uma distribuição conjunta;, portanto, se o interesse é a obtenção da distribuição de X , então a função densidade marginal $m_{(x)}$ é obtida por

$$m_{(x)} = \int_{\Theta} \pi(x|\theta)\pi(\theta)d\theta, \text{ tal que } m_{(x)} \neq 0, \text{ pois } \pi(\theta|x) = \frac{\pi(x,\theta)}{m_{(x)}}. \quad (41)$$

Em outras palavras, a distribuição a posteriori pode ser vista como uma regra de atualização de $\pi(\theta|x)$ pelo fato de que a distribuição a priori $\pi(\theta)$ contém pouca informação sobre o parâmetro. Porém, a informação relativa à situação experimental é observada na amostra. Assim, acredita-se que combinando essas “informações” haverá inferências mais precisas, principalmente se estas informações forem atualizadas a cada realização amostral e/ou experimental. Convém salientar que nesta regra de atualização está implícito o princípio da verossimilhança, pois toda informação sobre o parâmetro está contida na distribuição amostral $\pi(x|\theta)$.

2.4.3 Intervalos de Confiança Bayesiano.

Sejam x_1, \dots, x_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função densidade de probabilidade (ou função de probabilidade) $\pi(x|\theta)$. Considerando para θ a função densidade a priori $\pi(\theta)$, conforme já mencionado, a função densidade a posteriori escrita por meio do teorema de Bayes é:

$$\pi(\theta|X) = \frac{\prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \prod_{i=1}^n \pi(x_i|\theta)\pi(\theta) d\theta}. \quad (42)$$

Diz-se que $[t_1; t_2]$ é um intervalo de confiança bayesiano para θ , com coeficiente de confiança $\gamma = 1 - \alpha$, se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \pi(\theta|x) d\theta = \gamma. \quad (43)$$

Como na inferência clássica existem em geral infinitos intervalos $[t_1; t_2]$ satisfazendo (43), sempre que possível o comprimento do intervalo $[t_1; t_2]$ deve ser mínimo. Nos casos em que a função densidade a posteriori é simétrica, os intervalos simétricos são, em geral, os de menor comprimento.

O intervalo bayesiano de menor comprimento é usualmente conhecido como o intervalo de densidade posteriori máxima, citado por Gelman et al. (2003) como “*Highest Posterior Density (HPD) Interval*”. A obtenção destes intervalos geralmente é feita via implementação de métodos computacionais.

2.4.4 Uma Breve Abordagem Sobre os Métodos Numéricos Utilizados na Inferência Clássica e Bayesiana.

Diversos algoritmos são utilizados para analisar a função de verossimilhança (freqüentista) ou distribuição a posteriori (bayesiana). Tanner (1996) classificou esses algoritmos como métodos não Monte Carlo (MNMC), métodos iterativos Monte Carlo (MIMC) e não iterativos Monte Carlo (MNIMC).

Os métodos MNMC caracterizam-se por não exigirem a entrada de números pseudo-aleatórios. A aplicação destes métodos, em geral, se dá na estimação de parâmetros de locação, como, por exemplo, a moda de uma função de verossimilhança ou de uma distribuição posteriori. Dentre estes métodos pode-se citar o método de Newton-Raphson, EM (Esperança e Maximização) e aproximação de Laplace, sendo este último utilizado para calcular aproximações de alta ordem de precisão para a função de interesse.

A implementação dos métodos MIMC envolve um processo iterativo; portanto, requer a entrada de números pseudo-aleatórios no contexto bayesiano. Os exemplos clássicos são Gibbs Sampler e Metrópolis-Hastings apresentados por Gelman et al., (2003). A utilização destes métodos é feita em função da forma com que a distribuição a posteriori é apresentada. Se a distribuição a posteriori é escrita em função de distribuições condicionais fechadas e conhecida, deve-se utilizar o método Gibbs Sampler. Já diante de distribuições condicionais incompletas ou desconhecidas, utiliza-se o método de Metrópolis-Hastings.

Vale ressaltar que esses métodos têm o mesmo objetivo de aproximar a distribuição a posteriori da distribuição exata do parâmetro a ser estimado, representada pela distribuição marginal. Além disso, devido ao processo de iteração existente nesses métodos, a precisão de seus resultados é verificada por meio de vários critérios de convergência, podendo propiciar conclusões diferenciadas.

Os métodos MNIMC também requerem a entrada de números aleatórios, os quais, não constituem um processo iterativo. O fato é que esses números representam amostras da função de interesse, seja a

verossimilhança ou a posteriori. Os principais métodos representativos dessa classe são o de amostragem por importância conhecido como *importance sampling* (Tanner, 1996) e o método de aceitação/rejeição, sendo que este último utiliza uma densidade auxiliar para gerar amostras aleatórias para as densidades de interesse, que possuem difícil tratamento analítico.

Uma outra técnica computacional comumente utilizada na inferência frequentista é a técnica *bootstrap*. Esta técnica foi introduzida por Efron (1979) com o intuito de estimar a distribuição de um estimador ou a estatística de um teste em que a expressão analítica da distribuição é complexa ou desconhecida. Para isso, utiliza-se de um processo de reamostragem cujos dados amostrais são tratados como se fosse uma população.

Sob certas condições de regularidade, o método *bootstrap* se aproxima da distribuição amostral do estimador ou da estatística de um teste. Segundo Shao & Tu (1995) e Horowitz (2001), essa aproximação assintótica apresenta uma precisão pelo menos de primeira ordem. Chou (2004) afirma que, no caso multivariado, essa aproximação pode ser ainda de maior ordem por causa de os testes serem assintóticos, principalmente os testes baseados em razão de verossimilhanças.

2.5 Teoria Bayesiana e Freqüentista na Tomada da Decisão.

Segundo Lindsey (1996), após a observação dos dados, a função de verossimilhança pode assumir uma determinada forma, tal que a priori pode ter pouco efeito sob o parâmetro pertencente a algum espaço paramétrico. Desta forma, o autor ressalta uma discussão de que a distribuição a priori só deveria ser considerada após examinar a função de probabilidade.

Berger & Berliner (1986) ressaltaram que no caso de a distribuição a posteriori concentrar-se especificamente sobre a função de verossimilhança, poderão ocorrer estimativas imprecisas, além de as abordagens freqüentista ou bayesiana serem praticamente análogas em relação à hipótese avaliada sob a amostra.

Blyth (1970), do ponto de vista freqüentista, tendo em vista que as amostras são consideradas aleatórias, questionou o mecanismo de um modelo utilizado em um processo de tomada de decisão que tem como base a média de amostras repetidas, dado que o verdadeiro valor do parâmetro é fixo e desconhecido. Do ponto de vista bayesiano, essa repetição é feita sempre com a mesma amostra, mas o parâmetro é aleatório e geralmente desconhecido. Assim, é perceptível o contraste entre essas duas teorias. Todavia, vários autores relatam a existência de uma conexão às teorias freqüentista e bayesiana.

Ambas as teorias, freqüentista e bayesiana têm como objetivo comparar modelos. Entretanto, em alguns casos, a função de verossimilhança pode não ser única. Neste caso, a teoria freqüentista tende a focar a estimativa de máxima verossimilhança próxima a

valores extremos do espaço paramétrico. Já a teoria bayesiana se baseia em uma média dos valores que o parâmetro possa assumir dentro do espaço paramétrico. Contudo, essa teoria apresenta uma dificuldade em especificar modelos cujas hipóteses são exatas, pois os parâmetros não são valores pontuais, mas sim uma medida de Lebesgue; esta contradição é caracterizada na literatura como paradoxo de Lindley (Lindley, 1957).

Samaniego & Reneau (1994) apontaram que a estimação pontual baseada na regra de Bayes, com pouca informação sobre os parâmetros, pode apresentar um menor desempenho se comparada com a regra freqüentista. Este fato foi verificado por Howard (1998) ao comparar duas proporções ($H_0: p_1 \leq p_2$ versus $H_1: p_1 > p_2$), em que, p_1 e p_2 se referiram às proporções populacionais, referentes à primeira e segunda população. Neste trabalho, o autor considerou uma priori independente Beta (a_i, b_i) para p_1 e p_2 , tal que $(a_1, b_1) = (1, 0)$ e $(a_2, b_2) = (0, 1)$. Desta forma, os resultados provenientes da distribuição a posteriori permitiram verificar que a probabilidade a posteriori de $p_1 \leq p_2$ é igual à probabilidade unilateral do teste exato de Fisher.

Recentemente, Agresti & Min (2005) utilizaram argumentos comuns à teoria freqüentista, tais como probabilidades de cobertura e região de confiança, para avaliar a performance da inferência bayesiana realizada em tabelas de contingências. Esses autores se basearam em relatos feitos por Good (1956) e Althan (1969), os quais afirmaram que a inferência bayesiana em tabelas de contingência se relaciona com a estimação pontual ou testes de significância; portanto, os resultados bayesianos são aproximados aos resultados freqüentistas. Seguindo, essa motivação, Agresti & Min (2005) analisaram a probabilidade de cobertura

de intervalos de confiança para o risco relativo, diferença entre duas proporções e razão de chances de tabelas de contingência 2×2 nas abordagens freqüentista e bayesiana, sendo quem nesta última, os autores utilizaram as prioris dadas pelas distribuições Beta, logit-normal e prioris correlacionadas para os dois parâmetros da distribuição binomial. Analisando as possíveis configurações que essas priori poderiam assumir através dos valores dos hiperparâmetros, os autores recomendaram os intervalos HPD para o risco relativo e para a razão de chances. Todavia, em situações em que as amostras eram pequenas, verificaram que os intervalos de credibilidade, usando uma priori informativa apresentaram uma performance inferior em relação aos intervalos de confiança obtidos na abordagem freqüentista.

3 MATERIAL E MÉTODOS

A descrição da metodologia utilizada neste trabalho foi feita em várias etapas e apresentada nas subseções seguintes.

3.1 Propostas de Testes Multivariados para Comparar k-Matrizes de Covariâncias de Populações Normais Dependentes.

Os testes multivariados propostos neste trabalho para comparar k-matrizes de covariâncias provenientes de populações normais multivariadas dependentes foram construídos com base na observação multivariada, representada pelo vetor de variáveis aleatórias \underline{X} , em que cada componente, $\underline{X}_1^t, \dots, \underline{X}_k^t$, indicou vetores de variáveis aleatórias, sendo estes definidos por $\underline{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jp})^t$ com $j = 1, \dots, k$, em que k correspondeu ao número de populações e p ao número de variáveis. Em função da própria formalização dos testes, \underline{X} foi obtido por meio de uma distribuição normal multivariada, $N_{pk}(\underline{\mu}, \Sigma)$, cujos parâmetros foram especificados por:

$$\underline{\mu}_{pk \times 1} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \\ \vdots \\ \underline{\mu}_k \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma_{pk \times pk} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{k1} & \dots & \Sigma_{kk} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Os elementos localizados “fora” da diagonal indicaram as covariâncias não nulas entre as populações, uma vez que a suposição de

independência não foi assumida, ao passo que, cada elemento na diagonal de Σ representou a matriz de covariância da k-ésima população. A hipótese de interesse foi descrita como: $H_0: \Sigma_{11}=\Sigma_{22}...=\Sigma_{kk}$ versus H_1 : pelos menos uma matriz de covariância Σ_{jj} difere das demais.

Os critérios propostos neste trabalho e utilizados como regra de decisão foram determinados em função da razão de variâncias generalizadas, definidas pela razão dos determinantes $\lambda_{1(\cdot)}$ e pela razão dos traços $\lambda_{2(\cdot)}$. Os estimadores das matrizes de covariâncias populacionais foram gerados via os métodos *bootstrap* e bayesiano, considerando as amostras provenientes da distribuição Wishart Invertida, cujas especificações serão dadas na Seção 3.4, denominaram-se, respectivamente, tais critérios por $\lambda_{1(w)}$; $\lambda_{2(w)}$ e $\lambda_{1(b)}$; $\lambda_{2(b)}$ (45 e 46).

$$\lambda_{1(w)} = \frac{\max_j (|\Sigma_{jj}|)}{\min_j (|\Sigma_{jj}|)} \text{ ou } \lambda_{2(w)} = \frac{\max_j (\text{Traço}[\Sigma_{jj}])}{\min_j (\text{Traço}[\Sigma_{jj}])} \quad (45)$$

$$\lambda_{1(b)} = \frac{\max_j (|S_{jj}|)}{\min_j (|S_{jj}|)} \text{ ou } \lambda_{2(b)} = \frac{\max_j (\text{Traço}[S_{jj}])}{\min_j (\text{Traço}[S_{jj}])} \quad (46)$$

em que S_{jj} representou a matriz de somas de quadrados e produtos amostrais da j-ésima população ($j = 1, 2, \dots, k$).

3.2 Fatores Utilizados na Avaliação dos Testes.

Após a construção dos testes, conforme descrições feitas na Seção 3.1, em que cada teste diferenciou basicamente na razão de variâncias generalizadas e a geração das matrizes de covariâncias feita por meio da inferência freqüentista, mais especificamente pelo método *bootstrap* (Seção 3.4). A seção 3.5, referiu-se a geração das matrizes via o método bayesiano. Posteriormente, avaliou-se o controle do erro tipo I e o poder em diferentes configurações resultantes das seguintes combinações:

- Número de variáveis (p) fixado em 2, 3 e 8;
- Número de populações (k) fixado em 2, 8 e 12;
- Tamanho amostral (n) fixado em 20, 50 e 100;
- Valores nominais fixados em 1% e 5%;

- Valor médio paramétrico das correlações, denominado por correlação global e definido por ρ , cujos valores foram aproximadamente iguais a 0,20 e 0,80, caracterizando uma estrutura de alta e baixa correlação. O cálculo desse valor foi realizado pela média dos elementos não nulos na matriz de covariância excluindo-se os blocos diagonais.

- Grau de heterogeneidade entre as matrizes de covariâncias populacionais denominado por δ , cujos valores foram 1, 2, 4, 8 e 16. O valor $\delta=1$ indica a situação sob a hipótese nula de igualdade das matrizes de covariâncias, na qual se pôde avaliar o erro tipo I. Para os demais valores de δ ocorreram situações sob a hipótese alternativa de heterogeneidade das matrizes de covariâncias, nas quais se permitiu avaliar o poder dos testes. As interpretações desses valores

corresponderam às situações que representaram baixa, média e alta heterogeneidade das matrizes de covariâncias.

3.3 Simulação das Populações.

A geração das amostras multivariadas provenientes de k-populações normais dependentes multivariadas foi feita considerando a estrutura de correlação AR (1) para matriz de correlação R_b (47), denominada como matriz de correlação global. Cada elemento na diagonal representou uma estrutura de correlação referente à k-ésima população, conforme é apresentado a seguir.

$$R_b = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1} & \dots & \dots & 1 \end{matrix}} & \rho^{p+1} & \rho^{p+2} & \rho^{p+3} & \dots & \dots & \rho^{pk-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \rho^{pk-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \rho^{pk-3} \\ \rho^{p-1} & \dots & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \rho^{pk-4} \\ \rho^{p+1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \rho^{pk-5} \\ \rho^{p+2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p+3} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^{pk-1} & \rho^{pk-2} & \rho^{pk-3} & \rho^{pk-4} & \rho^{pk-5} & \dots & \boxed{\begin{matrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{p-1} \\ \rho & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{p-1} & \dots & \dots & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad (47)$$

A matriz de covariância global foi obtida por meio da relação (expressão 48)

$$\Sigma^* = (D)^{\frac{1}{2}} R_b (D)^{\frac{1}{2}}, \quad (48)$$

em que, $D^{\frac{1}{2}}$ é uma matriz diagonal com os desvios padrão que foram iguais a 1 para cada variável.

Definida a matriz de variâncias e covariâncias (48), adotou-se o modelo normal multivariado $N_{pk}(\underline{0}, \Sigma^*)$ utilizado para a geração das amostras via o método Monte Carlo, inicialmente feita sob a hipótese nula ($\delta=1$). Contudo, na situação de heterogeneidade dessas matrizes ($\delta>1$), houve uma dificuldade de construir uma matriz de covariância populacional que fosse positiva definida e que obedecesse à heterogeneidade (δ) pretendida. Além disso, essas matrizes deveriam ser avaliadas em situações em que os testes fossem submetidos a baixas e altas covariâncias, originadas de estruturas de correlações representadas pelos valores paramétricos ρ definidos na Seção 3.2. Em decorrência dessa dificuldade utilizou-se um artifício, que consistiu em simular o parâmetro referente à matriz de covariância global que atendesse tais especificações. Esse procedimento foi feito conforme os seguintes passos:

1º) Simulou-se uma amostra de tamanho $g = 5000$ da distribuição normal multivariada $N_{pk}(\underline{0}, \Sigma^*)$, obtendo-se uma matriz $Y_{g \times pk}$, representada pelo layout da Tabela 2 e com Σ^* (48). Cada bloco de p colunas correspondeu à k -ésima população associada a p variáveis, caracterizando a unidade amostral multivariada disposta nas g linhas.

Tabela 2 - Layout da matriz $Y_{g \times pk}$ utilizada na determinação do parâmetro da matriz de covariância sob a situação de heterogeneidade ($\delta > 1$).

Populações										
	1			2			...	k		
1	y_{111}	...	y_{p11}	y_{121}	...	y_{p21}	...	Y_{1k1}	...	y_{pk1}
.
.
.
5000	y_{11g}	...	y_{p1g}	y_{12g}	...	y_{p2g}		Y_{1kg}	...	y_{pkg}

2º) Para a 1ª população ($j=1$) as observações não foram alteradas. As p variáveis da j -ésima população foram multiplicadas por d_j^* , ($j > 1$) definido por:

$$d_j^* = \sqrt[p]{1 + (j-1)d}, \quad (49)$$

em que, $d = (\delta - 1)/(k - 1)$ e δ referiu-se ao grau de heterogeneidade entre as matrizes de covariâncias, conforme descrição na seção 3.2. Assim, a razão das variâncias generalizadas paramétricas da primeira população e da k -ésima foi fixada em δ .

3º) Finalizando este procedimento, adotou-se como parâmetro da matriz de covariância global Σ_g , definida por:

$$\Sigma_g = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^g (\underline{Y}_j - \bar{Y})(\underline{Y}_j - \bar{Y})^t = \frac{1}{g} [Y^t Q Y], \quad (50)$$

sendo Q uma matriz de projeção.

Após a definição dos parâmetros da matriz de covariância Σ^* e Σ_g utilizados, respectivamente, nas situações de homogeneidade ($\delta = 1$) e heterogeneidade entre as matrizes de covariâncias ($\delta > 1$), foram feitas as simulações das observações amostrais multivariadas utilizadas na avaliação dos testes propostos; portanto, consideraram-se populações normais multivariadas com vetor de médias $\underline{\mu} = \underline{0}$ e as referidas matrizes de covariâncias. A matriz dos dados amostrais (51) foi composta dos N vetores gerados.

$$X = \begin{bmatrix} \underline{X}_1^t \\ \vdots \\ \underline{X}_N^t \end{bmatrix} \quad (51)$$

A construção dessa matriz foi determinada a partir do vetor de observações da distribuição conjunta das k populações, gerado segundo a distribuição normal multivariada, em que $\underline{X}_l = F\underline{Z}_l + \underline{\mu}$ ($l=1, 2, \dots, N$), sendo F o fator de Cholesky (Bock, 1975) da matriz de covariâncias populacionais e \underline{Z}_l um vetor $kp \times 1$ de variáveis normais padronizadas independentes, geradas uma a uma pela inversão da função de distribuição da normal univariada padrão em um ponto aleatório $U, U \sim U[0,1]$.

Após a obtenção das amostras normais multivariadas, estimou-se o vetor de médias amostral das kp variáveis, dado por $\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)^t$, em que $\bar{X}_j = (\bar{X}_{j1}, \bar{X}_{j2}, \dots, \bar{X}_{jp})^t$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Na seqüência foram computados os desvios das observações e o resultado foi armazenado em uma matriz de dimensões $(N \times kp)$ representada por $X_d = X - \underline{1}\bar{X}^t$, em que a matriz X (51) e $\underline{1}$ é um vetor formado de elementos iguais a 1, de dimensão $N \times 1$.

O uso da matriz dos desvios X_d foi necessário, para que não houvesse a influência de possíveis médias diferentes entre as k populações nos estimadores da matriz de covariâncias obtidos via os métodos de *bootstrap* e bayesiano. Assim, para evitar que a matriz de covariâncias das p -variáveis de uma determinada população fosse afetada por esse efeito, optou-se por fazer toda a inferência considerando as observações X_d . Com base nessas observações, estimou-se a matriz de somas de quadrados e produtos por

$$S = (X_d)^t Q X_d \quad (52)$$

em que a matriz de projeção é dada por $Q = I - (\underline{1}\underline{1}^t)/N$.

No caso da inferência bayesiana a matriz S foi estimada considerando a distribuição a posteriori dada pela distribuição Wishart Inversa (WI) com os hiperparâmetros definidos por v e W , correspondendo, respectivamente, aos graus de liberdade e à matriz de covariância, conforme será mostrado na Seção (3.5).

3.4 Inferência Frequentista Via o Método *Bootstrap*.

Definida a amostra aleatória X_d , da qual se estimou S (52), realizaram-se 1000 reamostragens. Em cada reamostragem se obteve uma nova amostra, denominada por X_{db} , da qual se estimou-se a matriz de somas de quadrados e produtos denominada por S_b^* , em que, o índice b representou a b -ésima ($b=1, \dots, 1000$) reamostragem. Esta reamostragem foi feita com reposição, caracterizando um procedimento de *bootstrap*. Os elementos dos blocos diagonais $\hat{S}_{b(jj)}^*$ ($j=1, 2, \dots, k$) de dimensões $(p \times p)$ representaram os estimadores das matrizes de somas de quadrados e produtos populacionais, sendo utilizados para determinar as estatísticas baseadas na razão de variâncias generalizadas, denominadas por $\lambda_{1(b)}$ e $\lambda_{2(b)}$ (46). Em cada simulação foram computados os valores $\lambda_{1(b)}$ e $\lambda_{2(b)}$, os quais foram confrontados com os valores de λ_1 e λ_2 obtidos na amostra original da simulação Monte Carlo. A região crítica para os critérios (46) representados pela abordagem frequentista foi construída sobre a distribuição empírica dos valores das estatísticas $\lambda_{1(b)}$ e $\lambda_{2(b)}$. Optou-se por computar os p -valores determinando as proporções de valores da distribuição *bootstrap* que superaram os respectivos valores da estatística proveniente da amostra original da simulação Monte Carlo.

Neste procedimento se encontra a etapa crítica do teste que é a imposição da hipótese nula de igualdade das matrizes de covariâncias populacionais, evitando-se todas as restrições dos métodos numéricos de maximização da função de verossimilhança. O processo de *bootstrap*

utilizado nesse trabalho, considerando uma amostra oriunda da simulação Monte Carlo, é esquematizado na Figura 1. Nota-se que a aleatorização da unidade amostral multivariada (UA) contemplou a observação multivariada de uma mesma população considerando as p variáveis, caracterizando, assim, a imposição de H_0 sem desconsiderar a dependência entre as variáveis de cada uma das k -populações.

A matriz de somas de quadrados e produtos geradas via *bootstrap* (S_b^*) foi obtida em cada reamostragem a partir da matriz X_{db} , utilizando a expressão (52) devidamente adaptada para acomodar a matriz X_{db} no lugar de X_d .

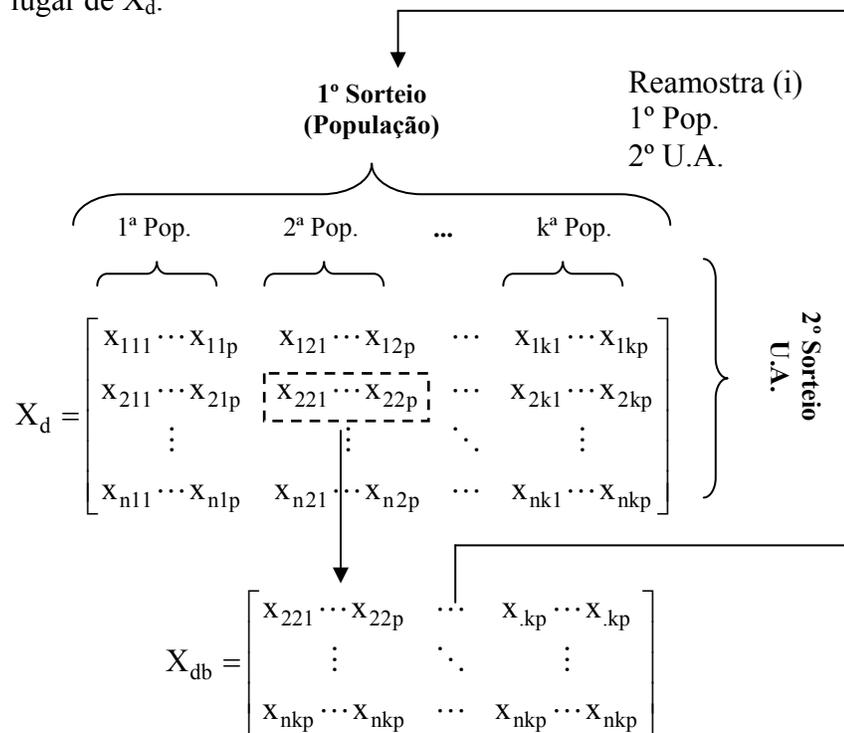


Figura 1 – Processo do *bootstrap* utilizado para estimar as matrizes de somas de quadrados e produtos provenientes de populações normais multivariadas dependentes.

3.5 Inferência Bayesiana.

A partir do fato de cada amostra de Monte Carlo ter sido proveniente de uma população normal multivariada $N_{pk}(\underline{\mu}, \Sigma)$, em que, $\Sigma = \Sigma^*$ para $(\delta=1)$ e $\Sigma = \Sigma_g$ ($\delta > 1$), tem-se que a função densidade definida por:

$$f(\underline{X} | \underline{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pk}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{\left\{ -\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^t \Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}) \right\}} \quad (53)$$

A função de verossimilhança, dada uma amostra aleatória de tamanho n , foi obtida. Sua especificação é dada por

$$L(\underline{X} | \underline{\mu}, \Sigma) = c \times e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Sigma^{-1} s + n \Sigma^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})(\underline{x}-\underline{\mu})^t \right] \right\}}, \text{ em que} \quad (54)$$

$$c = (2\pi)^{-\frac{npk}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \text{ e } s = \sum (\underline{X} - \bar{\underline{X}})(\underline{X} - \bar{\underline{X}})^t \quad (55)$$

No caso do parâmetro $\underline{\mu}$, foi utilizado como priori a distribuição normal multivariada, isto é, $p(\underline{\mu} | \Sigma) = N_{pk} \left(\underline{a}, \frac{\Sigma}{b} \right)$. Os valores para os hiperparâmetros foram assumidos por $\underline{a}_{pk \times 1} = [2, 2, \dots, 2]^t$ e $b = 0,9$. A escolha desses valores para os hiperparâmetros \underline{a} e b foi feita supondo a falta de conhecimento sobre a média, de modo que, fixado o valor de b inferior ao tamanho amostral, este representou um matriz de covariância

inflacionada, o que, conseqüentemente, revelou uma fraca influência dessa priori sobre a amostra. Em relação ao parâmetro Σ , utilizou-se uma priori dada pela Wishart Inversa, ou seja, com função densidade $p(\Sigma) = WI(v, H)$, em que o hiperparâmetro H foi dado por (56). Convém salientar que foi adotada a estrutura eco-correlacionada, de modo que cada matriz de covariância populacional representada pelas diagonais fosse iguais e o efeito dessas covariâncias fosse constante para todas as populações na priori utilizada.

$$H = \begin{bmatrix} 3,6 & 0,9 & \cdots & 0,9 \\ \vdots & 3,6 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0,9 & \cdots & \cdots & 3,6 \end{bmatrix}_{pk \times pk} \quad (56)$$

Desta forma, a priori conjunta hierárquica $p(\underline{\mu}, \Sigma)$ foi constituída pelo produto:

$$p(\underline{\mu} | \Sigma) \times p(\Sigma) = ck |\Sigma|^{-\frac{(v+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} [(\underline{\mu}-\underline{a})^t \Sigma^{-1} (\underline{\mu}-\underline{a}) + b + \text{Tr}(\Sigma^{-1}H)] \right\}}, \text{ em que} \quad (57)$$

$$k = \frac{|H|^{\frac{(v-p'-1)}{2}}}{2^{\frac{(v-p'-1)p'}{2}} \prod_{i=1}^{p'} \frac{p'(p'-i)}{4} \prod_{i=1}^{p'} \frac{v-p'-i}{2}}, \text{ com } p' = pk \text{ e } v = 1 \quad (58)$$

A distribuição a posteriori obtida do produto da verossimilhança e da priori conjunta é dada por $p(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) \propto L(\underline{X} | \underline{\mu}, \Sigma) \times p(\underline{\mu}, \Sigma)$ e resultou na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
p(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) \propto |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\underline{\mu} - \frac{n\bar{x} + ab}{n+b} \right)^t \Sigma^{-1} (N+b) \left(\underline{\mu} - \frac{n\bar{x} + ab}{n+b} \right) \right] \right\}} \times \\
|\Sigma|^{-\frac{(n+v)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \Sigma^{-1} \left[s+H + \frac{nb}{n+b} (\bar{x} - a)(\bar{x} - a)^t \right] \right\}} .
\end{aligned} \tag{59}$$

Com base na distribuição a posteriori (59) e devido ao interesse estar focado na inferência estatística sobre o parâmetro Σ , obteve-se a distribuição marginal de Σ integrando $\int p(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) d\underline{\mu}$ que está apresentada na expressão (60). Desta forma, verificou-se que a distribuição deste parâmetro foi identificada como sendo uma Wishart Inversa (v^*, W). O processo de integração para obtenção desta distribuição posteriori encontra-se demonstrado no Anexo 1.

$$p(\Sigma | \underline{x}) = \int p(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{x}) d\underline{\mu} = |\Sigma|^{-\frac{v^*}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \Sigma^{-1} [W] \right\}} , \text{ em que} \tag{60}$$

$$W = s + H + \frac{nb}{n+b} (\bar{x} - a)(\bar{x} - a)^t \text{ e } v^* = N + v ;$$

Foram simuladas 1000 observações desta posteriori pelo método Monte Carlo, sendo cada realização da variável aleatória definida por

$$\Sigma = \left(\sum_{j=1}^{v^*} \underline{X}_j \underline{X}_j^t \right)^{-1} , \text{ em que } \underline{X}_j \text{ é proveniente de uma normal multivariada}$$

$N_{pk}(0, W)$. A imposição da hipótese nula de igualdade das matrizes de

covariância foi feita da mesma forma como no procedimento de *bootstrap*. Assim, reamostragens foram feitas na matriz X_d obtendo em cada caso as matrizes X_{db} . A partir desta matriz foi estimada a matriz de somas de quadrados e produtos S_b^* , conforme descrição apresentada anteriormente, e construída a matriz $W = S_b^* + H + \frac{nb}{n+b}(\bar{x} - \bar{a})(\bar{x} - \bar{a})^t$. Definido este parâmetro, obteve-se uma nova realização Σ da Wishart invertida.

Em cada simulação foram computados os valores $\lambda_{1(w)}$ e $\lambda_{2(w)}$, que foram confrontados com os valores de λ_1 e λ_2 obtidos na amostra original da simulação Monte Carlo. Desta forma, a região crítica para as essas estatísticas λ_1 e λ_2 foi construída sobre a distribuição dos valores das estatísticas $\lambda_{1(w)}$ e $\lambda_{2(w)}$. Optou-se por calcular os p-valores determinando-se as proporções de valores da distribuição a posteriori que superaram os respectivos valores da estatística proveniente da amostra original da simulação Monte Carlo.

3.6 Cálculo das Probabilidades do Erro Tipo I e Poder.

As probabilidades do erro tipo I ($\delta=1$) e poder ($\delta>1$), obtidas em relação aos critérios definidos sobre a razão dos determinantes $\lambda_{1(w)}$ e $\lambda_{1(b)}$, foram computadas por meio da proporção de vezes em que os valores desses critérios fossem superiores ou iguais ao valor λ_1 obtido na amostra original de Monte Carlo em relação ao número total de simulações. Para os critérios $\lambda_{2(w)}$ e $\lambda_{2(b)}$ definidos em função da razão dos

traços, aplicou-se o mesmo procedimento, porém seus valores foram confrontados com o valor da amostra original λ_2 . Assim, obtiveram as devidas probabilidades de erro tipo I e poder para cada avaliação em que os testes foram submetidos.

Para realização deste trabalho, foi feito um programa escrito e compilado no Proc IML do programa SAS (Anexo 2). Finalmente, para título de ilustração, os critérios propostos nesses trabalhos foram aplicados em um conjunto de dados reais referentes à avaliação do efeito do exercício de força sobre o estresse oxidativo no plasma de mulheres na terceira idade, coletados em 16 mulheres voluntárias antes e após a realização em 4 semanas de exercícios físicos cedido pela Universidade Federal de Alfenas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Considerações Sobre as Probabilidades de Rejeição dos Testes Multivariados Propostos para Comparar k-Matrizes de Covariâncias de Populações Normais Dependentes.

Pelo fato de as estatísticas λ_1 e λ_2 em ambas as abordagens, *bootstrap* e bayesiana, serem baseadas na razão de variâncias generalizadas, teoricamente, pela própria construção do teste, espera-se que sob $H_0: \Sigma_{11}=\Sigma_{22}=\dots=\Sigma_{kk}$ os valores dessas estatísticas sejam iguais a 1. No entanto, ao estimar um intervalo de confiança na abordagem freqüentista ou de credibilidade no contexto bayesiano, tem-se que limite inferior será sempre superior a 1, de modo que o valor esperado por ambas as estatísticas não seria contemplado pelas estimativas intervalares, o que proporcionaria resultados sempre significativos.

Avaliando a hipótese alternativa H_1 , essa situação seria mais agravante, pois além do problema detectado nas estimativas intervalares, ter-se-ia o problema de determinar um valor crítico (δ_c) que pudesse fornecer uma região de rejeição de nível α . Utilizando o método de Monte Carlo, seria possível determinar este valor o que seria difícil pelo fato de que muitas situações descritas na Seção 3.2 deveriam ser contempladas. Além disso, em uma situação real, torna-se impossível a identificação, mediante uma amostra, a igualdade ou não da heterogeneidade das matrizes de covariâncias populacionais.

Em face deste problema, as probabilidades dos testes propostos, resultantes dos critérios estabelecidos, sendo estes, utilizados como regra de decisão, permitiram determinar de forma empírica a probabilidade da ocorrência do controle do erro tipo I e do poder dos testes em questão. Desta forma, procederam-se com os seguintes resultados.

4.2 Probabilidades do Erro Tipo I.

Os resultados descritos nessa seção corresponderam às probabilidades empíricas, obtidas via simulação Monte Carlo, referentes a ocorrência do erro tipo I.

Na construção dos testes propostos, em síntese, utilizou-se a razão de variâncias generalizadas, ora razão dos determinantes, ora razão dos traços. Os resultados encontrados nas Figuras 2-7 referiram-se às probabilidades de ocorrência do erro tipo I considerando os critérios dados pela razão dos determinantes. Analogamente, têm-se os resultados descritos na Tabela 3 referente à razão dos traços. Com o intuito de comparar esses critérios, os resultados são apresentados na Tabela 4, dado um nível de significância fixado em 1%. Todos os critérios foram avaliados em diferentes combinações de tamanho amostral (n), número de populações (k), número de variáveis (p) e grau de heterogeneidade das matrizes de covariância (δ). Além disso, para todas essas situações, considerou-se a estrutura autorregressiva de primeira ordem com alta e baixa correlação, respectivamente, sintetizadas pelas correlações globais $\rho = 0,80$ e $\rho = 0,20$.

Para todos os testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas por meio do método *bootstrap*, constatou-se que esses testes

foram eficientes no controle do erro tipo I devido ao fato de que os valores das probabilidades observadas encontravam-se contidos no intervalo de confiança de 95% para o nível nominal de significância adotado em 5%. Os valores que estiveram abaixo do limite inferior indicaram que os testes foram conservativos. Para tal conclusão, estimou-se o intervalo de 95% de confiança para a taxa nominal de 0,05, cujos valores foram (0,037; 0,065). Em se tratando dos testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano, procedeu-se com o mesmo raciocínio, porém, vale salientar que quando esses testes foram submetidos a um número $k=8$ populações considerando amostras pequenas, o teste não controlou o erro tipo I. A discussão do suposto efeito que ocasionou essa ocorrência é descrita analisando os resultados doravante encontrados na Figura 3.

Considerando essas ressalvas, a discussão em relação aos testes propostos, de um modo geral foi feita analisando suas performances, assumindo que as covariâncias foram determinadas a partir de uma estrutura de correlação, cujos valores das correlações foram classificados em alto e baixo, respectivamente, já mencionados por meio das correlações globais $\rho = 0,20$ e $\rho = 0,80$. Essa discussão também é comentada, sem desprezar o fato de que as matrizes de covariâncias utilizadas nos critérios foram estimadas por métodos diferentes, ou seja, bootstrap e bayesiano. Nesse sentido, considerando $k = 2$ populações, em situações bivariadas (Figura 2) observou-se que o efeito da correlação global dado pelo valor de $\rho = 0,80$, os testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano foram conservativos para todos os tamanhos amostrais. O mesmo fato ocorreu para os testes

em que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* considerando $n=100$. Reduzindo o valor dessa correlação para $\rho = 0,20$, essa propriedade conservativa foi confirmada para todos os testes, independentemente do tamanho amostral e da inferência realizada.

Confrontando os resultados mencionados anteriormente com os resultados obtidos dos testes da razão de verossimilhanças, dados em função de diferentes correções no grau de liberdade e analisados por Jiang et al. (1999), constatou-se que os testes apresentados neste trabalho foram adequados, porém poucos poderosos. Isto pôde ser constatado, uma vez que os resultados obtidos por esses autores, em relação aos testes propostos por Bartlett (1937), Box (1949) e Krishnaiah (1975), mostraram, de um modo geral, que não controlaram o erro tipo I. Isto se deu, para todas as amostras definidas em $n=10, 15, 20, 25, 50, 75$ e 100 , incluindo diversas estruturas de correlação.

Já os testes assintóticos, propostos por Jiang, et. al. (1999), controlaram o erro tipo I para amostras superiores a 50 ($n > 50$) com probabilidades próximas do nível nominal adotado. No caso, dos testes discutidos neste trabalho, foi observado que, para amostras de tamanhos inferiores a 50 ($n < 50$), os mesmos foram conservativos, dado um $\rho = 0,80$, independentemente do tipo de inferência realizada na estimação das matrizes de covariâncias. Importante ressaltar que os resultados obtidos por esses autores, se limitaram a apenas duas populações bivariadas. Esta limitação decorreu do problema de maximização das funções de verossimilhança. Portanto, para um número maior de populações e variáveis, não se têm resultados na literatura, por meio da teoria de verossimilhança, que possam ser comparados com os resultados

do presente trabalho. Assim, enfatiza-se o caráter inédito e a importância deste trabalho.

Em consonância com os resultados encontrados na Figura 2, verificou-se que o incremento no número de variáveis de $p = 2$ para $p = 3$ (Figura 3) repercutiu uma igualdade nas probabilidades de ocorrência do erro tipo I nos testes em que as matrizes de covariância foram geradas via *bootstrap*. Isto se deu para todos os tamanhos amostrais, quando estes testes foram submetidos à baixa estrutura de correlação global ($\rho=0,20$) o que na situação anterior (Figura 2) não tinha ocorrido, quando se assumiu $n=100$. Em se tratando do teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano, o aumento do número de variáveis praticamente não surtiu efeito, pois para todos os tamanhos amostrais, independentemente do valor da correlação global, o teste sofreu apenas uma leve redução ao se compararem as correlações globais. Note que esta diferença não influenciou a propriedade conservativa demonstrada por esse teste, já revelada na situação anterior ($p=2$).

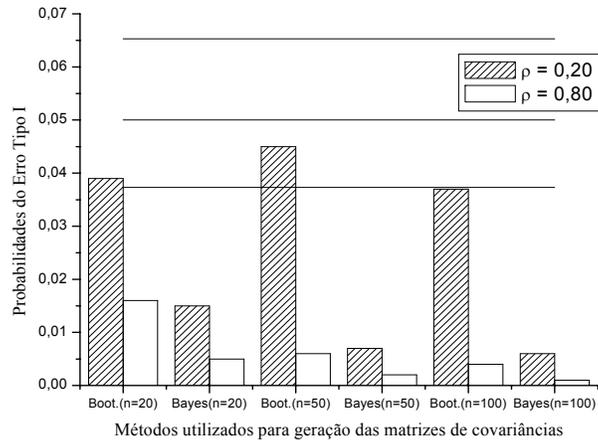


Figura 2 – Gráfico das probabilidades do erro tipo I considerando como critério a razão dos determinantes para a configuração $p=2$ e $k=2$.

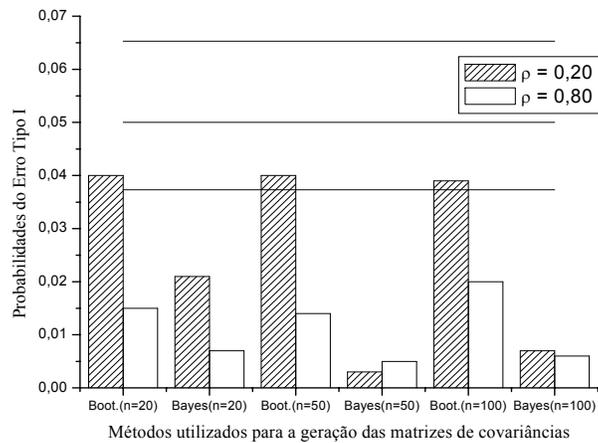


Figura 3 – Gráfico das probabilidades do erro tipo I considerando como critério a razão dos determinantes para a configuração $p=3$ e $k=2$.

A propriedade conservativa do teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano, já ressaltada nos

resultados anteriores (Figuras 2 e 3), novamente foi confirmada ao assumir $p = 8$ variáveis (Figura 4); assim, observou-se que em todos os tamanhos amostrais avaliados e nas correlações globais pré-determinadas, houve valores nulos para as probabilidades do erro tipo I. Em relação ao teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap*, novamente confirmou-se uma sensibilidade relativa aos valores da correlação global, já observada nos casos anteriores ($k=2$). Esta sensibilidade referiu-se à diferença das probabilidades do erro tipo I observadas em relação ao tamanho amostral, pois para este teste com valor de $\rho = 0,80$, o teste foi conservativo. Porém, fixando $\rho = 0,20$ este efeito não foi detectado para $n = 50$, no entanto, a probabilidade do ocorrência do erro tipo I se aproximou mais ao valor nominal de 5%.

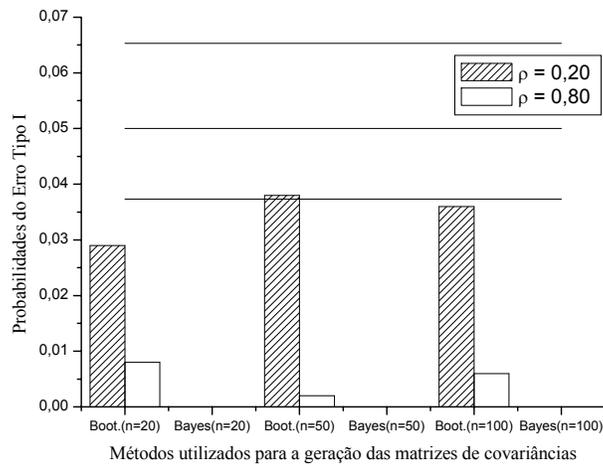


Figura 4 – Gráfico das probabilidades do erro tipo I considerando como critério a razão dos determinantes para a configuração $p = 8$ e $k = 2$.

Aumentando o número de populações ($k=8$), na situação bivariada ($p = 2$) retratada na Figura 5, constatou-se que para ambos os valores da correlação global pré-determinados, de modo geral os teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelo método bayesiano, novamente mostrou-se conservativo. No entanto, ao se considerar a geração das matrizes de covariâncias via *bootstrap*, os resultados foram bem discrepantes em relação ao valor da correlação global. Essa discrepância pode ser evidenciada ao se analisarem os resultados em que o teste foi submetido a uma baixa correlação global ($\rho=0,20$), de modo que as probabilidades referentes ao erro tipo I foram estatisticamente iguais ao nível nominal adotado. Já aumentando essa correlação para $\rho=0,80$, o teste manteve-se conservativo, vindo apenas corroborar com os resultados anteriores, em que foi considerado um número de população pouco expressivo ($k=2$) - (Figura 2-4).

Desejando verificar o efeito do incremento do número de variáveis, inicialmente em uma unidade, ou seja, definindo $p = 3$ (Figura 6), verificou-se que diante de amostras pequenas ($n = 20$), o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano em ambas as correlações globais não controlou o erro tipo I, passando a apresentar probabilidades bem superiores ao nível nominal fixado em 5%. Assim, este teste foi considerado liberal nesta situação. É conveniente salientar que houve, neste caso, uma alteração no valor do hiperparâmetro v da priori relacionada com a matriz de covariância Σ . O valor de v foi elevado de 1 para 80. A razão disso é que a distribuição a posteriori cuja distribuição é a Wishart invertida tem $N+v$ como

parâmetro (graus de liberdade) e possui dimensão kp . Para que amostras válidas sejam geradas, é necessário satisfazer a condição $N+v > kp$. A escolha de $v = 80$ se deveu à necessidade de atender a todos os valores de k e p doravante considerados.

A escolha do valor do hiperparâmetro v permitiu inferir que o desempenho do teste que considera a geração das matrizes de covariâncias realizadas por meio do método bayesiano em relação ao erro tipo I pode ser influenciado pelo conhecimento do pesquisador. A escolha de $v = 80$ resultou, conforme anteriormente discutido, em um teste liberal. No caso específico $p = 3$ e $k = 8$, com $n = 20$ foram simuladas situações com $v = 5$ (resultados não apresentados) para identificar o efeito deste hiperparâmetro. Assim, observou-se que os resultados das probabilidades da ocorrência do erro tipo I foram inferiores ou iguais ao valor nominal de significância adotado de 5%, portanto, da condição de um teste liberal quando $v=80$, o teste passou a ser conservativo ou de mesmo tamanho (0,05) considerando $v = 5$.

Confrontando os resultados observados na Figura 5 com os resultados encontrados na Figura 6, pode-se deduzir que um pequeno aumento no número de variáveis apresentou efeito diferenciado em função das correlações globais avaliadas. Para exemplificar podem ser consideradas as situações em que se assumiu $p=2$ (Figura 5) ou $p=3$ variáveis (Figura 6) fixado $n=20$. Nesta situação amostral, considerando $\rho=0,20$, notou-se que o teste no qual as matrizes de covariâncias foram geradas via o método *bootstrap* foi conservativo quando $p=3$

(Figura 6), porém, reduzindo o número de variáveis em $p=2$ (Figura 5), o teste não apresentou essa característica.

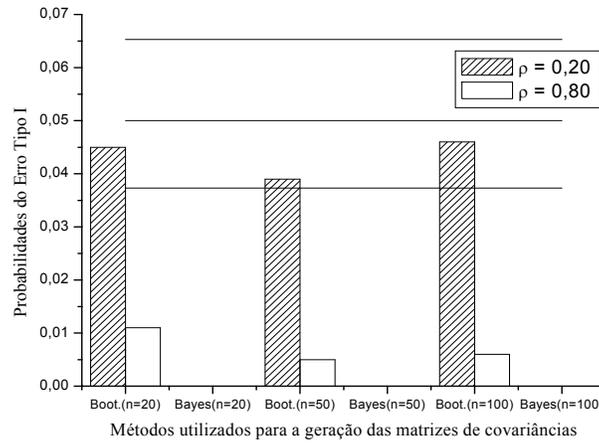


Figura 5 – Gráfico das probabilidades do erro tipo I considerando como critério a razão dos determinantes para a configuração $p = 2$ e $k = 8$.

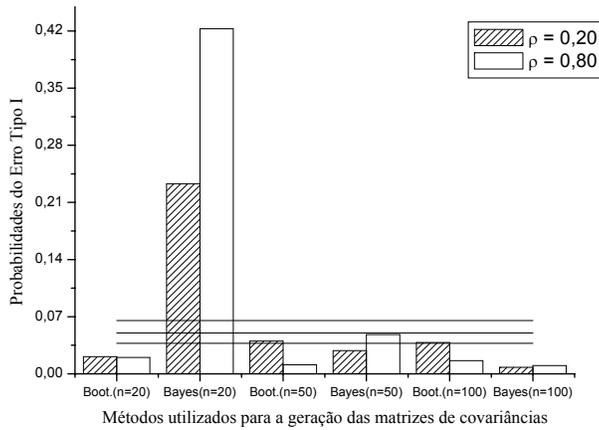


Figura 6 – Gráfico das probabilidades do erro tipo I considerando como critério a razão dos determinantes para a configuração $p = 3$ e $k = 8$.

Numa situação mais extrema, definindo o número de populações em $k = 12$ e $p = 8$ (Figura 7), observou-se que, de um modo geral, todos os testes controlaram o erro tipo I com probabilidades igual ou inferior ao nível nominal, fixado em 5%. Alguns resultados permitiram verificar que a propriedade conservativa do teste no qual as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano foi revelada apenas para amostras superiores a $n = 50$. Em amostras menores, este fato foi detectado para o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap*. Vale ressaltar que esta propriedade se deu em ambas as correlações globais avaliadas, conforme se encontra ilustrado na Figura 7.

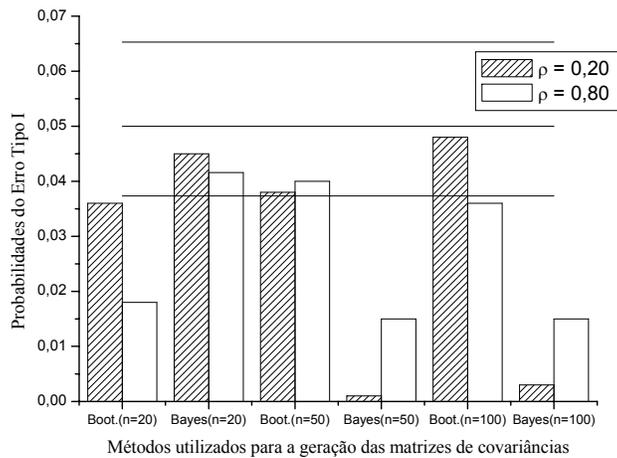


Figura 7 – Gráfico das probabilidades do erro tipo I considerando como critério a razão dos determinantes para a configuração $p=8$ e $k=12$.

Os resultados apresentados na Tabela 3 referem-se à probabilidade da ocorrência do erro tipo I dos testes mencionados

seguindo os mesmos métodos utilizados na geração das matrizes de covariâncias e configurações avaliadas. Entretanto, o que diferiu foi o fato de que os testes discutidos anteriormente foram fundamentados na razão dos determinantes, ao passo que os testes discutidos doravante foram fundamentados na razão de variâncias totais, representada por meio da razão do traço das matrizes de covariâncias.

Considerando o valor nominal de significância fixado em 5%, de um modo geral foram observados os mesmos padrões de resposta anteriores para baixa correlação, exceto no caso do teste em que as matrizes de covariâncias geradas via o método bayesiano, dada a situação ($k = 8$ e $p = 3$) cujos resultados revelaram um teste liberal quando submetido a baixas correlações ($\rho=0,20$) para $n \leq 50$ e conservativo em altas correlações ($\rho=0,80$). Nesse aspecto, a razão de variâncias generalizadas, dada por meio dos determinantes, revelou que o teste não controlou o erro tipo I, ao passo que, considerando o traço, o teste passou a ser conservativo apenas para alta correlação global. No entanto, em situações de alta correlação, assumindo-se $k = 2$, observou-se um padrão mais conservativo dos testes baseados na razão dos traços do que os construídos sobre a razão dos determinantes; portanto, espera-se que haja um menor poder para os testes em que a razão dos traços é considerada. Discussões mais específicas são apresentadas na seqüência.

Tabela 3 – Probabilidades do erro tipo I para as situações de baixa e alta correlação avaliadas nas combinações de número de populações (k), número de variáveis (p) considerando o critério definido pela razão do traço.

$\rho=20\%$							
Métodos	n	k=2			k=8		k=12
		p=2	p=3	p=8	p=2	p=3	p=8
Boot.	20	0,042	0,044	0,032	0,037	0,031	0,035
	50	0,039	0,035	0,032	0,046	0,045	0,031
	100	0,040	0,036	0,031	0,037	0,026	0,043
Bayes	20	0,009	0,003	0,000	0,000	0,113	0,000
	50	0,005	0,002	0,000	0,000	0,133	0,000
	100	0,000	0,007	0,001	0,001	0,001	0,000
$\rho=80\%$							
Boot.	20	0,000	0,000	0,000	0,001	0,006	0,001
	50	0,000	0,000	0,000	0,001	0,006	0,001
	100	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000
Bayes	20	0,000	0,000	0,000	0,000	0,016	0,000
	50	0,000	0,000	0,000	0,000	0,032	0,000
	100	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Confrontando os resultados encontrados na Tabela 3 com os resultados ilustrados nas figuras anteriores, dado o valor da correlação global ($\rho=0,20$), verificou-se que o teste cujas matrizes de covariâncias foram estimadas via o método de *bootstrap* apresentou o mesmo comportamento em relação ao controle do erro tipo I. Tal afirmação foi baseada na proximidade destes resultados (Tabela 3) com aqueles obtidos

quando o seu critério foi baseado na razão de determinantes (Figuras 2-7). Entretanto, aumentando o valor da correlação global para $\rho = 0,80$ e substituindo, no seu critério, a razão dos determinantes pela razão dos traços, observou-se que os valores das probabilidades da ocorrência do erro tipo I propiciadas por esse teste foram bem discrepantes. Essa discrepância foi notória, também, no teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via inferência bayesiana. O caso mais evidente foi observado quando se considerou uma amostra de tamanho $n = 20$ submetida a altas e baixas correlações, a qual não controlou o erro tipo I, passando a apresentar probabilidades bem superiores ao nível nominal (Figura 6). Dada essa mesma situação, os resultados encontrados na Tabela 3 continuaram a não controlar o erro tipo I, porém incluindo o tamanho amostral $n = 50$.

Na Tabela 4 estão apresentadas as probabilidades da ocorrência do erro tipo I nos dois testes (razão de determinantes e traços), nos quais, as matrizes de covariâncias foram geradas via os métodos *bootstrap* e bayesiano. Tais resultados foram obtidos nas mesmas configurações avaliadas anteriormente. Todavia, particularizou-se apenas o caso $k = 8$ populações e $p = 12$ variáveis por se caracterizar um caso extremo e supostamente o mais atrativo no sentido de que testes considerando um número $k > 2$ são inexistentes na literatura. Uma outra questão é que a probabilidade de ocorrência do erro tipo I destes testes foi comparada considerando o valor nominal de significância de 1%. Assim, as probabilidades do erro tipo I que estiveram alocadas dentro do intervalo de confiança de 95% para este nível nominal podem ser consideradas não

significativas a este nível nominal (1%). Para tal conclusão, o intervalo de confiança estimado foi 0,0048 e 0,0183.

Preliminarmente, as análises dos resultados encontrados na Tabela 4 permitiram avaliar que o padrão de resposta para os resultados observados no nível de significância nominal de 1% foi semelhante com os resultados comparados ao nível nominal fixado em 5%. Assim sendo, constatou-se que os testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método *bootstrap* apresentaram resultados conservativos ou com probabilidades não diferentes do nível nominal. O mesmo fato foi detectado quando as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano, de modo que em nenhuma configuração simulada foram observados resultados liberais. Em virtude desta similaridade nas probabilidades do erro tipo I, espera-se que o poder seja semelhante e coerentes com o nível nominal especificado em 1 ou 5%; portanto, optou-se por não apresentar nenhum outro resultado referente às outras configurações de k e p para o nível de significância fixado em 1%, haja vista que os resultados anteriores foram descritos de forma detalhada considerando o nível nominal fixado em 5%.

Tabela 4 - Probabilidades do erro tipo I considerando a variância generalizada dada pela razão dos determinantes e pela razão dos traços nos testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelos métodos *bootstrap* e bayesiano nas duas correlações globais avaliadas por diferentes tamanhos amostrais com o nível de significância fixado em 1%, $k=8$ e $p=12$.

Razão dos Determinantes			
Métodos	n	$\rho=0,20$	$\rho=0,80$
Boot.	20	0,0116	0,0033
	50	0,0050	0,0066
	100	0,0150	0,0133
Bayes	20	0,0133	0,0100
	50	0,0000	0,0050
	100	0,0000	0,0033
Razão dos Traços			
	N	$\rho=0,20$	$\rho=0,80$
Boot.	20	0,0100	0,0000
	50	0,0016	0,0000
	100	0,0083	0,0000
Bayes	20	0,0000	0,0000
	50	0,0000	0,0000
	100	0,0000	0,0000

4.3 Poder dos Testes Multivariados para Comparar Matrizes de Covariâncias de k Populações Normais Dependentes.

Conforme foi observado (Figuras 2-7), em geral, considerando amostras maiores ($n = 50$ e 100), os testes propostos em que as covariâncias foram geradas via o método *bootstrap* controlaram o erro tipo I, seja para o nível nominal fixado em 1 ou 5%. Em relação ao fato de que as covariâncias foram geradas pelo método bayesiano, os testes baseados propostos neste trabalho foram conservativos, incluindo o caso de amostras pequenas ($n=20$), evidentemente feitas as ressalvas em relação ao valor do hiperparâmetro v conhecido.

Diante desses resultados, pode-se inferir que os testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelo método bayesiano seria menos poderoso, justamente por ser conservativo; obviamente, os testes em que as matrizes de covariâncias fossem geradas utilizando-se a técnica *bootstrap* apresentariam valores de poder maiores. Entretanto, a eficiência no controle do erro tipo I propiciada por esses testes foi afetada pelo número de variáveis (p), pelos valores de correlações globais e, em algumas situações, pelo número de populações (k). Em virtude da interferência desses fatores, foi necessário avaliar de forma mais detalhada o poder dos referidos testes. Dessa forma, justificou-se a importância da obtenção dos resultados apresentados nas Figuras 8-25 e nas Tabelas 5-7. Ressalta-se que esses resultados referem-se aos critérios definidos pela razão dos determinantes, uma vez que os testes baseados na razão dos traços apresentaram probabilidades semelhantes aos testes

definidos pela razão dos determinantes, portanto, espera-se que o poder entre esses testes seja aproximado. Todavia, no exemplo ilustrativo dado na Seção 4.4 os testes utilizando como critério a razão dos traços são abordados em breve comparação, quando nesses testes é utilizada a razão dos determinantes.

As probabilidades referentes ao poder (Figuras 8) foram obtidas mediante a situação de baixa correlação global ($\rho=0,20$); em consonância com os resultados das taxas de erro tipo I (Figura 2) constatou-se que para o tamanho amostral $n = 20$, o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* foi mais poderoso em relação ao teste cujas matrizes foram geradas via o método bayesiano. Este resultado foi persistente em todos os graus de heterogeneidade em que as matrizes de covariâncias foram submetidas. Esta superioridade do poder observada nesse teste foi também detectada sob correlação global alta ($\rho = 0,80$). É relevante enfatizar que para uma alta heterogeneidade, retratada pelo valor de $\delta=16$, o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas por meio do método bayesiano apresentou um valor de poder satisfatório e bastante próximo ao seu competidor (Figura 9). Para menores valores de heterogeneidade ($\delta \leq 8$) houve grandes diferenças nos valores de poder. Pode-se ilustrar uma situação dessa tomando-se o valor de $\delta = 8$ e dada a correlação global em $\rho = 0,8$. Neste caso, o poder do teste no qual as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* foi de aproximadamente 50%, ao passo que quando essas matrizes são geradas pelo método bayesiano, o teste revelou valores de poder próximos a 10%.

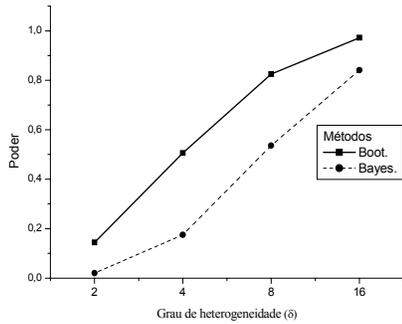


Figura 8 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=2$) tamanho amostral ($n=20$) e $\rho=0,20$.

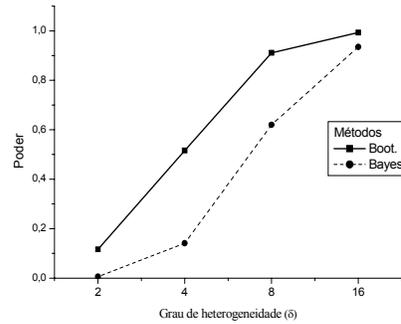


Figura 9 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=2$) tamanho amostral ($n=20$) e $\rho=0,80$.

Nas mesmas condições definidas anteriormente, porém redefinindo o tamanho da amostra para $n=50$, os resultados encontrados nas Figuras 10-11 evidenciaram que os testes baseados na razão de determinantes, diferenciando-se apenas no método utilizado para a geração das matrizes de covariâncias, apresentaram valores similares de poder para grandes heterogeneidades ($\delta \geq 8$) diante das correlações globais avaliadas. Para pequenas heterogeneidades ($\delta < 8$), o teste no qual, as matrizes de covariância foram geradas via *bootstrap* foi notoriamente superior. Além disso, para uma amostra menor ($n = 20$) (Figura 8 e 9), o poder destes testes foi bem mais discrepante. Em amostras menores ($n = 20$), os valores de poder inerentes a esses testes se aproximaram somente para grandes heterogeneidades ($\delta = 16$), e com maior intensidade para maior correlação global ($\rho = 0,80$).

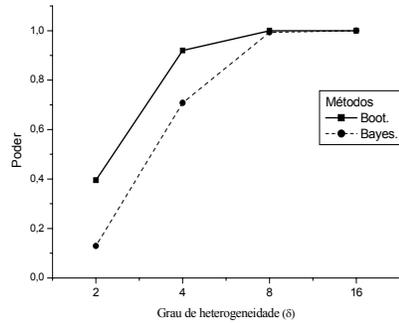


Figura 10 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=2$) tamanho amostral ($n=50$) e $\rho=0,20$.

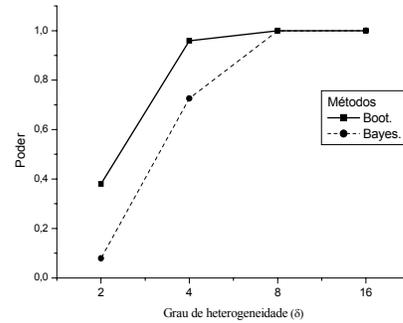


Figura 11 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=2$) tamanho amostral ($n=50$) e $\rho=0,80$.

Aumentando ainda mais o tamanho da amostra para $n = 100$, verificou-se que a igualdade dos valores de poder destes testes ocorreu para menores valores de δ (Figuras 12 e 13). Tal igualdade ocorreu para um grau de heterogeneidade dado por $\delta = 4$ para ambos valores das correlações globais $\rho = 0,20$ e $\rho = 0,80$. É oportuno salientar que de forma geral a correlação afetou pouco o padrão de resposta dos referidos testes, como pode ser observado nesta situação (Figuras 12 e 13), como nas situações discutidas anteriormente.

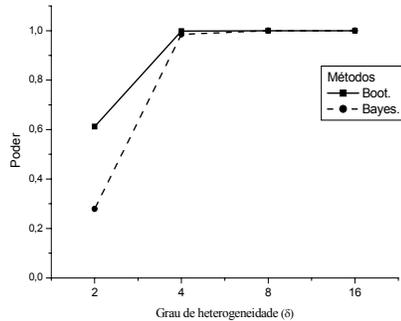


Figura 12 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=2$) tamanho amostral ($n=100$) e $\rho=0,20$.

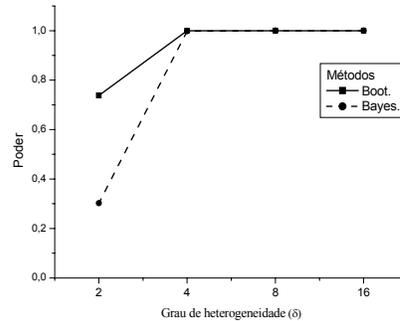


Figura 13 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=2$) tamanho amostral ($n=100$) e $\rho=0,80$.

Aumentado o número de variáveis para $p=3$, mantendo o número de populações em $k=2$ e considerando pequenas amostras ($n=20$), pode-se observar (Figuras 14 e 15) que novamente o poder do teste foi superior quando as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap*. Convém salientar que a diferença entre os valores de poder, em relação ao método utilizado para a geração dessas matrizes submetidas à baixa correlação global (Figura 15), salvo a situação de $\delta=2$, permaneceu constante. No caso de alta correlação global ($\rho=0,80$) e de valores intermediários de δ , essa diferença foi mais pronunciada. Outro fato que merece ser destacado é que as curvas de poder estimadas no teste em ambos os métodos (*bootstrap* / bayesiano) se comportam como esperado pela teoria, ou seja, crescem para a unidade com o afastamento do valor de δ do valor hipotético ($\delta=1$). Esse resultado é importante se forem consideradas situações não contempladas nesse trabalho, como, por exemplo, graus de heterogeneidade superiores a 16.

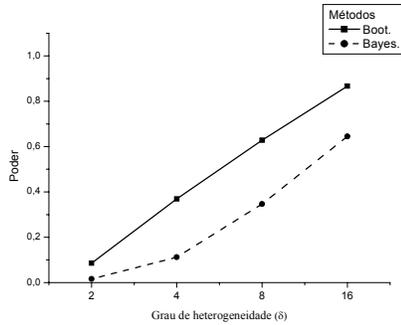


Figura 14 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=3$) tamanho amostral ($n=20$) e $\rho=0,20$.

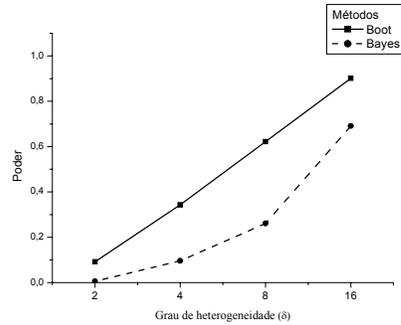


Figura 15 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=3$) tamanho amostral ($n=20$) e $\rho=0,80$.

Tomando especificações similares às apresentadas nas Figuras 14 e 15, porém diferindo no tamanho amostral ($n = 50$) foram obtidos os resultados encontrados nas Figuras 16 e 17. Assim constatou-se que o poder do teste quando as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* novamente foi superior, se considerarmos a geração das matrizes feita pelo método bayesiano, exceto para graus de heterogeneidade maiores ($\delta = 16$). Este fato foi facilmente observado para os dois valores de correlação global estudados, quais sejam, $\rho = 0,20$ (Figura 16) e $\rho = 0,80$ (Figura 17).

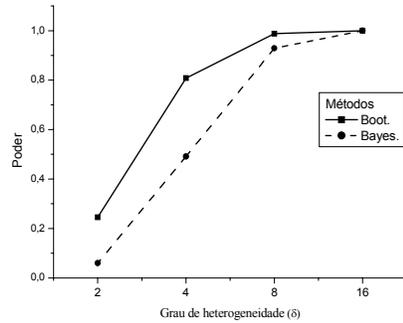


Figura 16 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=3$) tamanho amostral ($n=50$) e $\rho=0,20$.

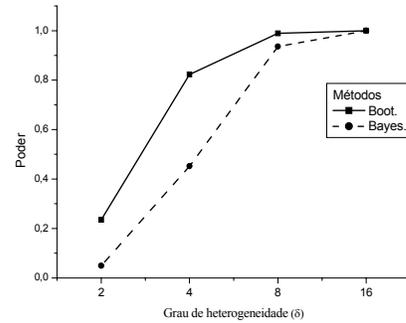


Figura 17 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=3$) tamanho amostral ($n=50$) e $\rho=0,80$.

No caso de amostras maiores, $n = 100$ (Figuras 18 e 19), notou-se que a igualdade dos valores de poder propiciada pela consideração das matrizes de covariâncias geradas via *bootstrap* ou bayesiano no teste em questão foi observada para valores de heterogeneidade iguais a $\delta = 8$. A vantagem de se considerar, no teste, as matrizes geradas por meio da técnica *bootstrap* é evidenciada principalmente nos casos de pequena heterogeneidade das matrizes de covariâncias ($\delta = 2$). Esta é uma situação adversa, pois existe pequena diferença entre as matrizes de covariâncias. Assim, o teste é evidentemente superior quando estas matrizes são geradas via o método bayesiano (Figura 18). Com grande heterogeneidade, principalmente em situações de alta correlação ($\rho = 0,80$), essa superioridade deixa de existir. No entanto, o teste em que as matrizes foram geradas via *bootstrap* não foi superado em relação ao poder em nenhuma configuração estudada.

Em relação a esse tamanho amostral, uma particularidade foi detectada em relação ao número de variáveis. Quando se assumiu $p = 2$ (Figuras 12 e 13), os métodos dos quais as matrizes de covariância foram geradas, não interferiu na performance do teste, o que foi confirmado pela similaridade dos valores de poder observados $\delta = 4$. Nota-se que essa similaridade se deu para ambas as correlações globais avaliadas. Aumentando o número de variáveis para $p = 3$ (Figuras 18 e 19), verificou-se que para este valor de δ a igualdade não se manteve, apesar de, na situação de alta correlação global ($\rho = 0,80$) os valores de poder terem se aproximados.

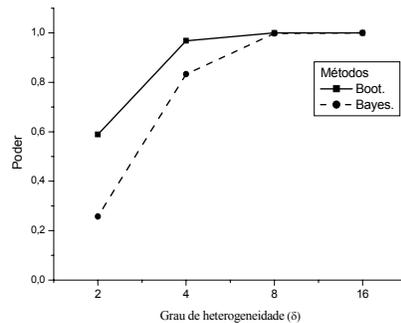


Figura 18 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$), número de variáveis ($p=3$), tamanho amostral ($n=100$) e $\rho=0,20$.

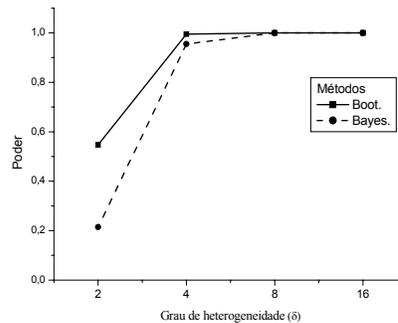


Figura 19 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$), número de variáveis ($p=3$), tamanho amostral ($n=100$) e $\rho=0,80$.

Considerando o número de populações dado por $k = 2$ e aumentando o número de variáveis para $p = 8$, verificou-se que para as amostras menores ($n=20$), de um modo geral os valores de poder sofreram redução, independentemente do método de geração (*bootstrap* ou

bayesiano). Portanto, verificou-se que para um grande aumento do número de variáveis afeta o seu desempenho, reduzindo as probabilidades de detecção de diferenças em diferentes níveis de heterogeneidade de covariâncias δ . Nota-se que nas diferentes correlações globais, $\rho = 0,20$ (Figura 20) e $\rho = 0,80$ (Figura 21), o desempenho destes testes, com elevado número de variáveis ($p = 8$), não foi influenciado pelos valores destas correlações.

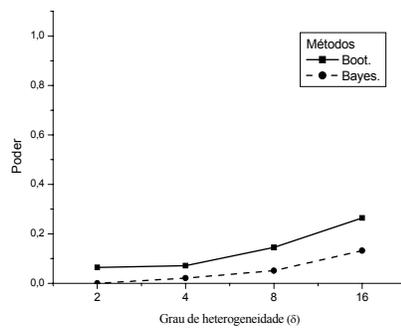


Figura 20 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=8$) tamanho amostral ($n=20$) e $\rho=0,20$.

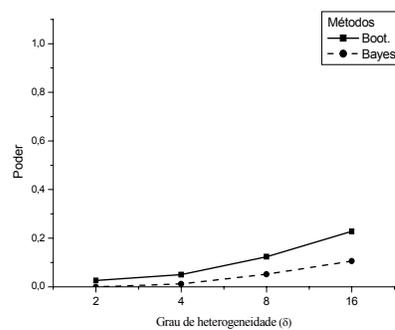


Figura 21 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$) número de variáveis ($p=8$) tamanho amostral ($n=20$) e $\rho=0,80$.

Os resultados ilustrados nas Figuras 22 e 23 foram determinados em função do tamanho amostral definido por $n = 50$. Assim, verificou-se que novamente o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* apresentou maior poder quando as matrizes que foram geradas pelo método bayesiano. Essa superioridade foi mais relevante para o valor $\delta = 4$. No entanto, notou-se que à medida que o valor de δ foi incrementado, os valores de poder do teste em ambos os métodos (*bootstrap* e bayesiano) as matrizes de covariância tenderam a se

aproximar. Este comportamento refletiu exatamente o resultado observado para as situações com poucas variáveis.

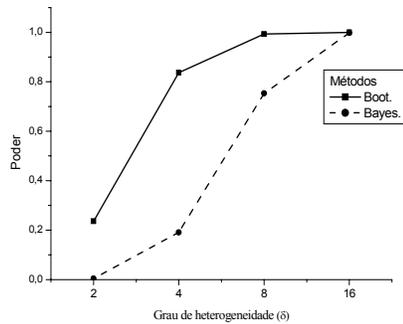


Figura 22 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$), número de variáveis ($p=8$), tamanho amostral ($n=50$) e $\rho=0,20$.

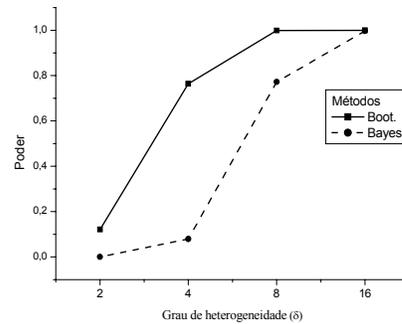


Figura 23 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$), número de variáveis ($p=8$), tamanho amostral ($n=50$) e $\rho=0,80$.

Os resultados apresentados nas Figuras 24 e 25 são relativos ao tamanho amostral dado por $n = 100$. Destaca-se o fato de que em ambas as correlações globais consideradas, a igualdade do poder do teste em relação ao método (*bootstrap* e bayesiana) se deu a partir de $\delta = 8$. À medida que os valores do grau de heterogeneidade (δ) foram reduzidos, os valores de poder do teste em ambas as inferências foram mais discrepantes, principalmente para correlação global fixada em $\rho = 0,80$ (Figura 25).

Analisando o aumento do número de variáveis em apenas uma unidade (Figuras 18 e 19) com o caso do aumento mais expressivo de $p = 2$ para $p = 8$, verificaram-se padrões de comportamento bem similares para o poder. O que se constata é que este aumento do número de

variáveis provocou maiores reduções nos valores correspondentes de poder nos casos de menor heterogeneidade de variância (Figura 24 e 25). Novamente, destacou-se o melhor desempenho do teste quando as matrizes de covariâncias foram geradas via o método de *bootstrap*.

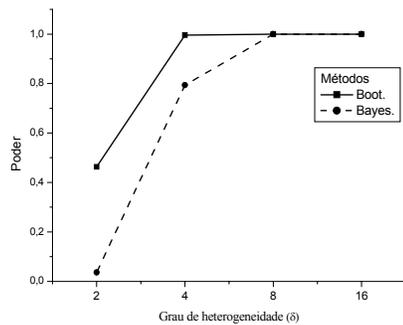


Figura 24 – Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$), número de variáveis ($p=8$), tamanho amostral ($n=100$) e $\rho=0,20$.

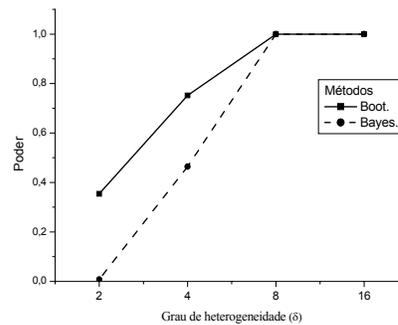


Figura 25 - Poder do teste considerando o número de populações ($k=2$), número de variáveis ($p=8$), tamanho amostral ($n=100$) e $\rho=0,80$.

Na Tabela 5 estão apresentados os valores de poder considerando as mesmas configurações discutidas anteriormente, relativas ao tamanho amostral (n) e ao grau de heterogeneidade entre as matrizes de covariâncias (δ), sendo modificado apenas o número de populações para $k = 8$ e número de variáveis fixado em $p = 2$.

Tabela 5- Poder do teste multivariado baseado na razão dos determinantes para comparar k-matrizes de covariâncias de populações normais dependentes em que as matrizes foram geradas pelos métodos *bootstrap* e bayesiano com diversos tamanhos amostrais, considerando o número de populações ($k = 8$) e o número de variáveis ($p = 2$).

		$\delta=2$		$\delta=4$		$\delta=8$		$\delta=16$	
		ρ		ρ		ρ		ρ	
Métodos	n	0,20	0,80	0,20	0,80	0,20	0,80	0,20	0,80
Boot.	20	0,081	0,033	0,304	0,164	0,712	0,595	0,951	0,935
	50	0,205	0,171	0,842	0,805	0,997	0,997	1,000	1,000
	100	0,442	0,438	0,995	0,993	1,000	1,000	1,000	1,000
Bayes	20	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005	0,000
	50	0,001	0,001	0,144	0,076	0,740	0,742	0,995	0,998
	100	0,041	0,023	0,791	0,771	0,998	1,000	1,000	1,000

Com base nos resultados encontrados na Tabela 5, analisando o tamanho amostral, definido por $n = 20$, verificou-se que, de um modo geral, o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelo método bayesiano apresentou valores nulos para o poder. Esse resultado crítico ficou evidente, inclusive para uma alta heterogeneidade, representada por $\delta = 16$. No caso em que as matrizes de covariâncias foram geradas por meio do método *bootstrap*, os valores mais relevantes foram dados apenas em situações de alta heterogeneidade ($\delta = 8$ e 16).

Um outro importante resultado referiu-se à redução no poder verificada nesse teste mediante ao método (*bootstrap* / bayesiana), sendo esta supostamente explicada, pelo aumento expressivo do número de

populações, tanto é que nos casos anteriores o valor de k considerado foi igual a 2.

Aumentando o tamanho da amostra para $n=50$, o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano, submetido a baixos valores de δ , apresentou baixo poder. No entanto, à medida que aumentou o grau de heterogeneidade, verificou-se que a partir de $\delta=8$ esse teste apresentou poder mais expressivo e pouca variação entre as correlações globais. Para as amostras maiores, representadas por $n = 100$, as mesmas características em relação à performance desse teste foram observadas, em relação às amostras anteriores. No entanto, esse aumento apenas favoreceu seus valores de poder, considerando as matrizes de covariâncias geradas pelo método bayesiano em ambas as correlações globais, no sentido de igualar seu poder quando essas matrizes foram geradas via o método *bootstrap*, dado um menor grau de heterogeneidade ($\delta=4$).

As probabilidades de poder descritas na Tabela 6 permitiram avaliar o método de geração (*bootstrap* / bayesiana); assim verificou-se, para as o caso de amostras ($n=20$), em ambos os métodos, que o teste baseado na razão dos determinantes apresentou valores de poder relativamente baixos para um valor de $\delta \leq 8$. Porém, dada a situação de alta heterogeneidade ($\delta=16$), os valores de poder foram razoavelmente altos em ambas as correlações globais. Embora tenha sido notória a superioridade do poder do teste quando as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* com diferença de dez pontos percentuais em relação ao teste no qual essas matrizes foram geradas pelo método bayesiano.

Tabela 6- Poder do teste multivariado baseado na razão dos determinantes para comparar k-matrizes de covariâncias de populações normais dependentes, em que as matrizes foram geradas pelos métodos *bootstrap* e bayesiano com diversos tamanhos amostrais, considerando o número de populações ($k = 8$) e número de variáveis ($p = 3$).

		$\delta=2$		$\delta=4$		$\delta=8$		$\delta=16$	
		ρ		ρ		ρ		ρ	
Mét.	n	0,20	0,80	0,20	0,80	0,20	0,80	0,20	0,80
Boot.	20	0,085	0,048	0,200	0,150	0,448	0,390	0,773	0,755
	50	0,178	0,008	0,561	0,018	0,956	0,965	0,996	1,000
	100	0,271	0,258	0,953	0,951	1,000	1,000	1,000	1,000
Bayes	20	0,043	0,030	0,118	0,083	0,310	0,273	0,673	0,650
	50	0,058	0,053	0,313	0,070	0,833	0,835	0,995	0,991
	100	0,060	0,056	0,765	0,736	0,996	0,996	1,000	1,000

Em consonância com os resultados referentes ao erro tipo I (Figura 6) o teste baseado na razão dos determinantes, no qual, as matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano para o poder, não deve ser considerado para esta situação com $n = 20$, em virtude de não ter ocorrido o controle do erro tipo I. Devido aos valores das probabilidades terem sido superiores a 20%, o que é inaceitável numa situação real ao se compararem estes valores com o nível nominal fixado em 5%.

Aumentando o tamanho da amostra para $n = 50$, esta deficiência no controle do erro tipo I foi corrigida. Entretanto, como se pôde observar por meio da Tabela 6, os valores de poder continuaram sendo baixos. Este

fato foi perceptível ao se analisarem os valores de $\delta = 2$ e 4 , em ambas as inferências realizadas. Porém, aumentando o valor para $\delta = 8$, verificou-se que o teste passou a apresentar valores razoáveis de poder, incluindo a situação extrema $\delta=16$, na qual a geração das matrizes de covariâncias, dada pelos métodos *bootstrap* e bayesiano, proporcionaram valores satisfatórios em relação ao poder do teste. No caso de amostras maiores ($n=100$), constatou-se apenas uma melhoria nos valores deste teste, independentemente dos métodos utilizados na geração das matrizes de covariâncias. Contudo, essa melhoria destacou-se a partir do valor $\delta=4$. Além disso, neste grau de heterogeneidade, o teste em que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* foi altamente superior, com diferença de aproximadamente de vinte pontos percentuais.

Os resultados especificados na Tabela 7 permitiram apenas corroborar com os resultados pertinentes às situações em que os números de variáveis (p) e populações (k) são relativamente altos. Conforme já ressaltado estas são as situações mais atrativas, pelo fato de os testes existentes na literatura serem baseados em aproximações assintóticas e limitados a um pequeno número de populações e variáveis.

Tabela 7- Poder do teste multivariado baseado na razão de determinantes para comparar k-matrizes de covariâncias de populações normais dependentes em que as matrizes foram geradas pelos métodos *bootstrap* e bayesiano, com diversos tamanhos amostrais considerando o número de populações ($k = 12$) e número de variáveis ($p = 8$).

Mét.	n	$\delta=2$		$\delta=4$		$\delta=8$		$\delta=16$	
		0,20	0,80	0,20	0,80	0,20	0,80	0,20	0,80
Boot.	20	0,053	0,043	0,088	0,066	0,111	0,128	0,201	0,180
	50	0,076	0,058	0,201	0,241	0,478	0,470	0,748	0,843
	100	0,125	0,103	0,523	0,510	0,915	0,928	0,995	0,996
Bayes	20	0,001	0,003	0,005	0,005	0,013	0,008	0,035	0,025
	50	0,003	0,003	0,011	0,015	0,075	0,05	0,266	0,300
	100	0,001	0,000	0,068	0,063	0,360	0,468	0,836	0,855

Analisando os valores de poder encontrados na Tabela 7 em conjunto com as probabilidades do erro tipo I (Figura 7), resumidamente pode-se destacar que, de um modo geral, esse teste apresentou pequenos valores de poder. Entretanto, particularmente para as situações de grandes amostras ($n = 100$), considerando que as matrizes de covariâncias são altamente heterogêneas ($\delta=16$) e geradas via o método bayesiano, o teste baseado na razão dos determinantes apresentou valores de poder superiores a 80% em ambas as correlações globais ($\rho = 0,20$ e $0,80$), revelando-se, assim, um teste satisfatório, tendo em vista, que o controle do erro tipo I para tais correlações ocorreu de forma conservativa (Figura 7). Os testes em que se assumiram as matrizes de covariâncias geradas via *bootstrap* em todas as situações simuladas apresentou controle do erro tipo I para os níveis nominais de 1% e 5%, sendo as

probabilidades do erro tipo I iguais ou inferiores aos níveis nominais adotados, além disso, os valores de poder de um modo geral foram superiores quando as matrizes de covariâncias utilizadas na construção do teste foram geradas via o método bayesiano. Assim recomenda-se a sua aplicação, dado que as matrizes de covariâncias foram geradas via *bootstrap* em situações reais para comparar matrizes de covariâncias multinormais na presença de correlação. Pode-se antever, nesse caso, que esse teste teria o mesmo desempenho em situações não normais, uma vez que nenhuma pressuposição a respeito da distribuição dos dados é exigida quando essas matrizes são geradas via *bootstrap*. No entanto, serão restringidas a discussão e as conclusões para o caso normal, uma vez que as simulações foram realizadas apenas para esta distribuição, incluindo o fato de as matrizes de covariâncias terem sido geradas via o método bayesiano, para a qual se considerou apenas a distribuição normal multivariada na sua construção.

4.4 Aplicação dos Testes Baseados na Razão dos Determinantes e Traços Considerando as Matrizes de Covariâncias Geradas via os Métodos *Bootstrap* e Bayesiano.

O conjunto de dados apresentados na Tabela 8, gentilmente cedido pela UNIFAL - Universidade Federal de Alfenas refere-se ao efeito do exercício de força sobre o estresse oxidativo no plasma de mulheres na terceira idade. Este estudo foi realizado no período de 01/09 a 31/10/2004, no laboratório de Bioquímica Clínica do Departamento de Análises Clínicas e Toxicológicas da UNIFAL.

Convém salientar que a realização dos testes estatísticos, conforme mencionado nesse trabalho, pressupõem a existência da dependência entre as populações. Estes dados supostamente possuem esta característica, pois se trata de uma aplicação para a qual as observações multivariadas ($p = 3$) são dadas de forma pareada e o indivíduo atua como seu próprio controle. As amostras foram avaliadas antes e após a realização de um exercício físico, em quatro semanas, definindo-se, portanto, amostras de duas populações ($k = 2$). Preliminarmente, foi realizado o teste de normalidade multivariada de Royston (1983) das $k_p = 6$ variáveis. O valor da estatística do teste foi $W = 0,925$, com p-valor associado de 0,6615, sendo a hipótese de normalidade multivariada não rejeitada em um nível de significância de 5%.

Tabela 8 – Dados referentes à avaliação do efeito do exercício de força sobre o estresse oxidativo no plasma de mulheres na terceira idade, coletados em 16 mulheres voluntárias antes e após a realização de exercícios durante 4 semanas.

Antes			Após (Exercícios em 4 semanas)		
Proteínas T (g/dl)	Albumina (g/dl)	Perox. (nmol/g de proteína)	Proteínas T (g/dl)	Albumina (g/dl)	Perox. (nmol/g de proteína)
6,00	3,70	53,00	6,60	3,80	72,30
6,00	3,50	79,00	6,50	3,70	77,00
6,90	3,00	62,00	6,90	3,30	56,90
5,90	4,50	74,70	6,60	3,70	67,40
7,00	5,00	85,00	7,00	4,30	59,10
6,30	4,80	62,90	6,50	3,90	72,00
6,50	3,70	65,10	6,70	3,60	55,00
5,90	4,00	80,30	6,00	3,40	68,10
6,80	3,60	56,00	7,00	3,60	58,30
6,80	4,10	47,00	7,00	4,00	72,40
7,10	4,10	73,00	7,50	4,20	59,20
6,80	4,50	23,00	7,00	4,10	62,10
6,80	4,00	52,40	6,60	3,50	66,80
6,50	3,60	87,00	6,40	3,90	88,70
6,60	3,70	63,00	7,30	3,60	48,30
6,60	4,10	64,22	6,20	3,70	65,57

Antes da realização dos testes de homogeneidade das covariâncias, fixou-se o nível de significância em 5%. As hipóteses foram definidas por:

$$\begin{aligned}
 H_0 : \Sigma_{\text{antes}} &= \Sigma_{\text{depois}} \\
 H_1 : \Sigma_{\text{antes}} &\neq \Sigma_{\text{depois}}
 \end{aligned}
 \tag{60}$$

Seguindo uma análise exploratória dos dados amostrais, estimou-se a matriz de correlação para cada população.

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,046 & 1 & \\ -0,271 & -0,032 & 1 \end{bmatrix}; R_D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,420 & 1 & \\ -0,581 & 0,148 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando X a matriz dos dados, tem-se o vetor de médias \bar{X}

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 6,53125 \\ 3,99375 \\ 64,2262 \\ 6,7375 \\ 3,76875 \\ 65,5731 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Para cada observação, os desvios em relação à média de cada variável foram estimados, originando-se, assim, a matriz dos desvios X_d dada por:

$$X_d = \begin{bmatrix} 6,0 - 6,53125 & 3,7 - 3,99375 & \dots & 72,3 - 65,5731 \\ 6,0 - 6,53125 & 3,5 - 3,99375 & \dots & 77,0 - 65,5731 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 6,6 - 6,53125 & 4,1 - 3,99375 & \dots & 65,57 - 65,5731 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Com base na matriz X_d , calculou-se então a matriz de somas de quadrados e produtos, determinada por S . Os valores obtidos foram:

$$S = \begin{bmatrix} 2,394 & 0,143 & -26,351 & 1,611 & 0,605 & -26,039 \\ 0,143 & 4,009 & -4,015 & 0,053 & 1,436 & 0,844 \\ -26,351 & -4,015 & 3952,389 & -24,445 & -2,348 & 582,980 \\ 1,611 & 0,053 & -27,445 & 2,317 & 0,698 & -33,568 \\ 0,605 & 1,436 & -2,348 & 0,698 & 1,194 & 6,149 \\ -26,039 & 0,844 & 582,980 & -33,568 & 6,149 & 1442,669 \end{bmatrix} \quad (63)$$

As matrizes indicadas pelos blocos diagonais de S (3×3) representam os estimadores das matrizes de somas de quadrados e produtos de cada população, cujas estimativas foram:

$$S_A = \begin{bmatrix} 2,394 & 0,143 & -26,351 \\ 0,143 & 4,009 & -4,015 \\ -26,351 & -4,015 & 3952,3894 \end{bmatrix}; \quad (64)$$

$$S_D = \begin{bmatrix} 2,317 & 0,698 & -33,568 \\ 0,698 & 1,194 & 6,149 \\ -33,568 & 6,149 & 1442,669 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Dividindo por n , têm-se os estimadores das matrizes de covariâncias (66) e (67)

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} 0,149 & 0,008 & -1,646 \\ 0,008 & 0,250 & -0,250 \\ -1,646 & -0,250 & 247,024 \end{bmatrix}; \quad (66)$$

$$\Sigma_D = \begin{bmatrix} 0,144 & 0,043 & -2,098 \\ 0,043 & 0,074 & 0,384 \\ -2,098 & 0,384 & 90,166 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Calculando os critérios (λ_1) e (λ_2) definidos, respectivamente, pela razão dos determinantes e pela razão dos traços, os valores obtidos foram:

$$\lambda_1 = \frac{|S_A|}{|S_D|} = \frac{35069,412}{1566,8342} = 22,382$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{Traço}(\Sigma_A)}{\text{Traço}(\Sigma_D)} = \frac{247,424}{90,386} = 2,737. \quad (68)$$

Preliminarmente verificou-se, por meio do resultado obtido para os critérios λ_1 e λ_2 , que as matrizes de covariâncias populacionais possivelmente sejam heterogêneas, pois se os valores destes critérios estivessem próximos de 1 ter-se-ia um forte indicativo de que essas matrizes seriam homogêneas.

Com o objetivo foi de ilustrar o teste baseado nesses critérios em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelos métodos *bootstrap* e bayesiano, procedeu-se a realização dos testes e da

confirmação desta evidência por meio da obtenção dos valores da probabilidade p .

4.4.1 Determinação dos p-valores dos Testes Baseados na Razão dos Determinantes e Traços Considerando a Geração das Matrizes de Covariâncias foi dada pelos Métodos *Bootstrap* e Bayesiano.

O algoritmo utilizado para impor a hipótese H_0 foi aplicado à matriz X_d . Para cada reamostragem, calculou-se novamente a matriz de somas de quadrados e produtos S_b , com $b = 1, \dots, B = 1000$. Conseqüentemente, foram obtidos 1000 valores para os critérios baseados na razão dos determinantes $\lambda_{1(b)}$ e $\lambda_{2(b)}$ (expressão 46) e na razão dos traços $\lambda_{1(w)}$ e $\lambda_{2(w)}$ (expressão 47). Vale ressaltar que nesses critérios considerando a estimação das matrizes de covariâncias o procedimento foi análogo, uma vez que a matriz de somas de quadrados e produtos S foi utilizada como parte integrante na imposição da hipótese nula e da determinação do parâmetro relacionado à posteriori. Portanto, determinou-se a distribuição posteriori da quantidade $\lambda_{1(w)}$ e $\lambda_{2(w)}$. Para todos os testes, a determinação do p-valor para a tomada de decisão em relação a rejeição ou não da hipótese H_0 foi realizada computacionalmente. Para isso, inicialmente definiu-se uma variável indicadora Z por:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_{1(i)} > \lambda_1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_{2(i)} > \lambda_2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (69)$$

para $i = 1, 2, \dots, B$.

Assim, obtiveram-se a probabilidade dada por:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^B Z_i}{B} \quad (70)$$

As probabilidades resultantes deste procedimento considerando em cada critério, as matrizes de covariâncias foram geradas por meio dos métodos *bootstrap* e bayesiano são encontradas na tabela abaixo.

Tabela 9 - Probabilidades p dos testes baseados na razão de determinantes e traços em que as matrizes de covariâncias foram geradas pelos os métodos *bootstrap* e bayesiano.

Métodos	Critérios	
	Razão dos Determinantes	Razão dos Traços
<i>Bootstrap</i>	0,014	0,152
Bayesiano	0,000	0,000

Conforme os resultados encontrados na Tabela 2, observou-se que o teste de razão de variâncias generalizada dada pela razão dos determinantes foi altamente significativo ($p < 0,05$), no entanto, o teste da razão dos traços cuja probabilidade foi 0,152. Esse resultado se deveu ao fato de o teste baseado em traço ser considerado conservativo. Na situação em que as matrizes de covariâncias foram geradas via inferência bayesiana os dois testes foram concordantes.

Concluiu-se que há evidências estatísticas ($p < 0,05$) de que a covariância do efeito do exercício de força sobre o estresse oxidativo no plasma de mulheres na terceira idade obtidos após quatro semanas de exercícios seja diferente da covariância da população inicialmente avaliada, ou sejam antes do prazo de quatro semanas.

5 CONCLUSÕES

O teste baseado na razão dos determinantes, considerando as matrizes de covariâncias geradas via *bootstrap*, foi mais poderoso em relação aos demais testes propostos.

Os testes cujas matrizes de covariâncias foram geradas via o método bayesiano foram mais conservativos no controle do erro tipo I.

Em alta heterogeneidade (δ) das matrizes de covariâncias, independentemente do valor da correlação global, os testes tenderam a se igualar em poder.

As matrizes de covariâncias independentes do método (*bootstrap* / bayesiano) no qual foram obtidas considerando uma alta correlação ($\rho=0,80$) apresentaram poder inferior, quando as mesmas foram submetidas à baixa correlação global.

Considerando o controle do erro tipo I e o poder em todas as situações estudadas, recomenda-se o uso regular do teste baseado na razão de determinantes em que as matrizes foram geradas via *bootstrap*.

Para amostras menores ($n=20$) os testes apresentaram baixo poder em todas as correlações globais.

A aplicação dos testes em que as matrizes de covariâncias foram geradas via inferência bayesiana é possível desde que, o pesquisador tenha um conhecimento a priori bem especificado.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGRESTI, A.; MIN, Y. Frequentist performance of Bayesian Confidence Intervals for Comparing Proportions in 2×2 Contingency Tables, **Biometrics**, Oxford, v.61, n.2 June, p.515-523, 2005.

ALTHAM, P.M.E. Exact Bayesian analysis of a 2×2 contingency table, and Fisher's "exact" significance test. **Journal of the Royal Statistical Society - Series B**, London, v.31, n.2, p.261- 269, 1969.

BLYTH, C.R. On the inference and decision models of statistics, **Annals of Mathematical Statistics**, Hayward, v.41, n.3 June, p.1034-1053, 1970.

BOCK, R.D. **Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research**. McGraw-Hill, 1975.

BOLFARINE, H.. SANDOVAL, M.C. **Introdução à Inferência Estatística**, Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

BARTLETT, M.S. Properties of sufficiency and statistical tests. **Proceedings Royal Society**, London, n.160, p.268-282, 1937.

BERGER, J.O. **Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis**, Springer Series in Statistics, 2^o Edition, 1985.606p.

BERGER, J.O.; BERLINER, L.M. Robust Bayes and empirical Bayes analysis with ϵ contaminated priors. **Annals Statistics**, Hayward, v.14, n.3 May, p.461-486, 1986.

BERNARDO, J.M.; SMITH, A.F.M. **Bayesian Theory**, Wiley, Chichester, 1994.

BOX,G.E.P. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. **Biometrika**, London, vol. 36, n.3-4, p.317-346, 1949.

BOX,G.E.P.; PIERCE,D.A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models, **Journal of the American statistical Association**, Alexandria, v.65, n.332, p.1509-1526, 1970.

CHOU, P.H. Bootstrap tests for Multivariate Event Studies, **Review of Quantitative Finance and Accounting**, v,23, p.275-290, 2004.

EFRON, B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, **Annals of Statistics** v.7,n.1, p.1-26, 1979.

FINNEY, D.J. The distribution of the ratio of estimates of the two variances in a sample from a normal bivariate population. **Biometrika**, London, vol. 30, p.190-192, 1938.

GELMAN,A.; CARLIN, J.B.; STER,I..S.; RUBIN, D.B. **Bayesian Data Analysis**, London: Chapman and Hall, 2003.668p.

GIRI, N.C. **Multivariate Statistical Analysis**. New York, STATISTICS: textbooks and monographs, Marcel Dekker, vol. 149, 1995. 378p.

GOOD, I.J. The Robustness of a hierarchical model for multinomials and contingency tables. **In Scientific Inference – Data analysis and robustness**, 1983.

GOOD, I.J. On the estimation of small frequencies in contingency tables. **Journal of the Royal Statistical Society - Series B**, London, vol.18, n.1, p.113-124, 1956.

HOROWITZ, J.L. The Bootstrap, In J.J. Heckman an E.E. Leamer (Eds.), North Holland: Elsevier Science, **Handbook of Econometrics**, n.5, p.3159-3228, 2001.

HOWARD, J.V. The 2×2 Table: A discussion from a Bayesian viewpoint. **Statistical Science**, Hayward, v.13, n.4 Nov., p.351-357, 1998.

JEFFREYS, H. **Theory of probability**. Oxford University Press, London, 1961.

JIANG, G.; SARKAR, K.S.; HSUAN, F.; A likelihood ratio test and its modifications for the homogeneity of the covariance matrices of dependent multivariate normals. **Journal of Statistical Planning and Inference**, New York, v.81,n.1-2, p.95-111, 1999.

JOHNSON,R.A.; WICHERN,D.W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 4.ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998.

KAHNEMAN,D.; SLOVIC, P.; TVERSKY,A. **Judgment under uncertainty: heuristics and biases**. Cambridge University Press, New York, 1982.

KRISHNAIAH, P.R. Tests for the equality of the matrices covariance of correlated multivariate normal populations. In: Srivastava, J.N. (Ed.), **A survey Statistical Design and Linear Models**. North-Holland, Amsterdam, pp.355-366, 1975.

LEVENE H. In **Contributions to Probability and Statistics**: Essays in Honor of Harold Hotelling, I. Olkin et al. eds., Stanford University Press, p. 278-292,1960.

LINDLEY, D.V. A statistical paradox, **Biometrika**, London, v.44, n.1-2, p.187-192,1957.

LINDSEY, J.K. **Parametric Statistical Inference**, New York, Clarendon Press Oxford, 1996. 487p.

MANLY, B.F.J. **Randomization, bootstrap and Monte Carlo methods in biology**, 2nd ed. New Zealand: University of Otago, 1997, 356p.

MORGAN, W.A. A test for the significance of the difference between the two variances in a sample from a normal bivariate population. **Biometrika**, London, v.31, n.1-2, p.9-12, 1939.

O'BRIEN, C.O.P. Robust Procedures for Testing Equality of Covariance Matrices, **Biometrics**, Oxford, v.48, p.819-827, 1992.

PAULINO, C.D.; TURKMAN, M.A.A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 444p.

PITMAN, E.J.G. A note on normal correlation, **Biometrika**, London, v.31, n.1-2, p.9-12, 1939.

ROY, S.N., POTTHOFF, R.F. Confidence bounds on vector analogues of the "ratio of means" and the "ratio of variances" for two correlated normal variates and some associated tests. **Annals Mathematics Statistics**, Hayward, v.29, n.3, p.829-841, 1958.

ROYSTON, J.P. Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro-wilk W. **Applied Statistics Journal of the Royal Statistical Society – Series C**, London, v.32, n.2, p.121-133, 1983.

SAMANIEGO, F.J.; RENEAU, D.M. Toward a reconciliation of the bayesian and frequentist approaches to point estimation. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.89, n.427 Sept., p.947-957, 1994.

SHAO, J.; TU, D. **The Jackknife and bootstrap**, New York, Springer, Verlag, 1995.

SMITH, P.L., KSHIRSAGAR, A.M. Testing for the equality of the variance-covariance matrices of two jointly normal vector variables. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 27,n.5, p.581-589, 1985.

TANNER, M.A. **Tools for statistical inference: methods for the exploration of posterior distributions and likelihood functions**, 3^o Edition, New York, 1996.

WANG, W.; HWANG, J.T.G., DASGUPTA. A. Statistical tests for multivariate bioequivalence, **Biometrika**, London, v.86, n.2 June, p.395-402, 1999.

ANEXO 1 Obtenção da distribuição a posteriori.

Seja $X^\alpha = (X_{\alpha 1}, \dots, X_{\alpha p})$; $\alpha=1, \dots, n$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$. Considere as seguintes priors:

$$p(\underline{\mu}) \sim N_p\left(a, \frac{\Sigma}{b}\right) \Rightarrow p(\underline{\mu}) = c \times |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}(\underline{\mu}-a)^t \left(\frac{\Sigma}{b}\right)^{-1} (\underline{\mu}-a)\right\}}, \text{ em que,}$$

$$c = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} b}.$$

$$p(\Sigma) \sim W^{-1}(\nu, H) \Rightarrow p(\Sigma) = k |\Sigma|^{-\frac{\nu}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\text{Tr}(\Sigma^{-1}H)\right\}} \text{ em que,}$$

$$p^* = \nu k; \nu = n - 1 \text{ e}$$

$$k = \frac{|H|^{\frac{\nu-p^*-1}{2}}}{2^{\frac{\nu-p^*-1}{2}} \prod_{i=1}^p \frac{p^*(p^*-1)}{4} \prod_{i=1}^p \frac{\nu-p^*-i}{2}}.$$

- **Priori Conjunta**

$$p(\underline{\mu}|\Sigma)p(\Sigma) \propto c |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}(\underline{\mu}-a)^t \Sigma^{-1} (\underline{\mu}-a)b\right\}} \times k |\Sigma|^{-\frac{\nu}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\text{Tr}(\Sigma^{-1}H)\right\}}$$

$$\propto ck |\Sigma|^{-\frac{(\nu+1)}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left[(\underline{\mu}-a)^t \Sigma^{-1} (\underline{\mu}-a)b\right] + \text{Tr}(\Sigma^{-1}H)\right\}}$$

- **Função de Verossimilhança**

$$L(\underline{X} | \underline{\mu}, \Sigma) = d \times |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\text{Tr}\left[\Sigma^{-1}s + n\Sigma^{-1}(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{X}-\underline{\mu})^t\right]\right\}}, \text{ em que,}$$

$$s = \sum (\underline{X} - \bar{\underline{X}})(\underline{X} - \bar{\underline{X}})^t; \bar{\underline{X}} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\underline{X}^\alpha}{n} \text{ e } d = (2\pi)^{-\frac{np^*}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}}$$

- **Distribuição a Posteriori**

$$\begin{aligned}
L(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) &\propto L(\underline{X} | \underline{\mu}, \Sigma) \times p(\underline{\mu} | \Sigma) \times p(\Sigma) \\
&\propto |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Sigma^{-1} s + N \Sigma^{-1} (\bar{X} - \underline{\mu}) (\bar{X} - \underline{\mu})^t \right) \right\}} \times \\
&|\Sigma|^{-\frac{(\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \left[(\underline{\mu} - \underline{a})^t \Sigma^{-1} (\underline{\mu} - \underline{a}) b + \text{Tr} \Sigma^{-1} H \right] \right\}} \\
&\propto |\Sigma|^{\frac{(n+\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \Sigma^{-1} \left(s + n \Sigma^{-1} (\bar{X} - \underline{\mu}) (\bar{X} - \underline{\mu})^t + \left[(\underline{\mu} - \underline{a})^t \Sigma^{-1} (\underline{\mu} - \underline{a}) b + \text{Tr} \Sigma^{-1} H \right] \right) \right\}} \\
&\propto |\Sigma|^{\frac{(n+\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \Sigma^{-1} \left(s + n \bar{X} \bar{X}^t - n \bar{X} \underline{\mu}^t - n \underline{\mu} \bar{X}^t + n \underline{\mu} \underline{\mu}^t + H \right) + \text{Tr} \left[(\underline{\mu} - \underline{a})^t \Sigma^{-1} (\underline{\mu} - \underline{a}) b \right] \right\}} \\
&\propto |\Sigma|^{\frac{(n+\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \Sigma^{-1} \left(s + H + n \bar{X} \bar{X}^t - n \bar{X} \underline{\mu}^t - n \underline{\mu} \bar{X}^t + n \underline{\mu} \underline{\mu}^t \right) + \text{Tr} \left[\underline{\mu}^t \Sigma^{-1} \underline{\mu} b - \underline{\mu}^t \Sigma^{-1} \underline{a} b + \underline{a}^t \Sigma^{-1} \underline{\mu} b + \underline{a}^t \Sigma^{-1} \underline{a} b \right] \right\}} \\
&\propto |\Sigma|^{\frac{(n+\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Sigma^{-1} s + \Sigma^{-1} H + \Sigma^{-1} \left[n \bar{X} \bar{X}^t - n \bar{X} \underline{\mu}^t - n \underline{\mu} \bar{X}^t + n \underline{\mu} \underline{\mu}^t + \underline{\mu} \underline{\mu}^t b - \underline{\mu} \underline{a}^t b + \underline{a} \underline{a}^t b + \underline{a} \underline{a}^t b \right] \right) \right\}} \\
&\propto |\Sigma|^{\frac{(n+\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Sigma^{-1} s + \Sigma^{-1} H + \Sigma^{-1} \left[n \bar{X} \bar{X}^t - (n \bar{X} + \underline{a} b) \underline{\mu}^t - \underline{\mu} (n \bar{X}^t + \underline{a}^t b) + \underline{\mu} (n+b) \underline{\mu}^t + \underline{a} \underline{a}^t b \right] \right) \right\}} \\
&|\Sigma|^{\frac{(n+\nu+1)}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \Sigma^{-1} \left(s + H + \left(\underline{\mu} \cdot \frac{n \bar{X} + \underline{a} b}{n+b} \right) (n+b) \left(\underline{\mu} \cdot \frac{n \bar{X} + \underline{a} b}{n+b} \right) + \frac{nb}{n+b} (\bar{X} - \underline{a}) (\bar{X} - \underline{a})^t \right) \right\}}, \text{ logo} \\
L(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) &= |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\underline{\mu} \cdot \frac{n \bar{X} + \underline{a} b}{n+b} \right) \Sigma^{-1} (n+b) \left(\underline{\mu} \cdot \frac{n \bar{X} + \underline{a} b}{n+b} \right) \right] \right\}} \times e^{\left\{ \text{Tr} \Sigma^{-1} \left[s + H + \frac{nb}{n+b} (\bar{X} - \underline{a}) (\bar{X} - \underline{a})^t \right] \right\}}
\end{aligned}$$

- **Distribuição Marginal de Σ .**

$$\int L(\underline{\mu}, \Sigma | \underline{X}) d\underline{\mu} = |\Sigma|^{\frac{n+v}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Sigma^{-1} \left[s+H + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-\underline{a})(\bar{X}-\underline{a})^t \right] \right] \right\}}$$

$$\underbrace{\int |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\underline{\mu} - \frac{n\bar{X}+\underline{a}b}{n+b} \right) \Sigma^{-1} (n+b) \left(\underline{\mu} - \frac{n\bar{X}+\underline{a}b}{n+b} \right) \right] \right\}}}_{=1}$$

Definindo $W = s + H + \frac{nb}{n+b} (\bar{X} - \underline{a})(\bar{X} - \underline{a})^t$ tem-se uma

distribuição Wishart-Inversa $(n+v, W^{-1})$.

ANEXO 2 Programa para simular o parâmetro referente as matrizes de covariância e variâncias particionadas.

```

/* *****/
/* ** Simular Matrizes de Cov. e Var. particionadas C1* */
/* *****/

proc iml;

/* *****/ Alterar parametros do programa *****/

    p=8;          /* **** Num. de Variaveis **** */
    k=12;         /* **** Num. de Pop. **** */
    pho=0.9;     /* **** Grau de Correlacao **** */
    delta=2;     /* **** Razao entre os Det **** */
    n=100;

/* *****/ Fim da Alteração *****/

    pk=p*k;
    sigar1=i(pk);      /* **** AR(1) **** */
    eco=i(pk);         /* **** Matriz Eco **** */

    do i=1 to pk;
        do j=1 to pk;

/* *****/ Estrutura AR(1) *****/

            if i=j then sigar1[i,j]=1 ;
                else sigar1[i,j]=pho**(abs(i-j));

/* *****/ Estrutura Eco *****/
/*
            if i=j then eco[i,j]=1 ;
                else eco[i,j]=pho;
*/
        end;
    end;

/* *****/ Geração da Normal Multivariada *****/

```

```

if (delta>1) then
do;

mi=j(nrow(sigar1),1,0); /* * Vetor de medias * */
gn=5000;

paux=nrow(sigar1);
m1=repeat(mi`,gn,1);
g=root(sigar1);
z=normal(repeat(0,gn,paux));
y=z*g+m1;

d=(delta-1)/(k-1);
b1=y[1:gn,1:p];

conti=p+1;
contf=conti+p-1;

do u=2 to k;

mc=y[1:gn,conti:contf];
*print mc;
dest=sqrt((1+d*(u-1))**(1/p));
yaux=mc*dest;
conti=conti+p;
contf=contf+p;
yf=yf||yaux;
end;

yf=b1||yf;

q=i(nrow(yf))-1/nrow(yf)*j(nrow(yf),nrow(yf),1);
ms=t(yf)*q*yf;

end;

if delta=1 then ms=sigar1;

rho = inv(root(diag(ms)))*ms*inv(root(diag(ms)));
rhomed=(sum(abs(rho))-p*k)/((p*k-1)*p*k);

print rho;

```

```

Print "***** Configurações (138) ***** " ;

print "Numero de variaveis .....: " p;
print "Numero de Populacoes .....: " k;
print "delta (Razao entre os det.).....: " delta;
print "Tamanho da amostra.....: " n;
print "media das covariâncias.....: " rhomed;

Print " *** Matriz de covariância (Parametro) ***** ";
print ms;

create mpd from ms;
append from ms;

run;
quit;

/* ***** */
/* * Inicio do da Sim. da Dist. da Matriz de Cov.*** */
/* ***** */

proc iml;
  use mpd;
  read all into sigma;

  n=100;          /* ** Tamanho da Amostra ***** */
  k=12;          /* **** Numero de Pop. ***** */
  p=8;           /* **** Numero de Var. ***** */
  nsim=1000;     /* *** Num.Sim.-Dist.Sigma-*** */

  prmc1b5=0; prmc3b5=0; prmc1w5=0; prmc3w5=0;
  prmc1b1=0; prmc3b1=0; prmc1w1=0; prmc3w1=0;

  mi=j(nrow(sigma),1,0); /* * Vetor de medias ***** */

  do exp=1 to nsim;

    prob1b=0; prob3b=0; probw1=0; probw3=0;

    paux=nrow(sigma);
    m1=repeat(mi`,n,1);
    g=root(sigma);
    z=normal(repeat(0,n,paux));

```

```

y=z*g+m1;
vm=j(ncol(y),1,0);
id=j(n,1,1);

/* * Def. do vetor de medias Vm e Matriz S - SQP *** */

vm=t(y)*j(n,1,1)/n;
dif=id*t(vm);
yest=y-dif;

q=i(nrow(yest))-1/nrow(yest)*j(nrow(yest),nrow(yest),1);
s=(t(yest)*q*yest);

detmc=j(k,1,0);      trmc=j(k,1,0);
detboot=j(k,1,0);   trboot=j(k,1,0);
detw=j(k,1,0);      trw=j(k,1,0);

do i5=1 to k;
  nlin=(i5-1)*p+1;
  blocsmc=s[nlin:nlin+p-1,nlin:nlin+p-1];
  detmc[i5]=det(blocsmc);
  trmc[i5]=trace(blocsmc);
end;

/* ***** Est.do Teste MC ***** */

deltamc1=max(detmc)/min(detmc); /* * Det. * */
deltamc3=max(trmc)/min(trmc); /* * Traco * */

/* ***** Def. dos Hiperparametros ***** */

ni=1;
a=j(ncol(s),1,2);
b=0.9;
h=j(ncol(s),ncol(s),b);
do h0=1 to nrow(h);
  do h1=1 to ncol(h);
    if h[h0,h0]=h[h1,h1] then h[h0,h0]=4*h[h0,h0];
  end;
end;

/* ** Fim da Definicao dos Hiperparametros ***** */

```

```

nb=n*b;
v=ni+n;          /* *** Graus de Liberdade **** */
auxw=(vm-a)*t(vm-a);
nwisboot=1000;

do i4=1 to nwisboot;

/* ***** Reamostrar para impor H0 - ***** */

    mboot=j(n,p*k,0);
    do b1=1 to n;
        do b2=1 to k;
            al=int(ranuni(0)*n)+1;
            kl=int(ranuni(0)*k)+1;
            kb=(b2-1)*p+1;
            auxb=(kl-1)*p+1;
            mboot[b1,kb:kb+p-1]=yest[al,auxb:auxb+p-1];
        end;
    end;

qwb=i(nrow(mboot))-1/nrow(mboot)*
j(nrow(mboot),nrow(mboot),1);

    sstar=(t(mboot)*qwb*mboot);

    w=sstar+h((nb*auxw)/(n+b));
    wi=inv(w);
    ch=root(wi);
    pw=ncol(wi);
    t=normal(repeat(0,v,pw));
    x=t*ch;
    wis=inv(t(x)*x);
    SWI=wis/v;          /* **** Amostras Wishart **** */

    do i5=1 to k;
        nlin=(i5-1)*p+1;
        blocswi=SWI[nlin:nlin+p-1,nlin:nlin+p-1];
        blocsboot=sstar[nlin:nlin+p-1,nlin:nlin+p-1];
        detw[i5]=det(blocswi);
        trw[i5]=trace(blocswi);
        detboot[i5]=det(blocsboot);
        trboot[i5]=trace(blocsboot);
    end;
    deltaw1=max(detw)/min(detw);

```

```

        deltaw3=max(trw)/min(trw);
        deltab1=max(detboot)/min(detboot);
        deltab3=max(trboot)/min(trboot);

        if deltaw1>deltamc1 then probw1=probw1+1;
        if deltaw3>deltamc3 then probw3=probw3+1;

        if deltab1>deltamc1 then problb=problb+1;
        if deltab3>deltamc3 then prob3b=prob3b+1;

end;

        pv1w=probw1/nwisboot;
        pv3w=probw3/nwisboot;
        pv1boot=problb/nwisboot;
        pv3boot=prob3b/nwisboot;

        if pv1w<=0.05 then prmclw5=prmclw5+1/nsim;
        if pv1w<=0.01 then prmclw1=prmclw1+1/nsim;

        if pv3w<=0.05 then prmc3w5=prmc3w5+1/nsim;
        if pv3w<=0.01 then prmc3w1=prmc3w1+1/nsim;

        if pv1boot<=0.05 then prmclb5=prmclb5+1/nsim;
        if pv1boot<=0.01 then prmclb1=prmclb1+1/nsim;

        if pv3boot<=0.05 then prmc3b5=prmc3b5+1/nsim;
        if pv3boot<=0.01 then prmc3b1=prmc3b1+1/nsim;

end;

print "***** Prob. 5% ***** ";

print "Razao dos Determinantes ... (FREQ).....: "  prmclb5;
print "Razao dos Determinantes.. (BAYES).....: "  prmclw5;
print "Razao dos Traços ..... (FREQ).....: "  prmc3b5;
print "Razao dos Traços ..... (BAYES).....: "  prmc3w5;

        print "***** Prob. 1% ***** ";

print "Razao dos Determinantes ... (FREQ).....: "  prmclb1;
print "Razao dos Determinantes .. (BAYES).....: "  prmclw1;
print "Razao dos Traços ..... (FREQ).....: "  prmc3b1;
print "Razao dos Traços ..... (BAYES).....: "  prmc3w1;

quit;

```

ANEXO 3 Dados referente a avaliação do efeito do exercício de força sobre o estresse oxidativo no plasma de mulheres na terceira idade, coletadas em 16 mulheres voluntárias antes e após a realização de exercício dada em 4 semanas

```
y={ 6.00    3.70    53.00    6.60    3.80    72.30,
     6.00    3.50    79.00    6.50    3.70    77.00,
     6.90    3.00    62.00    6.90    3.30    56.90,
     5.90    4.50    74.70    6.60    3.70    67.40,
     7.00    5.00    85.00    7.00    4.30    59.10,
     6.30    4.80    62.90    6.50    3.90    72.00,
     6.50    3.70    65.10    6.70    3.60    55.00,
     5.90    4.00    80.30    6.00    3.40    68.10,
     6.80    3.60    56.00    7.00    3.60    58.30,
     6.80    4.10    47.00    7.00    4.00    72.40,
     7.10    4.10    73.00    7.50    4.20    59.20,
     6.80    4.50    23.00    7.00    4.10    62.10,
     6.80    4.00    52.40    6.60    3.50    66.80,
     6.50    3.60    87.00    6.40    3.90    88.70,
     6.60    3.70    63.00    7.30    3.60    48.30,
     6.60    4.10    64.22    6.20    3.70    65.57};
```

```
n=16;          /* ** Tamanho da Amostra ***** */
k=2;           /* **** Numero de Pop. ***** */
p=3;          /* **** Numero de Var. ***** */
```

```
/* *** Def. do vetor de medias Vm e Matriz S - SQP *** */
```

```
vm=j(ncol(y),1,0);
id=j(n,1,1);
```

```
vm=t(y)*j(n,1,1)/n;
dif=id*t(vm);
yest=y-dif;
```

```
print " matriz dos dados " y;
print " vetor de medias " vm;
print " yest " yest;
```

```
q=i(nrow(yest))-1/nrow(yest)*j(nrow(yest),nrow(yest),1);
s=(t(yest)*q*yest);
cov=(1/16)*s;
```

```

print "matriz soma e produto" s;
print "matriz de covariância" cov;

detmc=j(k,1,0);      trmc=j(k,1,0);
detboot=j(k,1,0);   trboot=j(k,1,0);
detw=j(k,1,0);      trw=j(k,1,0);

do i5=1 to k;
  nlin=(i5-1)*p+1;
  blocsmc=s[nlin:nlin+p-1,nlin:nlin+p-1];
  print blocsmc;
  detmc[i5]=det(blocsmc);
  trmc[i5]=trace(blocsmc);
  print trmc;
end;

print "Estatistica do teste - razao dos determinantes";
print detmc;

print "Estatistica do teste - razao dos traços";
print trmc;

deltamc1=max(detmc)/min(detmc); /* * Razao dos Det. * */
deltamc3=max(trmc)/min(trmc); /* * Razao dos Det. ** */

print "Valores dos criterios";
print deltamc1 deltamc3;

print " ***** Def. dos Hiperparametros ***** ";

ni=5;
a=j(ncol(s),1,2);  b=0.9;
h=j(ncol(s),ncol(s),b);
do h0=1 to nrow(h);
  do h1=1 to ncol(h);
    if h[h0,h0]=h[h1,h1] then h[h0,h0]=4*h[h0,h0];
  end;
end;
nb=n*b;
v=ni+n;           /* *** Graus de Liberdade **** */
auxw=(vm-a)*t(vm-a);

print " ***** Inicio do Processo Bootstrap ***** ";

```

```

nwisboot=1000;
problb=0; probw1=0; prob3b=0; probw3=0;

do i4=1 to nwisboot;

  /* ***** Reamostrar para impor H0 - ***** */

  mboot=j(n,p*k,0);
  do b1=1 to n;
    do b2=1 to k;
      al=int(ranuni(0)*n)+1;
      kl=int(ranuni(0)*k)+1;
      kb=(b2-1)*p+1;
      auxb=(kl-1)*p+1;
      mboot[b1,kb:kb+p-1]=yest[al,auxb:auxb+p-1];
    end;
  end;

qwb=i(nrow(mboot))-1/nrow(mboot)
*j(nrow(mboot),nrow(mboot),1);

sstar=(t(mboot)*qwb*mboot);
w=sstar+h+((nb*auxw)/(n+b));
wi=inv(w);

do i5=1 to k;
  nlin=(i5-1)*p+1;
  blocswi=WI[nlin:nlin+p-1,nlin:nlin+p-1];
  blocsboot=sstar[nlin:nlin+p-1,nlin:nlin+p-1];
  detw[i5]=det(blocswi);
  trw[i5]=trace(blocswi);
  detboot[i5]=det(blocsboot);
  trboot[i5]=trace(blocsboot);
end;

*print blocswi; *print detw;
*print blocsboot; *print etboot;

deltaw1=max(detw)/min(detw);
deltab1=max(detboot)/min(detboot);
deltaw3=max(trw)/min(trw);
deltab3=max(trboot)/min(trboot);

if deltax1>deltamc1 then probw1=probw1+1;
if deltab1>deltamc1 then problb=problb+1;
if deltax3>deltamc3 then probw3=probw3+1;

```

```
        if deltab3>deltamc3 then prob3b=prob3b+1;
end;

print 'Prob. Teste Det. (1) Mat. Bootstap
      (2) Mat. Inf. Bayes.';

pvlboot=prob1b/nwisboot;
pvlw=probw1/nwisboot;
print pvlboot pvlw;

print 'Prob. Teste Traços (1) Mat. Bootstap
      (2) Mat. Inf. Bayes.';

pv3boot=prob3b/nwisboot;
pv3w=probw3/nwisboot;
print pv3boot pv3w;

run;
quit;
```