

**INTERVALOS DE TOLERÂNCIA APLICADOS  
EM UM PROGRAMA DE DIREÇÃO  
ECONÔMICA**

**ALESSANDRA QUERINO DA SILVA**

**2008**

**ALESSANDRA QUERINO DA SILVA**

**INTERVALOS DE TOLERÂNCIA APLICADOS EM UM PROGRAMA  
DE DIREÇÃO ECONÔMICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Doutor”.

Orientador

Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira

LAVRAS  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2008

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da UFLA**

Silva, Alessandra Querino da.

Intervalos de tolerância aplicados em um programa de direção econômica / Alessandra Querino da Silva. – Lavras : UFLA, 2008.  
93 p. : il.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2008.  
Orientador: Marcelo Silva de Oliveira.

**Bibliografia.**

1. Intervalos de tolerância. 2. Gestão da qualidade. 3. Economia de combustível. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.86

**ALESSANDRA QUERINO DA SILVA**

**INTERVALOS DE TOLERÂNCIA APLICADOS EM UM PROGRAMA  
DE DIREÇÃO ECONÔMICA**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para obtenção do título de “Doutor”.

APROVADA em 18 de abril de 2008.

|                                 |      |
|---------------------------------|------|
| Prof. Dr. João Domingos Scalon  | UFLA |
| Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves | UFLA |
| Prof. Dr. Marcelo Tavares       | UFU  |
| Profª. Dra. Thelma Sáfadi       | UFLA |

Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira  
UFLA  
(Orientador)

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tudo que tenho conquistado na vida.

Aos meus pais, que sempre me deram forças para que eu superasse todas as dificuldades.

Ao meu marido Luciano, pela compreensão, paciência e apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Silva de Oliveira, pela amizade, pelos conselhos e orientação em momentos decisivos do presente trabalho.

À Universidade Federal do Amazonas em especial, ao diretor Prof. Alecrim, e colegas do Instituto de Agricultura e Ambiente (IAA) pela liberação e apoio.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pela concessão de bolsa de estudo durante dois anos do curso.

Ao Prof. Joaquim Paulo da Silva, pelas trocas de idéias e pelos conselhos.

Aos membros da banca, pelas sugestões para melhorar o trabalho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Ciências Exatas da UFLA.

Aos meus colegas de curso pelo convívio e amizade.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste sonho.

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| RESUMO .....  | i  |
| ABSTRACT .....  | ii |
| 1 INTRODUÇÃO.....   | 1  |
| 2 REFERENCIAL TEÓRICO.....  | 5  |
| 2.1 Gestão da qualidade.....  | 5  |
| 2.2 Cálculo de probabilidades .....   | 15 |
| 2.2.1 Concepções de probabilidade.....  | 17 |
| 2.2.1.1 Probabilidade clássica .....  | 17 |
| 2.2.1.2 Probabilidade freqüentista ou empírica.....   | 19 |
| 2.2.1.3 Probabilidade subjetiva .....   | 21 |
| 2.2.1.4 Probabilidade lógica.....   | 24 |
| 2.2.1.5 Comparação entre probabilidades clássica, freqüentista, subjetiva<br>e lógica ..... | 25 |
| 2.2.2 Paradoxo de Bertrand .....  | 28 |
| 2.2.3 Teorema ergódico.....   | 34 |
| 2.3 Intervalos estatísticos .....   | 35 |
| 2.3.1 Intervalos de confiança.....  | 37 |
| 2.3.1.1 Interpretação do intervalo de confiança .....                                       | 43 |
| 2.3.2 Intervalos de predição .....  | 45 |
| 2.3.2.1 Interpretação do intervalo de predição .....  | 46 |
| 2.3.3 Intervalos de tolerância .....  | 47 |
| 2.3.3.1 Interpretação do intervalo de tolerância .....                                      | 51 |
| 2.3.4 Intervalos de credibilidade (ou intervalos de confiança bayesianos).....              | 51 |
| 2.3.4.1 Interpretação do intervalo de credibilidade .....                                   | 56 |
| 2.4 Articulações entre os intervalos estatísticos .....                                     | 56 |
| 3 MATERIAL E MÉTODOS.....   | 59 |
| 4 NOVAS PROPOSTAS.....  | 61 |
| 4.1 Programa de direção econômica.....  | 61 |
| 4.2 Expressão para o cálculo dos limites de tolerância .....                                | 67 |
| 4.3 Interpretação alternativa do intervalo de tolerância .....                              | 75 |
| 4.4 Aplicação do intervalo de tolerância no programa de direção<br>econômica.....           | 81 |
| 5 CONCLUSÃO.....  | 85 |
| 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....   | 86 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....  | 87 |
| ANEXO .....   | 91 |

## RESUMO

SILVA, Alessandra Querino da. **Intervalos de tolerância aplicados em um programa de direção econômica**. 2008. 93 p. Tese – (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, Minas Gerais, Brasil.\*

Neste trabalho, foi proposta a criação de um programa de direção econômica em uma empresa de transporte e logística, para combater o desperdício de combustível em sua frota de caminhões, utilizando intervalos de tolerância. Foi determinada uma nova expressão para calcular os limites de tolerância, utilizando apenas os dados amostrais, sem a necessidade de utilizar fatores de tolerância tabelados, conforme apresentados na literatura. Além disso, visando um melhor entendimento dos intervalos de tolerância foi apresentada uma interpretação alternativa para tais intervalos, fazendo uma mudança no espaço amostral. Para dar ao leitor a percepção da aplicação dos intervalos de tolerância no programa de direção econômica foram apresentados dois exemplos ilustrativos hipotéticos, com os dados obtidos por meio de simulação.

**Palavras-chave:** Intervalos de tolerância; gestão da qualidade; economia de combustível.

---

\* Orientador: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA.

## ABSTRACT

SILVA, Alessandra Querino da. **Tolerance intervals applied to an economical direction program.** 2008. 93 p. Thesis - (Doctorate in Statistics and Agricultural Experimentation) - Federal University of Lavras, Lavras, Minas Gerais, Brazil.\*

This work presents a proposal of creation of a Economical Direction Program for a company of transports and logistics, in order to decrease the waste of fuel in his fleet of lorries, using tolerance intervals. A new expression was determined to calculate the limits of tolerance using only the sample data, without the need of using controlled factors of tolerance, according to what is presented in the literature. Besides, aiming a better understanding of the tolerance intervals, an alternative interpretation was presented, changing in the sample space. To give the reader the perception of the application of the tolerance intervals in the Economical Direction Program two illustrative hypothetical examples were presented, through simulation.

**Key Words:** Tolerance intervals; quality management; economy of fuel.

---

\* Adviser: Marcelo Silva de Oliveira – UFLA.



## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a qualidade é um dos fatores importantes na decisão dos consumidores na seleção de produtos e serviços que competem entre si. O fenômeno é geral, independente do fato de o consumidor ser um indivíduo, uma organização industrial, uma loja ou um programa militar de defesa. Consequentemente, compreender e melhorar a qualidade são fatores chave que conduzem ao sucesso, ao crescimento e a um melhor posicionamento de competitividade de uma empresa. A melhor qualidade e o emprego bem sucedido da qualidade como parte integrante da estratégia geral da empresa produzem retorno substancial sobre o investimento (Montgomery, 2004).

Quando as empresas brasileiras despertaram para uma busca mais efetiva da competitividade, os programas da qualidade tiveram grande difusão em muitos setores e a busca da satisfação do cliente, associada à redução de custos, tornou-se um objetivo muito importante para as mesmas. A empresa que busca a competitividade deve passar por um processo de transformação para atingir ao mesmo tempo, produtividade e qualidade, com custo reduzido. No entanto, ela deve adotar programas de melhoria contínua.

Hoje, os métodos de melhoria da qualidade aplicam-se a qualquer área de uma companhia ou organização. Tais métodos são de grande importância, pois representam um conjunto de práticas disponíveis para uso no sistema de gestão da qualidade. À medida que surgem necessidades específicas nas diversas áreas de organizações, tais métodos são implantados, sendo, para o seu desenvolvimento, utilizadas ferramentas de gerenciamento e técnicas aplicadas na condução de equipes.

Dentre as respostas mais importantes das empresas a essas novas condições do ambiente econômico, além da importação de tecnologia, está a implantação de programas da qualidade. Seja pela necessidade de diminuir

defeitos e custos, seja pela necessidade de conquistar a fidelidade dos clientes, a adoção desses programas acontece em grande escala na indústria nacional (Carvalho & Toledo, 2002). Em especial, empresas de transporte e logística buscam certificações de sistemas de qualidade, tanto para a entrada em mercados reservados quanto para permanecerem no mercado. Este tipo de empresa será objeto de inspiração para a metodologia nesta tese e de aplicação ilustrativa.

A associação entre qualidade e custo constitui uma das principais sinergias observadas na gestão moderna das organizações. Tal ligação foi, por exemplo, a principal componente do chamado ‘milagre japonês’, observado atonitadamente pelo Ocidente na década de 1970 (Oliveira, 2000). Na presente tese, a economia de combustível pela gestão de direção econômica poderá levar a uma maior qualidade no serviço de transporte. Por exemplo, se o motorista dirige seu caminhão freando menos (que é uma prática da direção econômica), ocorrerá menor movimentação por inércia da carga transportada, que, para alguns tipos de produtos (frágeis), implicará em menores danos. Menores danos levarão à maior satisfação do cliente, isto é, à maior qualidade. Além disso, menos “quebras” (do caminhão) na estrada implicam em melhor atendimento de prazos de entrega, que também é qualidade.

Além disso, de acordo com Silveira et al. (2004), um dos maiores problemas econômicos atualmente vivenciados relaciona-se ao preço do petróleo e seus derivados, tão consumidos no mundo inteiro e de cujas importações tantos países dependem para sustentar o seu desenvolvimento. Portanto, a busca pelo seu domínio, comandada por grandes potências mundiais, é responsável pelas guerras ocasionadas nos últimos anos, com conseqüentes desequilíbrios na economia mundial e gravíssimos reflexos em nosso país, apesar de este necessitar da importação de apenas cerca de 10% do petróleo consumido. No Brasil, o setor de transporte é responsável por quase 50% do

consumo de derivados do petróleo, sendo o óleo diesel o principal combustível utilizado no transporte de cargas e passageiros. Não se esperam, nos próximos 20 anos, alternativas econômicas que, em larga escala, substituam este combustível no setor de transporte. Assim, aumentar a eficiência e a racionalização de seu uso é, acima de tudo, ação estratégica (Guimarães, 2007).

Como as medidas relacionadas aos crescentes aumentos do preço do combustível não sinalizam ter efeito a curto prazo, é fundamental atuar com medidas que envolvam o planejamento e o controle do consumo nas atividades que demandam quantidade elevada de combustível, como o transporte de cargas. O controle dos fatores que levam à eficiência do transporte é necessário para evitar situações em que o custo do combustível gasto em função, por exemplo, da distância percorrida, seja maior que o custo da carga transportada, o que, muitas vezes, pode acontecer, em grande parte, devido à impossibilidade de aplicação de uma estratégia adequada, que é contornada pelo lucro que se obtém no produto agregado (Silveira et al., 2004).

Hoje, existe grande preocupação, por parte de várias empresas de transporte, por exemplo, a Rios Unidos, a Auto Viação Vera Cruz, a Viação Mauá, entre outras, em utilizar combustível de maneira racional, inclusive para controlar a emissão de poluentes. Com isso, a empresa reduz desperdícios, aumentando a sua lucratividade e a população, em geral, ganha com a preservação da qualidade do ar (Economizar..., 2007).

O problema de pesquisa desta tese é dividido em:

a) criar uma interpretação frequentista alternativa para os intervalos de tolerância que poderão ser utilizados no sistema de direção econômica de uma empresa de transporte e logística, para combater o desperdício de combustível em sua frota de caminhões;

b) propor uma nova maneira de calcular os fatores de tolerância;

c) propor um esquema básico para a estrutura que implementará o programa de direção econômica da empresa, baseada em conceitos da gestão da qualidade.

O presente trabalho foi realizado com o objetivo de apresentar solução para os três problemas de pesquisa, valendo-se de:

a) um estudo aprofundado da importância do espaço amostral no cálculo de probabilidades;

b) um estudo que busca relacionar intervalos de tolerância, intervalos de predição e intervalos de confiança;

c) um estudo que procura utilizar os conceitos de *Just in Time* e as dimensões da qualidade de Garvin (1992).

Além deste, que é o capítulo introdutório, a presente tese está estruturada em mais três capítulos. No capítulo 2, é apresentado um referencial teórico para atender aos propósitos deste trabalho. O capítulo 3 refere-se a material e métodos. No capítulo 4, são apresentadas as novas propostas. O capítulo 5 apresenta a conclusão do trabalho e, no capítulo 6, algumas considerações finais.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

Este capítulo faz uma revisão de literatura sobre gestão da qualidade e cálculo de probabilidades, estruturando o referencial teórico que sustentará os propósitos desta tese. Esta revisão será desenvolvida tendo em vista o embasamento do referencial teórico sobre o conceito de intervalos estatísticos, conceito este que necessita de uma compreensão adequada das interpretações da probabilidade e, em especial, dos espaços amostrais, tratados adequadamente pela axiomática de Kolmogorov (1956).

### **2.1 Gestão da qualidade**

Um programa de direção econômica vai além do impacto nos custos da organização. Tal programa também impacta na qualidade dos serviços da empresa de transporte. Esta ligação entre custo e qualidade não é surpreendente na teoria da gestão da qualidade, sendo, antes, um resultado já bastante conhecido e estudado (Oliveira, 2000). Para deixar mais claro como a qualidade pode ser obtida num programa de direção econômica, podem-se discernir as dimensões da qualidade, conforme originalmente proposto por Garvin (1992), veja Quadro 1.

O programa de direção econômica, segundo as dimensões da qualidade de Garvin (1992), impacta em:

- a) confiabilidade - se o transporte quebra o produto, então falhou;
- b) conformidade – entregas no prazo;
- c) qualidade percebida – cliente satisfeito indica a transportadora para outras pessoas.

QUADRO 1 Dimensões para a qualidade, segundo Garvin (1992)

| <b>Dimensões</b>    | <b>Definição</b>  |
|---------------------|---|
| Desempenho          | Características fundamentais de um produto.   |
| Características     | Características secundárias de um produto, seus adereços que suplementam as características fundamentais. A distinção entre o que é fundamental e o que é secundário é função subjetiva do usuário. |
| Confiabilidade      | Reflete a probabilidade de mau funcionamento de um produto ou de falhas num determinado período.  |
| Durabilidade        | Medida da vida útil do produto. Há duas dimensões: técnica e econômica.   |
| Conformidade        | É o grau em que o projeto e as características operacionais de um produto estão de acordo com padrões pré-estabelecidos.  |
| Atendimento         | Algumas variações associadas com a qualidade do atendimento podem ser objetivamente medidas; já outras são subjetivas.  |
| Estética            | São percepções dos cinco sentidos mais o “agrado” que eles produzem.  |
| Qualidade percebida | São as percepções indiretas de qualidade, não a própria qualidade. Propaganda e reputação, principalmente.  |

Fonte: Oliveira (2000)

A gestão da qualidade deixou de ser um diferencial competitivo e uma ferramenta de marketing para ser uma premissa mundial cada vez mais disputada no mundo dos negócios. Aplicado a qualquer tipo de empresa, independente de seu porte, ramo de atividade ou posicionamento de mercado, certamente agregará valores que, devidamente monitorados, proporcionarão novas oportunidades de negócios e grande margem competitiva (Pedrinho, 2005).

Segundo Pedrinho (2005), o sucesso empresarial não depende somente dos recursos materiais e das novas tecnologias, mas está fortemente ligado ao desenvolvimento humano. As organizações, hoje, precisam de profissionais. Para

isso, precisam investir na capacitação de pessoas comprometidas, criativas, e que não tenham medo de sugerir e de mudar, na busca do melhor resultado. É o melhor meio que o empresário tem para atingir a qualidade de seus produtos ou serviços, e melhorar sua competitividade.

Empresa, firma e companhia podem ser sinônimos e representar uma mesma idéia: organização na qual uma ou mais pessoas investem capital para gerar e comercializar produtos e serviços, com o objetivo de satisfazer a uma necessidade de mercado, ocorrendo, simultaneamente, lucro para o empresário (Jatobá, 2004). O controle adequado de custos está, cada vez mais, sendo necessário nas empresas. Antes, seria importante definir custos, que são todas as despesas tangíveis e intangíveis, classificadas de acordo com um critério lógico, para a obtenção de um bem ou de um serviço. Chamam-se tangíveis aquelas despesas que podem ser medidas, tais como mercadorias, mão-de-obra, e intangíveis, as que não podem ser medidas, tais como gastos com a falta de energia elétrica e mudanças climáticas (Jatobá, 2004).

O funcionamento de uma empresa está em relação direta com os custos. A atividade econômica, para ser realizada, supõe muitas despesas, tais como mão-de-obra, matéria-prima, máquinas e equipamentos, impostos e taxas. Se não forem alocadas corretamente todas as despesas no custo total de um produto ou serviço, a empresa poderá não atingir seus objetivos.

Para reduzir custos, a empresa deve adotar práticas da qualidade. As práticas da qualidade trazem aumento na lucratividade por meio de satisfação do cliente, retenção de clientes, redução nos gastos básicos e maior capacidade para trabalho. Portanto, para prosperar no clima econômico de hoje, as organizações devem estar dedicadas à melhoria contínua. Devem buscar constantemente maneiras mais eficientes de produzir mercadorias e de prestar serviços. Deve-se enfocar o cliente, tanto interno como externo, e fazer de sua satisfação o essencial do negócio. Para realizar isto, todos, nas organizações, devem estar

comprometidos com a melhoria e com o uso de métodos eficazes. Existem vários métodos empregados na melhoria contínua, porém, aqui será descrito apenas o *Just in Time* (JIT), pois, neste trabalho, será proposto um programa de economia de combustível, que deve tratar o problema em tempo real, isto é, no momento e local do abastecimento do veículo, o que é considerado um sistema JIT. A seguir, será descrita a filosofia do sistema *Just in Time*.

O *Just in Time* (JIT) é um modelo de gestão da produção, em que os insumos são fornecidos apenas no momento em que serão processados. Este sistema veio substituir o *Just in Case*, no qual grandes quantidades de materiais e produtos ficavam estocados para estarem disponíveis quando fossem necessários ao processo produtivo. O principal objetivo do JIT é a diminuição dos estoques e a conseqüente redução de custos, pois, com ele, tornam-se necessários menos área disponibilizada e menor capital empatado.

A produção baseada no JIT é puxada (*pull system*). Isso significa que um produto só é fabricado quando é feito um pedido de compra por parte do cliente. É desencadeada, então, uma reação em cadeia para trás, que vai até a requisição dos insumos necessários à produção junto aos fornecedores. Ao contrário, no sistema de empurrar (*push system*), os produtos são fabricados e, depois, vão para um estoque, no qual aguardam até serem vendidos ou entrarem em uma etapa seguinte de processamento.

O sistema *Just in Time* é uma filosofia de administração da manufatura, surgida no Japão, nos meados da década de 1960, tendo a sua idéia básica e seu desenvolvimento creditados à Toyota Motor Company. Por isso também é conhecido como o “Sistema Toyota de Produção”. O idealista desse sistema foi o vice-presidente da empresa, Taiichi Ohno. O JIT é uma metodologia desenvolvida com base nas pessoas, enfoque de logística e com o objetivo de eliminar ou reduzir desperdícios nos processos de produção (eliminar tudo que não adiciona



valor ao produto ou serviço) e, conseqüentemente, aumentar a produtividade (Prazeres, 1996).

Prazeres (1996) define que o JIT, basicamente, significa produzir o necessário, quando necessário e na quantidade necessária. Com um sistema JIT, pode-se reduzir o tempo de preparação de equipamentos, as quebras de máquinas podem ser prevenidas, os operadores podem se especializar em várias funções, os relacionamentos com os fornecedores e clientes podem ser substancialmente alterados e os projetos de produtos ou serviços podem ser modificados. Esse autor relata, ainda, que o JIT incorpora cinco elementos: comprometimento das pessoas, eliminação das perdas, qualidade, melhorias contínuas (*kaizen*) e manutenção (em sentido amplo, incluindo os padrões de todos os aspectos da empresa).

O JIT visa atender à demanda instantaneamente, com qualidade perfeita e sem desperdício, isto é, quantidade necessária de componentes na qualidade correta, no momento e nos locais corretos, utilizando o mínimo de instalações, equipamentos, materiais e recursos humanos, concentrando-se em reduzir ineficiências e tempo improdutivo, a fim de aperfeiçoar continuamente o processo e a qualidade dos produtos fabricados ou dos serviços prestados. Para isso, são essenciais o envolvimento dos funcionários e a redução de atividades que não agregam valor.

Segundo Slack et al. (1997), JIT significa produzir bens e serviços exatamente no momento em que são necessários – não antes para que não se transformem em estoque, e não depois para que seus clientes não tenham que esperar. Para Ortolani (2002), o princípio do JIT consiste na disponibilização do elemento (material, componente, produto) no momento em que ele é necessário, no processo produtivo ou nos canais de distribuição e venda. Pressupõe forte integração da empresa – internamente – e com seus parceiros – externamente – a montante e a jusante da produção. Há forte dependência das informações e previsões de venda e do transporte de materiais.

A justificativa central para a produção *Just in Time* é a de que os baixos níveis de estoque por ela gerados não só economizam investimento mas também têm um significativo impacto na habilidade da produção de aprimorar sua eficiência intrínseca (Slack et al., 1997).

A meta do JIT é desenvolver um sistema que permita a um fabricante ter somente os materiais, equipamentos e pessoas necessários a cada tarefa. Para se conseguir esta meta, é preciso, na maioria dos casos, trabalhar sobre seis objetivos básicos:

- a) integrar e otimizar cada etapa do processo;
- b) produzir produtos de qualidade;
- c) reduzir os custos de produção;
- d) produzir somente em função da demanda;
- e) desenvolver flexibilidade de produção.
- f) manter os compromissos assumidos com clientes e fornecedores.

Conforme Ritzman & Krajewski (2004), o foco dos sistemas JIT reside na melhoria do processo; portanto, alguns dos seus conceitos são úteis para fabricantes ou prestadores de serviços. Esses conceitos incluem os principais elementos (aspectos):

- a) método de puxar para administrar o fluxo de materiais, isto é, a demanda do cliente ativa a produção do item. Permite maior controle de inventário e de produção nas estações de trabalho;
- b) qualidade alta e consistente: o sistema JIT controla a qualidade na fonte, com funcionários atuando como seus próprios inspetores de qualidade;
- c) lotes de pequeno tamanho: reduzem o estoque cíclico, diminuindo o tempo e o espaço envolvido na fabricação e na manutenção do estoque. Ajudam a obter uma carga uniforme do sistema operacional;

- d) cargas uniformes das estações de trabalho: podem ser obtidas montando o mesmo tipo e número de unidades a cada dia, criando, desse modo, uma demanda de área uniforme em todas as estações de trabalho, permitindo, assim, desenvolver o plano mestre de produção mensal;
- e) componentes padronizados e métodos de trabalho: a produtividade tende a aumentar porque os funcionários aprendem a realizar tarefas de modo mais eficiente. A padronização de componentes e de métodos de trabalho ajuda a cumprir os objetivos de produtividade elevada e estoque reduzido;
- f) relações próximas com os fornecedores: redução do número de fornecedores, utilização de fornecedores locais e melhoria das relações com os fornecedores. Os fornecedores são considerados como parceiros em uma sociedade na qual ambas as partes possuam interesse em manter um relacionamento de longo prazo e lucrativo;
- g) força de trabalho flexível: trabalhadores podem ser treinados para executar mais de uma tarefa, alguma rotatividade alivia o tédio e revigora os trabalhadores;
- h) fluxos em linha: técnicas de arranjo físico podem ser utilizadas para promover um fluxo suave de materiais, de dados e de pessoas na operação. Fluxo é um importante conceito no JIT. Os princípios de arranjo físico que o JIT particularmente recomenda são: situar postos de trabalhos próximos uns dos outros; situar postos de trabalho de modo que todo o conjunto de postos que fazem determinado componente estejam visíveis uns aos outros; usar linhas em forma de U e adotar arranjo físico celular. Dessa forma, busca-se um fluxo contínuo;
- i) produção automatizada: a automação desempenha grande papel no sistema JIT, sendo fundamental para a obtenção de operações de baixo custo;

j) manutenção preventiva: a manutenção preventiva pode reduzir a frequência e a duração do tempo de parada. Outra tática consiste em tornar os funcionários responsáveis por manter rotineiramente seu próprio equipamento e desenvolver o orgulho dos colaboradores por manterem suas máquinas em excelentes condições. Ao encontro desse objetivo está a manutenção produtiva total (TPM) que visa eliminar a variabilidade em processos de produção, a qual é causada pelo efeito de quebras não planejadas. Serviços altamente dependentes de maquinário fazem bom uso da manutenção preventiva rotineira. Por exemplo, empresas de transporte precisam ter veículos confiáveis para o transporte de cargas, além de motoristas qualificados.

Os sistemas tradicionais de manufatura buscam sua eficiência na alta utilização de capacidade das linhas de produção. Para isso, propõem a criação de estoques entre os vários estágios do processo, de forma que qualquer problema em determinado estágio fique restrito apenas neste. Cabe ao pessoal que trabalha no setor a solução do problema, ou seja, os estoques “isolam” o problema, fazendo com que ele não seja sentido pelo resto do sistema.

Em contrapartida, o JIT propõe a eliminação dos estoques (estoque zero), considerados “dinheiro parado”, além de também mascarar os problemas, pois, trabalhando sem estoque, qualquer problema em qualquer estágio será logo sentido por todo o sistema, cabendo a todos a solução deste. Promove-se, assim, o constante aprimoramento da produção.

Com isso, verifica-se que estoques são considerados dispendiosos, arriscados e mascaram problemas, agravando-os em vez de solucioná-los.

A maior desvantagem deste sistema é a que decorre de incertezas na envolvente da empresa. Se algo não funcionar bem, tudo pode ficar parado. Por isso, algumas empresas, além de um sistema de *Just in Time*, mantêm também

algum estoque de segurança que permitirá evitar perdas no caso de problemas com os fornecedores.

Alguns exemplos de programas criados para gerar economia de combustível em empresas de transporte e logística serão citados a seguir.

Atualmente, várias empresas de transportes adotam um programa para gerar economia de combustível, como, por exemplo, a Rios Unidos, a Auto Viação Vera Cruz e a Viação Mauá, entre outras, para que possam utilizar combustível de maneira racional, reduzindo desperdícios, aumentando sua lucratividade e ganhando em qualidade. A seguir, serão citados alguns exemplos de programas adotados para economizar combustível.

O Programa Motorista Econômico Mauá já proporcionou à Viação Mauá a média de 7% em economia de combustível, entre janeiro de 2004, quando foi lançado e janeiro de 2005. O Programa tem como base a premiação dos motoristas com os mais baixos índices de consumo de combustível. O Programa Motorista Econômico Mauá funciona da seguinte forma: todo mês, os 80 motoristas que registram os menores índices de consumo são premiados com uma cesta básica especial, além daquela já fornecida a todos os funcionários. Já os 80 profissionais com os resultados mais baixos passam por treinamento de reciclagem. A cada semestre, os 30 melhores naquele período são premiados e os dez primeiros colocados recebem os prêmios de valores mais altos, chamados de “superprêmios” (Economizar..., 2007).

O programa de economia de óleo diesel, criado pela Auto Viação Vera Cruz (empresa do Rio de Janeiro) há três anos, tem gerado economia superior a 20% em relação a resultados anteriores. Segundo o gerente de operações da empresa, o programa não rendeu apenas redução no consumo de combustível, mas também levou à diminuição no número de acidentes e de multas de trânsito, no desgaste de pneus e de peças e, principalmente, gerou maior tranquilidade e motoristas menos estressados, melhorando a qualidade de vida dos colaboradores.

O trabalho desenvolvido pela Vera Cruz com seus motoristas baseia-se em metas e supermetas para cada tipo de veículo. Inicialmente, foram criados selos de três cores: verde, indicando que o veículo encontrava-se acima da média; amarelo, dentro da média, mas abaixo da meta e vermelho, abaixo da média. Mensalmente, os profissionais que conquistavam o selo verde eram premiados com uma cesta de alimentos e participavam do sorteio de uma televisão. Já os que recebiam o vermelho eram convocados para reuniões, visando ao aperfeiçoamento. Os veículos de selo vermelho passavam por nova avaliação da manutenção.

Menos de seis meses após o lançamento da campanha, 70% da frota recebe o selo verde. Foram criados, então, o selo dourado e as supermetas. A empresa passou a premiar todos os motoristas “dourados” com um prêmio especial, além da cesta de alimentos e de sua participação no sorteio do superprêmio, que passou a variar entre televisores, refrigeradores, DVD, etc. Houve uma verdadeira revolução, uma mudança cultural dentro da Vera Cruz, pois o que era inicialmente uma meta passou a ser um comportamento da maioria dos motoristas. “Desde a sua implantação, o Programa tem gerado resultados surpreendentes, superando todos os objetivos iniciais. Prova disso é a criação dos selos dourado e diamante. Hoje, nossos profissionais são melhores que há três anos”, afirma o gerente de operações (Economizar..., 2007).

Já a empresa Rios Unidos Logística e Transporte de Aço Ltda., transportadora rodoviária de carga do Sistema de Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais (Sistema Usiminas), obteve, em 2005, uma economia de combustível correspondente a 482.250 litros/ano. A transportadora passou a investir na busca de melhorias nos processos envolvidos com consumo de combustível, como o gerenciamento de pneus e o plano de manutenção de veículos. Para avaliar o consumo de diesel, a Rios Unidos implantou uma tecnologia de monitoramento on-line diário do gasto da frota com combustível. Se ele for alto, há um levantamento de motivos, uma reunião com o motorista para esclarecer a situação

e conscientizá-lo e, em seguida, o veículo é levado para a manutenção. Essas informações são documentadas e arquivadas. Atualmente, a empresa é vencedora do Prêmio Nacional de Conservação e Uso Racional de Combustível, na categoria transporte de carga.

Para ajudar a entender como ocorre o processo de desperdício de combustível, Silveira et al. (2004) analisaram o efeito dos parâmetros marcha lenta, excesso de rotação do motor para valores superiores a 2.000 rpm, pontos neutros e velocidades superiores a 80km/h, com o objetivo de monitorar o consumo de veículos de transporte rodoviário de duas transportadoras de madeira (A e B), com base nas informações obtidas de um computador de bordo instalado no cavalo-mecânico LS2638 da Mercedes-Bens (maiores detalhes veja Silveira et al., 2004). Os autores concluíram que:

- a) a marcha lenta foi responsável pelo maior desperdício de combustível no transporte de madeira, seguida do ponto neutro e do excesso de rotação;
- b) no transporte de madeira é possível reduzir drasticamente o desperdício de combustível causado pelo uso de marcha lenta, se houver racionalização do tempo de espera;
- c) o uso de ponto neutro (“banguela”) e do excesso de velocidade nos veículos não economiza combustível, mas compromete a segurança;
- d) a falta de treinamento dos motoristas contribui para o aumento do consumo de combustível.

## **2.2 Cálculo de probabilidades**

A Teoria de Probabilidades é baseada na construção axiomática de Kolmogorov (1956). A razão para a apresentação desta axiomatização, nesta tese, deve-se ao fato de que, assim procedendo, a centralidade e a importância do

conceito de espaço amostral ficarão patentes. Deve-se lembrar que, para a solução do problema da Central de Direção Econômica, é imperiosa a explicitação desta dependência conceitual.

O cálculo de probabilidades moderno é o ramo da matemática e da estatística que fornece estrutura conceitual orgânica para a construção de métodos e modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. A seguir, serão introduzidos conceitos que permitem um estudo mais detalhado dos experimentos aleatórios.

Definição 1: um experimento (ou fenômeno) é determinístico quando, repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que são repetidos sob as mesmas condições e que produzem resultados diferentes são chamados de experimentos aleatórios.

Definição 2: suponha que um experimento aleatório seja realizado sob certas condições fixas. Define-se o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório como espaço amostral e é denotado por  $\Omega$ . Os elementos  $\omega \in \Omega$  são chamados pontos ou elementos amostrais. Qualquer subconjunto  $A \subset \Omega$  será chamado evento. Os eventos da forma  $\{\omega\}$  são chamados eventos elementares, isto é, um conjunto com um único ponto amostral (elemento).

Nota:  $\Omega$  é chamado de evento certo e  $\emptyset$  é chamado de evento impossível.

Para James (2002), o importante é que  $\Omega$  contenha todos os resultados possíveis do experimento. Por isso, deve-se supor:

- a) a todo resultado possível corresponde um, e somente um, ponto  $\omega \in \Omega$ ;
- b) resultados distintos correspondem a pontos distintos em  $\Omega$ , isto é,  $\omega$  não pode representar mais de um resultado.



### **2.2.1 Concepções de probabilidade**

Aqui serão apresentadas algumas das concepções de probabilidades correntes na literatura, tais como: clássica, frequentista, subjetiva e lógica. Apesar de esta tese utilizar apenas a interpretação frequentista, serão apresentadas as interpretações subjetiva, clássica e lógica, por causa da sua importância histórica, conceitual e educativa. As controvérsias envolvendo as diferentes perspectivas de qualificar e quantificar a probabilidade tem promovido interpretações diferentes, tanto referentes ao seu significado quanto ao seu campo de aplicação. A complexidade conceitual envolvendo este termo dificulta, no contexto educativo, a introdução de uma interpretação homogênea e universal do conceito de probabilidade.

#### **2.2.1.1 Probabilidade clássica**

As primeiras tentativas de atribuir probabilidades a eventos (todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento) aleatórios surgem na Idade Média. Os jogos de dados já eram praticados desde antes da era cristã, mas não há menção sobre cálculos associados a chances de ocorrência de resultados dos lançamentos. É na Idade Média, com Galileu, que se encontra, pela primeira vez, o conceito de eventos “igualmente prováveis” (Dantas, 2000).

A definição clássica de probabilidade baseia-se no conceito de eventos igualmente prováveis (com a mesma chance de ocorrência). Também considera-se um experimento com número finito de eventos simples (cada resultado do espaço amostral). Se um experimento aleatório pode resultar em  $n$  resultados mutuamente exclusivos e equiprováveis e se  $n_A$  destes resultados possuem o atributo  $A$ , então, a probabilidade (clássica) de acontecer  $A$  é a fração  $n_A/n$  (Mood et al., 1974).

Definição 3: seja A um evento do espaço amostral  $\Omega$ , ou seja, todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Define-se probabilidade de um evento A (subconjunto do espaço amostral),  $P(A)$ , como:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos em A}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Esta é a definição clássica de probabilidade quando  $\Omega$  é finito e baseia-se no conceito de resultados equiprováveis, ou seja, todos os resultados de um experimento têm a mesma chance de serem escolhidos.

Utilizando essa definição, muitos problemas são resolvidos por meio de técnicas de análise combinatória e contagem. Se o número de elementos de  $\Omega$  for infinito, é preciso tratar a definição acima com o uso de limites (Magalhães, 2006). Se  $\Omega$  não for enumerável, o conceito se aplicará ao comprimento de intervalos, medida de áreas ou similares, dando origem ao que é chamado de probabilidade geométrica. Por exemplo, alguns problemas de probabilidades são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em apreço, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume (Tunala, 1992).

Os jogos de azar baseados em dados, moedas, extração de bolas em urnas, etc., enquadram-se nesta perspectiva teórica, por tratar de fenômenos cuja variável é discreta (aquelas referentes a contagem) e porque se supõe ser sempre possível selecionar, como espaço amostral, um conjunto de sucessos elementares que garantam a equiprobabilidade (Carvalho & Oliveira, 2006).

A característica de equiprobabilidade é garantida também pela estratégia de utilizar simetrias físicas ou de outro tipo nas situações-problema, para supor que nenhum dos resultados possíveis tenha maior vantagem que os restantes e que, portanto, pode-se designar a mesma probabilidade. Ao lançar um dado

“honesto”, a simetria “garante” que nenhuma face se distingue das demais. Isto é tomado como argumento para aceitar a igualdade de probabilidade de cada resultado e chegar à definição de Laplace, que permite assegurar a probabilidade de  $1/6$  para cada uma das possíveis faces. Uma vez determinadas as probabilidades elementares, é possível calcular a probabilidade de sucessos mais complexos, como, por exemplo, obter a soma sete no lançamento de dois dados.

### 2.2.1.2 Probabilidade freqüentista ou empírica

Outra forma de abordar a probabilidade de um evento consiste em repetir-se um experimento aleatório  $n$  vezes e anotar quantas vezes o evento  $A$  associado a esse experimento ocorreu.

Considere  $n_A$  o número de vezes que o evento  $A$  ocorreu nas  $n$  repetições do experimento. Então, o quociente entre  $n_A/n$  é denominado freqüência relativa de  $A$  nas  $n$  repetições do experimento, fazendo com que esta definição intitule-se “frequentista” (ou, por alguns, “empírica”).

Repetindo-se o experimento um grande número de vezes, nas mesmas condições, e de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se, empiricamente, que a freqüência relativa de ocorrências do evento  $A$  tende a uma constante  $p_A$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = p_A$  (Mises, 1964).

A teoria frequentista foi defendida por Richard von Mises, a partir da obra *Probability, statistics and truth*.

A atribuição de valores à função de probabilidade, quando estamos em espaços amostrais finitos, não foi problemática:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos em } A}{\text{número de resultados possíveis de } \Omega}$$

em que  $A$  é um evento, isto é, um subconjunto de  $\Omega$ .

Quando se trata de espaços amostrais infinitos, as definições acima perderam a adequação, pelo nível prático.

A proposta de Mises (1964) é uma maneira única de calcular probabilidades, tanto em espaços amostrais finitos quanto infinitos (também não depende de hipóteses de simetria e a probabilidade do evento é dada pela realidade).

A definição freqüentista de probabilidade baseia-se na experiência da estabilidade da freqüência relativa de ocorrência de eventos, quando se realizam muitas repetições do experimento (James, 2002), teor prático do teorema conhecido como Lei dos Grandes Números. Algumas vezes, autores se referem a esta estabilidade como uma decorrência do “long run” de repetições do experimento.

As definições apresentadas acima têm apelo da intuição e permanecem sendo usadas para resolver inúmeros problemas. Entretanto, elas não são suficientes para resolver todos os problemas. Por exemplo, elas não são suficientes para uma formulação matemática mais rigorosa da probabilidade. Por causa disso é que o matemático russo Kolmogorov apresentou um conjunto de axiomas matemáticos para definir probabilidade, permitindo incluir as definições anteriores como casos particulares (Magalhães, 2006).

Kolmogorov (1956) propõe uma maneira de “tratar a probabilidade”, de um ponto de vista axiomático. Mas, seus axiomas não mostram como atribuir valores à probabilidade: partem do princípio de que “se sabe” atribuir estes valores e constroem uma teoria para calcular probabilidades de eventos mais complexos. Atribuir valores à probabilidade é um problema estatístico e a teoria de probabilidades trabalha assumindo que o problema de atribuição já foi resolvido.

Segundo Dantas (2000), a estabilidade da freqüência relativa, para um grande número de observações, foi inicialmente notada em dados demográficos e

em resultados de lançamento de dados. Buffon, no século XVIII, realizou 4.040 lançamentos de uma moeda e observou a ocorrência de 2.048 caras. A frequência relativa observada foi 0,5064. Karl Pearson fez 24.000 lançamentos de uma moeda, tendo obtido a frequência relativa de 0,5005 para caras, ou seja, muito próxima de  $1/2$ . Estes experimentos exemplificam que quanto maior o número de repetições, maior a proximidade entre a probabilidade “a posteriori” (calculada com base na realização de um experimento) e a probabilidade “a priori” (obtida a partir de dados teóricos, sem a manipulação experimental). Em particular, no experimento da moeda, na perspectiva clássica, a probabilidade tomada a priori assume valor  $1/2$ , para cada um de seus possíveis resultados.

Por outro lado, exemplifica-se também que não é possível avaliar com precisão a probabilidade porque o número de ensaios é sempre limitado, apesar de poder contar com a Lei dos Grandes Números. O conhecimento científico que se adquire a partir das experiências empíricas é sempre limitado, pois as conclusões necessitam ser mais amplas que aquelas que obtemos pela observação. Toda experiência é obtida via uma amostra e a idéia de amostra tem, em si, duas características fundamentais e contraditórias: representatividade e variabilidade. A representatividade é referente à amostra parecer-se, de certo modo, à população e está associada à qualidade da amostragem. Por outro lado, a variabilidade indica que uma amostra deve ser diferente de outra.

### **2.2.1.3 Probabilidade subjetiva**

Em muitas situações, em que não é aplicável o conceito clássico de probabilidade e em que a experiência aleatória não é repetível em condições similares um grande número de vezes, por isso também não sendo viável a aplicação do conceito frequentista de probabilidade, continua-se a falar de probabilidade, interpretada em termos de um grau de credibilidade que, subjetivamente, se atribui à ocorrência de um determinado acontecimento.

Uma maneira de motivar o conceito de probabilidade subjetiva é de apontar aquelas situações nas quais alguma forma de previsão seja bem evidente. Por exemplo, o inventor de um novo brinquedo pode atribuir ao brinquedo uma probabilidade de sucesso bastante diferente daquela atribuída pelo presidente da firma que está considerando a hipótese de negociar o brinquedo. Outro exemplo poderia ser visto quando se deseja calcular a probabilidade de um evento que possa ocorrer quando o motorista A, dirigindo o caminhão X, faz o trajeto Y uma única vez, probabilidade está que é decididamente não freqüentista, já que esta configuração ocorre uma única vez.

Generalizando, define-se probabilidade subjetiva como uma medida do grau de confiança de uma pessoa em relação a uma proposição (O'Hagan, 1994). Entende-se por proposição o enunciar da ocorrência de algum acontecimento ou, numa perspectiva mais ampla, como um conjunto de afirmações sobre a situação, não necessariamente repetível, em análise (Paulino et al., 2003) ou, ainda, como toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou em falsa (Iezzi & Murakami, 2001). Trata-se de medir a confiança que um indivíduo expressa sobre a veracidade de um fenômeno, levando em conta sua própria experiência ou conhecimento sobre o tema da situação em estudo. Neste caso, diferentes pessoas podem atribuir diferentes valores de probabilidade para um mesmo evento.

A definição de probabilidade subjetiva é sempre associada a indivíduos (Cordani, 2001). Esse autor cita, ainda, que a probabilidade atribuída a um evento por um indivíduo é revelada por meio do quanto ele está disposto a apostar naquele evento, isto é, é uma medida do quanto aquele particular indivíduo quer, ou acredita, na realização daquele evento.

Para Paulino et al. (2003), uma probabilidade subjetiva é uma medida de um grau de crença pessoal, específico do indivíduo. Como tal, pode variar de indivíduo para indivíduo, até porque a informação que cada um possui é, rigorosamente falando, diferenciada. Sendo assim, este conceito não acomoda a

idéia de um dado volume de informação associado a um grau de crença único. A probabilidade subjetiva apresenta pontos fracos, no sentido em que está sujeita ao erro humano inerente, além de não oferecer uma base objetiva para se chegar a uma avaliação comum entre pesquisadores (Degroot, 1989). A probabilidade subjetiva é especialmente útil para se tomar decisões nas quais a probabilidade de eventos não pode ser determinada empiricamente. A idéia desta utilidade é de que, apesar da subjetividade inerente, pessoas, principalmente especialistas, tenham alguma idéia razoavelmente precisa a respeito de algumas probabilidades.

Embora, nem sempre admitida pelos pesquisadores, a subjetividade está sempre presente na atividade de pesquisa. A escolha de determinado projeto e a maneira de conduzi-lo, analisá-lo e interpretar os dados são determinadas por uma flexibilidade de opções, em que o fator humano é decisivo. A subjetividade, mesmo que indesejável, como integrante do método científico, é válida, desde que não seja vista como algo desvinculado do objeto de estudo, mas como um critério cuidadoso de utilização de informações passadas.

Segundo Portugal (2004), a grande crítica à teoria subjetiva da probabilidade é a de que ela não consegue exprimir um traço fundamental do raciocínio científico: a objetividade. Como compatibilizar a objetividade científica com a idéia de que a estimativa da probabilidade prévia de uma hipótese é feita com base no grau de crença pessoal do cientista? A resposta mais comum dos subjetivistas (aqueles que advogam tal postura e prática) é a de que o elemento subjetivo da probabilidade prévia tende a desaparecer à medida que a hipótese vai sendo confrontada com os dados relevantes, respeitando-se a regra do condicionamento. Ainda conforme Portugal (2004), segundo os subjetivistas, quanto mais dados forem referidos à hipótese H, mais nossa probabilidade prévia para H se aproximará de seu valor consensual ou objetivo. Desse modo, por meio da atualização de crenças à luz de resultados e observações empíricas, diferentes indivíduos que estimam diferentes probabilidades prévias para uma dada hipótese

gradualmente se aproximam de uma convergência, a probabilidade objetiva daquele evento.

Para melhor entender essa definição de probabilidade, citam-se alguns exemplos de afirmações que traduzem probabilidades subjetivas:

a) a probabilidade de o Futebol Clube de Lavras ganhar o próximo jogo com o Ribeirão Vermelho Clube é de 60%;

b) a probabilidade de a umidade do ar baixar em 08/05/2008 é de 70%;

c) a probabilidade de o caminhão entregar a carga no tempo previsto amanhã é alta.

Estas afirmações podem ser meras especulações pessoais ou podem resultar de modelos baseados em certas hipóteses mais ou menos subjetivas (por exemplo, um modelo de comportamento da bolsa, sendo que as previsões probabilísticas dele decorrentes dependem da validade das hipóteses de modelação subjetivamente consideradas).

#### **2.2.1.4 Probabilidade lógica**

Para Portugal (2004), a teoria lógica da probabilidade preconiza que se pode atribuir probabilidade a uma hipótese vista como uma proposição, ou sistema de proposições, as quais guardem relação lógica com outro sistema de enunciados, as proposições fatuais, que podem confirmá-la ou não. Trata-se de uma relação *a priori* e atemporal, que não se modifica com a experiência ou o curso do tempo, pois refere-se aos elementos sintáticos e semânticos de proposições determinadas. Assim, se é avaliado que, a partir da base de dados acessíveis agora, a probabilidade do sujeito *S* votar no partido *x* na próxima eleição é de 10%, dados posteriores (mesmo com a descoberta de que *S* de fato votou em outro partido) não afetam o valor daquela atribuição de probabilidade, que se deu àquelas relações lógicas entre as proposições envolvidas. Isso é assim, pois se trata de uma relação entre dois conjuntos de enunciados e não da



probabilidade de um evento, ou seja, não era simplesmente a probabilidade de  $S$  votar ou não no partido  $x$  o que estava em questão, mas a probabilidade de  $S$  votar em  $x$ , dado um conjunto de informações  $k$  relevante sobre a questão (Portugal, 2004).

Segundo Paulino et al. (2003), esta definição lógica ou “necessária”, ligadas aos nomes de Keynes, Jeffreys e Carnap, defende que a probabilidade representa uma relação lógica entre uma proposição ou conjuntos de proposições - a evidência - e outra proposição - a hipótese - medindo o grau de implicação (grau de confirmação, para Carnap) da hipótese pela evidência. O grau de implicação é único, racional e impessoal. No entanto, sendo de difícil medição, torna tal definição pouco operacional, exceto em alguns casos extremos: se a evidência arrasta a falsidade da hipótese, esta tem probabilidade igual a zero; se arrasta a veracidade da hipótese, esta tem probabilidade igual a um. Corroborando com esta idéia, Cordani (2001) afirma que probabilidade lógica é uma opinião racional sobre uma proposição baseada no conhecimento de outra proposição. Dificilmente é possível estabelecer um valor numérico para cada opinião individual, mas é possível comparar pares de opiniões. No entanto, não oferece regras para o cômputo das probabilidades, nem para as comparações entre elas.

#### **2.2.1.5 Comparação entre probabilidades clássica, freqüentista, subjetiva e lógica**

Convém ressaltar que definir probabilidade não é uma tarefa fácil. Nesta seção, busca-se fazer uma comparação entre as diversas escolas de pensamento, porém, é necessário frisar que, independentemente de como a probabilidade é filosoficamente definida, seu tratamento matemático é basicamente o mesmo em qualquer escola.

O Quadro 2 refere-se às probabilidades discutidas anteriormente e suas respectivas bases.

QUADRO 2 As bases das probabilidades

| <b>Probabilidade</b> | <b>Bases</b>   |
|----------------------|--|
| Clássica             | Considerações de simetria: resultados igualmente prováveis     |
| Freqüentista         | Freqüências relativas em situações repetíveis                  |
| Subjetiva            | Avaliação individual de comportamento racional ou coerente     |
| Lógica               | Grau-de-crença intrínseco como uma medida lógica de implicação |

Fonte: Barnett (1982)

Conforme Paulino et al. (2003), em oposição à definição de probabilidade subjetiva, o conceito lógico de probabilidade, ao representar uma medida de um grau de implicação de uma proposição pela informação disponível, traduzindo assim um grau de crença objetivo (isto é, não pessoal), que todo o indivíduo racional necessariamente deve possuir, já partilha daquela característica de unicidade (“aquilo que é único”). Este conceito estende o argumento da lógica tradicional ao pretender quantificar o grau intermediário de implicação da proposição pela afirmação existente, quando esta não permite concluir pela veracidade absoluta ou pela falsidade absoluta daquela. Em outras palavras: a lógica tradicional diz “sim” ou “não”, “certo” ou “errado”, “verdadeiro” ou “falso”, enquanto esta lógica probabilística diz “falso”, “mais ou menos falso”, “mais ou menos verdadeiro”, “verdadeiro”. Modernamente, este tipo de lógica é denominado “fuzzy” ou “nebulosa”.

Conforme Cordani (2001), Savage (1972) procurou distinguir três classes de definições de probabilidades, que apresentam alguma semelhança com as descritas anteriormente:

- a) objetivista: a evidência da concordância entre o comportamento de um evento repetitivo e o conceito matemático de repetições independentes e com mesma probabilidade será obtida tão somente pela observação de

algumas repetições do evento, e não de outras fontes, quaisquer que elas sejam;

- b) personalista: a probabilidade mede a confiança que determinado indivíduo tem na verdade de uma proposição;
- c) necessária: a probabilidade mede o quanto um conjunto de proposições (fora da opinião pessoal) confirma a verdade de outro, no sentido da lógica formal.

Os conceitos subjetivo e lógico de probabilidades têm em comum a característica de representarem graus de crença, condicionados à informação disponível, numa proposição.

Numa análise que busca chegar ao âmago da questão sobre as diferentes definições e interpretações de probabilidade, pode-se, então, distinguir entre definição de probabilidade e cálculo de probabilidade: quaisquer que sejam as definições ou interpretações adotadas para o conceito de probabilidade (as quatro apresentadas aqui, clássica, freqüentista, subjetiva ou lógica, ou outras quaisquer, ou a classificação tripartida alternativa de Savage (1972), a saber, objetivista, personalista ou necessária), todas elas deságuam na necessidade de considerar a ocorrência de um evento. Ora, esta ocorrência, necessariamente, é tratada por contagem, ou melhor, por uma quantificação da freqüência (relativa) de ocorrência. Em outras palavras, probabilidade, qualquer que seja seu entendimento, deve implicar em unicamente freqüência de ocorrência. Tem-se, assim, que a definição (e também a interpretação) do conceito de probabilidade fica, por força de sua consideração prática, presa na cela solitária da definição como freqüência relativa de ocorrência em infinitas repetições do fenômeno.

Tem-se, portanto, que a definição (e interpretação) freqüentista (ou objetivista, segundo Savage (1972)) é a correta. Que se pode dizer, então, das outras? Ora, uma análise mais profunda mostrará que as outras “definições” de probabilidade (clássica, subjetiva, lógica, personalista, ou necessária, ou outras

ainda) são, nada mais nada menos, do que métodos diferentes para se quantificar a probabilidade, alternativamente à quantificação definidora de frequência relativa de ocorrência. Assim, o que se está dizendo é que a única maneira, a princípio, de se quantificar uma probabilidade seria a frequência relativa no “long run”. Porém, por questões de viabilidade (ou mesmo possibilidade) prática, pode-se, alternativamente, por considerações a priori, de ordem teórica, quantificar-se pelos outros métodos descritos acima.

### **2.2.2 Paradoxo de Bertrand**

A formulação de Kolmogorov (1956) para o cálculo de probabilidades torna os cálculos completamente dependentes do espaço amostral definido para o experimento. Um exemplo ilustrativo desta dependência, que mostra claramente essa situação, é o paradoxo de Bertrand. Por meio deste paradoxo, esta tese materializará claramente como esta dependência se manifesta. Tal paradoxo apresenta três resultados distintos, para o mesmo problema. A solução deste paradoxo consiste em observar que há uma mudança apenas do espaço amostral em consideração. A seguir citam-se o problema do paradoxo de Bertrand e suas três soluções distintas.

O problema do paradoxo de Bertrand é formulado da seguinte forma: uma corda é escolhida ao acaso em um círculo  $C$  unitário. Qual a probabilidade de que o comprimento de uma corda desse círculo seja maior do que o comprimento do lado do triângulo equilátero inscrito no círculo? Tal problema é ilustrado na Figura 1.

Este problema apresenta três interpretações diferentes e são apresentadas três soluções para este problema. A solução obtida para este paradoxo é estabelecida quando se define o espaço de probabilidade cuidadosamente. Apesar de ser conhecido como um paradoxo, trata-se apenas de diferentes escolhas do espaço de probabilidade. Em todas as interpretações, os elementos são

equiprováveis, mas, como os espaços de probabilidades são diferentes, produzem respostas diferentes.

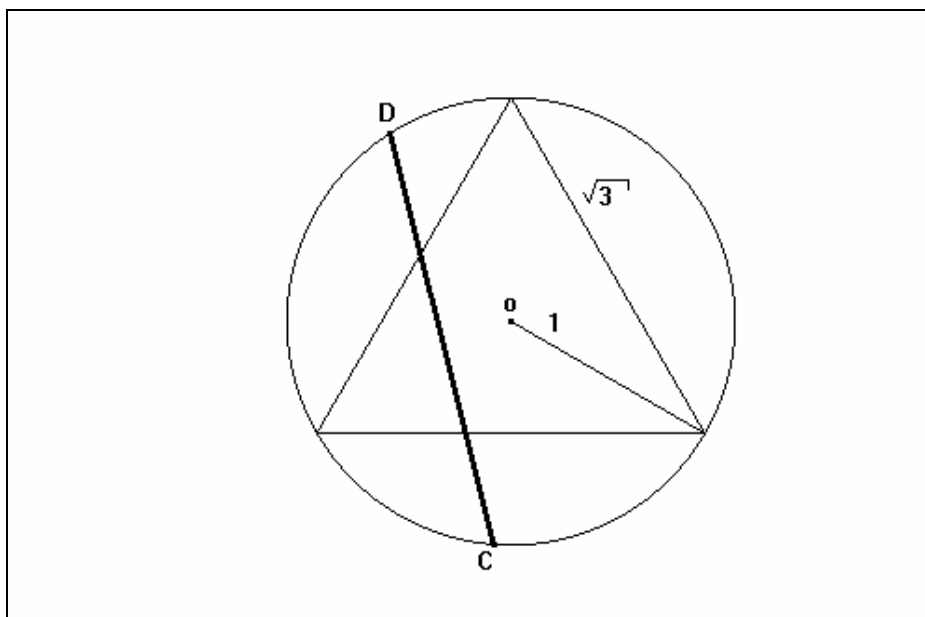


FIGURA 1 Paradoxo de Bertrand.

Há três espaços amostrais diferentes porque há três experimentos diferentes:

### **Interpretação 1**

Num círculo unitário, o triângulo equilátero inscrito tem lado igual a  $\sqrt{3}$ .

Desde que o comprimento da corda é unicamente determinado pela posição do seu ponto médio, escolha um ponto P aleatoriamente no círculo de raio 1 e trace uma linha de P ao centro O do círculo. Trace a corda por P perpendicular à OP. Se l é o comprimento da corda, com P sendo o ponto médio, então,  $l > \sqrt{3}$  se e somente se P estiver dentro do círculo com centro em O e raio 1/2.

Escolhe-se, aleatoriamente, um ponto  $P$  dentro do círculo, ligando-o ao centro por meio de um segmento de reta. A corda é traçada nesse ponto de forma a ser perpendicular ao segmento, conforme a Figura 2.

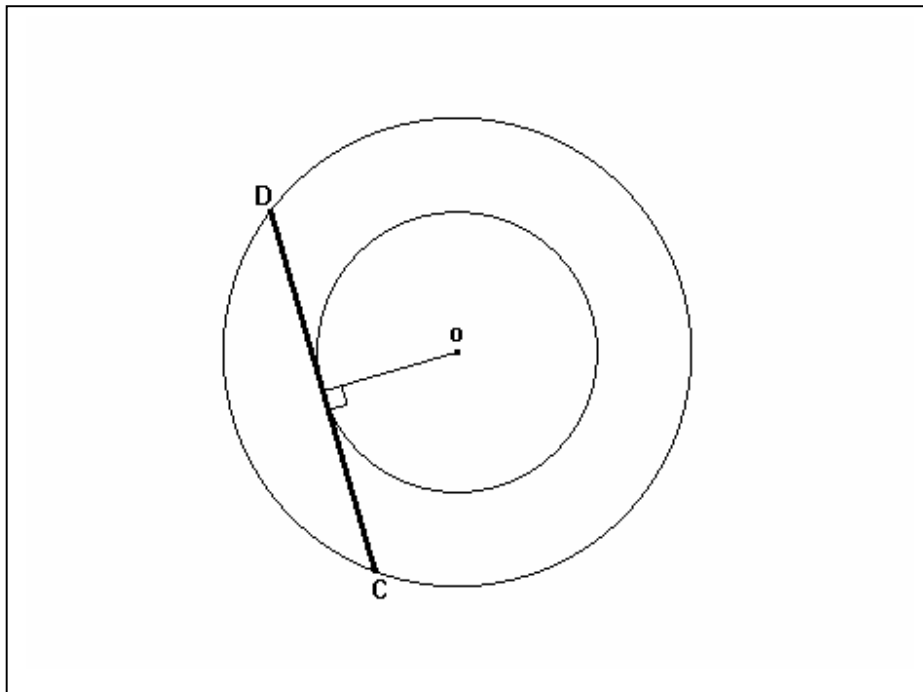


FIGURA 2 Primeira interpretação do paradoxo de Bertrand

Para essa interpretação, considera-se o espaço amostral  $\Omega$  como o círculo unitário e  $\mathbb{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra constituída de modo a incluir todos os subconjuntos de  $\Omega$ , cuja área esteja definida. Para todo  $A \in \mathbb{A}$ , define-se  $P(A)$  como sendo o quociente entre a área de  $A$  e a área do círculo unitário. A região que produzirá as cordas desejadas é o círculo inscrito no triângulo, de mesmo centro e raio  $\frac{1}{2}$ . Logo, a probabilidade de interesse será:

$$P$$

$$P(A) = P(\text{cordas maiores que } \sqrt{3}) = \frac{\text{área círculo (O, 1/2)}}{\text{área círculo (O, 1)}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Na interpretação 1, o espaço amostral é o conjunto de todas as cordas possíveis numa circunferência. É a generalização da interpretação 2 para todos os raios da circunferência. Aqui, a probabilidade de que o ponto médio de uma corda caia em uma determinada região só depende da área dessa região e não de sua localização no círculo.

Neste caso,  $\Omega$  é o círculo com centro O e raio  $r = 1$ , e o evento A é o círculo concêntrico com  $r = 1/2$ .

### **Interpretação 2**

Para a obtenção da corda, escolha um ponto ao acaso em um dos raios e, por esse ponto, trace uma perpendicular. O particular raio utilizado é irrelevante e o procedimento aleatório é equivalente a sortear um ponto ao acaso num segmento  $[0,1]$  (Magalhães, 2006). O tamanho da corda é unicamente determinado pela distância entre o centro do círculo e o ponto médio da corda.

Aqui, o espaço amostral é o conjunto de todas as cordas perpendiculares a um diâmetro fixo e escolhem-se aquelas que são de comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero. Aqui, a probabilidade de que a corda escolhida caia em um determinado intervalo só depende do comprimento do intervalo e não de sua posição no segmento. Para produzir os tamanhos desejados de corda, o ponto escolhido precisa estar no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ , conforme Figura 3.

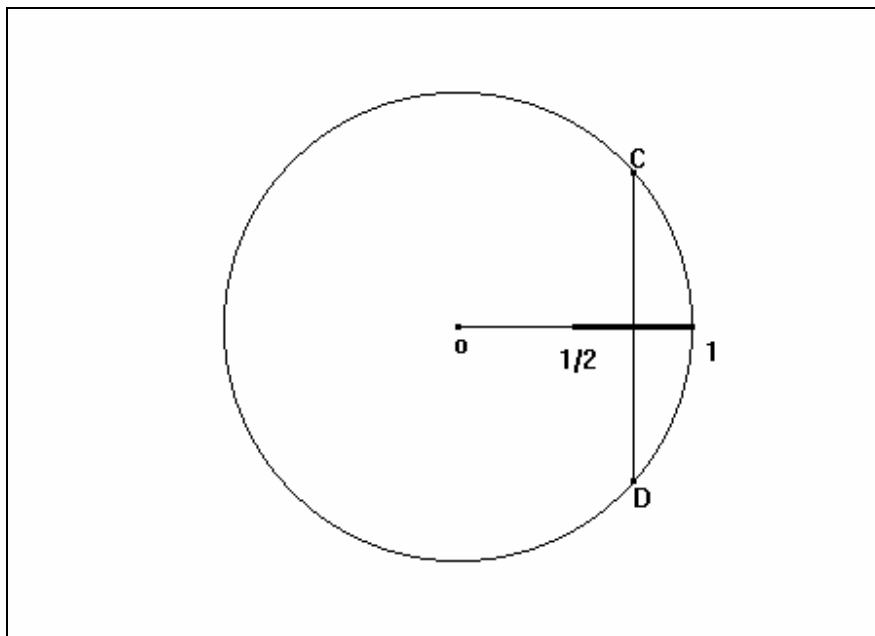


FIGURA 3 Segunda interpretação do paradoxo de Bertrand

Por este raciocínio,  $P(A) = P(\text{cordas maiores que } \sqrt{3}) = \text{comprimento do intervalo } [0, 1/2] = \frac{1}{2}$ .

### Interpretação 3

Seleciona-se, aleatoriamente, um ponto C qualquer, com um ponto D fixo do círculo. C e D determinam unicamente uma corda.

Por causa da simetria, pode-se fixar um ponto final da corda em algum ponto C e, então, escolher aleatoriamente o outro ponto D do círculo.

O triângulo equilátero inscrito tendo C como um dos vértices divide a circunferência em 3 partes iguais. As cordas traçadas por C serão maiores do que o lado do triângulo equilátero se o outro ponto D da corda estiver sobre o arco que



é um terço da circunferência que é oposto a C (veja Figura 4). Segue-se que a desejada probabilidade é  $1/3$ , ou seja,  $P(A) = P(\text{cordas maiores que } \sqrt{3}) = 1/3$ .

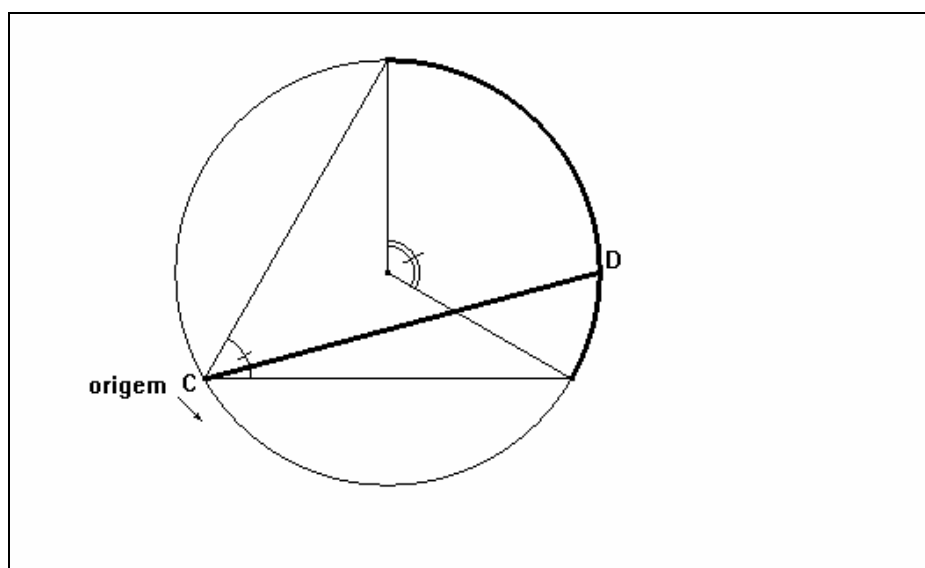


FIGURA 4 Terceira interpretação do paradoxo de Bertrand

Na interpretação 3, o espaço amostral é o conjunto de todas as cordas com uma extremidade em C e outra, em cada ponto da circunferência. Aqui, a probabilidade de que a corda escolhida caia em um determinado arco só depende do comprimento do arco e não de sua posição na circunferência.

Essas três interpretações refletem as diferentes interpretações dadas à frase “escolhida ao acaso”. Para estabelecer qual delas é a resposta correta, é necessário tornar mais precisa a pergunta, para evitar ambigüidade na interpretação. Uma forma de fazer isso seria definir o espaço de probabilidade na formulação do problema.

Agora, o teorema ergódico será estudado em função da interpretação alternativa dos intervalos estatísticos que será proposta na gestão de direção econômica. O teorema ergódico será o elo de ligação entre a interpretação tradicional, baseada no espaço amostral do experimento e a interpretação alternativa (proposta nesta tese) baseada no espaço amostral do analista.

### 2.2.3 Teorema ergódico

Antes de enunciar o teorema ergódico, será definido o que é processo estocástico.

Definição 4 (Processo estocástico): Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas em um conjunto  $A$ ,  $\{X(s), s \in A\}$ . Considere o caso em que  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^p$ , portanto, as variáveis aleatórias estão indexadas por  $p$ -índices  $\{X(s), s \in A \subset \mathbb{R}^p\}$  (Papoulis, 1965).

Alguns exemplos de processos estocásticos:

- 1) Séries temporais: o conjunto de índices é o tempo  $t$   $\{X(t): t \in \mathbb{R}\}$ .
- 2)  $\{X(n): t \in \mathbb{N}\}$  é um processo indexado pelos números naturais, por exemplo,  $n$  é o tempo e  $X(n)$  é a quantidade de combustível consumida no intervalo  $[n-1, n]$ .
- 3) Processos espaciais:  $\{X((u, v)), (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$  onde, por exemplo,  $X(u, v)$  mede a temperatura de uma placa plana no ponto  $(u, v)$ .

Sob condições de regularidade é possível definir a integral de  $X(t)$ , no seguinte sentido: todas as variáveis aleatórias  $X(t)$  estão definidas no mesmo espaço amostral. Fixando um evento  $\omega$ ,  $X(t)(\omega)$  define uma função de variável real  $(t)$  e valores reais  $x(t)(\omega)$ . Tal função pode ser integrada,  $\int_a^b X(t)(\omega)dt$ .

Define-se então a variável aleatória  $\int_a^b X(t)dt$  de forma que  $\omega$  é um evento, então  $\left(\int_a^b X(t)dt\right)(\omega) = \int_a^b X(t)(\omega)dt$ .

Agora, pode-se definir a variável aleatória tempo médio por  $\eta_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)dt$ .

Definição 5: Um processo estocástico é dito estacionário se  $E[X(t)] = \eta$ , sendo  $\eta$  constante.

Para processos estocásticos estacionários, sob condições de regularidade  $\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(X(t)) = 0\right)$ , que não são muito restritivas, vale o seguinte Teorema.

Teorema (Ergódico):  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T X(t)dt = E[X(t)] = \eta$  (Papoulis, 1965).

### 2.3 Intervalos estatísticos

Considere uma variável aleatória  $X$  descrita por certo modelo probabilístico  $f(x; \theta)$ , com parâmetro  $\theta$  desconhecido ( $\theta$  pode ser um escalar ou um vetor). Um dos interesses do pesquisador é obter algum tipo de informação acerca desses parâmetros de  $f(x; \theta)$ . O que ele dispõe é de uma amostra, ou seja, parte dos elementos de uma população. A partir dessa amostra é possível obter aproximações para o(s) parâmetro(s) de  $f(x; \theta)$ : esse processo é definido como estimação.

Dado o contexto acima, a princípio, serão revisados os conceitos de amostra aleatória, estatística, estimador, estimativa e estimação, os quais são fundamentais para o melhor entendimento desta seção.

Definição 6: amostra Aleatória (a.a) é um conjunto de  $n$  variáveis aleatórias,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , independentes entre si, com mesma distribuição  $f(x; \theta)$ .

Definição 7: uma estatística é uma função da a. a,  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , que é, ela própria, variável aleatória.

Definição 8: estimação é o processo de obtenção de valores (quantificação) que possam ser considerados como substitutos dos parâmetros associados à distribuição  $f(x; \theta)$ .

Definição 9: estimativa é o valor numérico obtido pela estimação (com base em dados amostrais, para parâmetros).

Definição 10: estimador é a função que permite a geração de estimativas, construída ou definida na estimação.

Basicamente, existem dois processos de estimação. O primeiro deles é chamado de estimação pontual, pela qual um único valor numérico é obtido, por meio de um estimador, como uma quantificação aproximada para o parâmetro  $\theta$ . Este processo é considerado incompleto, no sentido de que não expressa a confiança que se possa ter acerca da maior ou menor diferença entre a estimativa de  $\theta$ , e o valor real desconhecido, de  $\theta$ . Portanto, a chamada estimação por intervalo foi idealizada para procurar suprir essa necessidade. Na estimação por intervalo, além de um valor numérico aproximado para  $\theta$ , também é obtida uma margem de erro para esta estimação, dentro de um coeficiente de confiança adotado.

Conforme é o lugar comum na apresentação dos métodos estatísticos (ver, por exemplo, Hahn & Meeker, 1991), quando se tenta retirar conclusões sobre a

população por meio de uma amostra aleatória selecionada apropriadamente, intervalos estatísticos desempenham papel central na quantificação da incerteza e fornecem importante suplemento na estimativa pontual.

Assim, a associação entre estimativas pontuais sobre  $\theta$  e o conhecimento de intervalos estatísticos possibilitará promover uma inferência informativa a respeito do modelo probabilístico  $f(x; \theta)$ .

Vários intervalos estatísticos podem ser construídos por meio de uma amostra aleatória. Aqui serão estudados intervalos de confiança, intervalos de tolerância, intervalos de predição e intervalos de credibilidade, em função de suas utilidades para a gestão de direção econômica.

### **2.3.1 Intervalos de confiança**

A estimação pontual fornece informação limitada a respeito do parâmetro  $\theta$ , associado a um modelo de distribuição  $f(x; \theta)$ . A inferência pode ser complementada, sempre que possível, com quantificações acerca de probabilidades de  $\theta$  estarem próximos ou não de suas estimativas por ponto (um único valor). Isso pode ser feito mediante a construção de intervalos, com probabilidades conhecidas de que o valor do parâmetro esteja ali contido. Estes intervalos para  $\theta$  são chamados de intervalos de confiança.

Suponha que alguém esteja interessado em determinar um dado parâmetro populacional  $\theta$  qualquer, desconhecido, de uma população. Pode-se estimar o parâmetro  $\theta$  dispondo-se de informações extraídas de uma amostra aleatória da população em estudo. Como já dito, o número único que representa o valor mais plausível do parâmetro, com base em dados amostrais, será denominado estimativa pontual de  $\theta$ . Entretanto, tal valor estimado, na maior parte das vezes, não será exatamente igual ao verdadeiro valor de  $\theta$ . Então, surge a necessidade de encontrar um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro baseado nos dados

amostrais, que contenha o verdadeiro valor do parâmetro. Tal intervalo é chamado de estimativa intervalar para  $\theta$ , ou intervalo de confiança para  $\theta$ .

Para Hahn & Meeker (1991), intervalos de confiança quantificam o conhecimento, ou a falta dele, sobre um parâmetro ou alguma característica de uma população, baseada em uma amostra aleatória. Por exemplo, um intervalo de 95% de confiança que afirma que a vida média de uma particular marca de lâmpada está compreendida entre 800 a 900 horas é consideravelmente mais informativo do que uma simples informação de que a vida média é de, aproximadamente, 850 horas.

Uma definição formal de intervalo de confiança é dada por Mood et al. (1974): seja  $(X_1, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória de uma variável aleatória  $X$  existente em uma população descrita por  $f(x; \theta)$ . Sejam  $T_1 = t_1(X_1, \dots, X_n)$  e  $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$  duas estatísticas satisfazendo  $T_1 \leq T_2$ . Para  $P_\theta(T_1 < \tau(\theta) < T_2) = \gamma$ , em que  $\gamma$  é o coeficiente de confiança e não depende de  $\theta$ , o intervalo aleatório  $[T_1, T_2]$  é chamado de intervalo de  $100\gamma\%$  confiança para  $\tau(\theta)$ ;  $T_1$  e  $T_2$  são denominados de limites inferior e superior, respectivamente, para  $\tau(\theta)$ . Nesta tese, será considerado  $\tau(\theta) = \theta$ .

Portanto, o intervalo de confiança é dado por dois limites numéricos,  $T_1$  e  $T_2$ , entre os quais supõe-se estar o verdadeiro parâmetro, com um coeficiente  $\gamma$  especificado. Então, valores dentro do intervalo  $[T_1, T_2]$  seriam melhores estimativas de  $\theta$  do que valores fora do intervalo.

Agora, se  $[T_1, T_2]$  é um intervalo de confiança para  $\tau(\theta)$  com um coeficiente  $\gamma$ , espera-se encontrar, ou estar confiante em encontrar,  $\tau(\theta)$  no intervalo, em cerca de  $\gamma$  das vezes que o experimento for realizado, que é a interpretação padrão, tradicional, freqüentista, do intervalo de confiança. Ou seja,  $\gamma$  será a probabilidade de obter um intervalo que inclua o valor exato e desconhecido do parâmetro. Por exemplo, se se escolhe  $\gamma = 95\%$ , espera-se que

cerca de 95% das amostras que possam ser obtidas forneçam intervalos que incluem o valor de  $\tau(\theta)$ , enquanto os restantes 5% não incluem.

O intervalo de confiança também pode ser unilateral, quando houver interesse em apenas um dos limites do intervalo. Assim, se  $T_1$  é tal que  $P_{\theta}(\tau(\theta) \leq T_1) = \gamma$ , então,  $T_1$  é o limite superior de um intervalo de confiança unilateral. Por outro lado, se  $T_1$  é tal que  $P_{\theta}(\tau(\theta) \geq T_1) = \gamma$ , trata-se do limite inferior de um intervalo de confiança unilateral.

A construção de intervalos de confiança consiste no problema da obtenção de  $T_1$  e  $T_2$ .

O coeficiente de confiança é escolhido a priori e dependerá do grau de confiabilidade com que se deseja obter a precisão da estimativa, sendo os coeficientes de confiança mais comuns os que correspondem a 90%, 95% ou 99%. Quanto maior o coeficiente de confiança exigido para o intervalo, menor será a precisão deste. Podem-se obter intervalos de confiança para médias, proporções, diferenças entre médias, diferenças entre proporções, etc. Porém, aqui serão explorados apenas intervalos para médias no contexto Normal, isto é,  $\theta = \mu$ .

Basicamente, os intervalos de confiança podem ser construídos utilizando-se a distribuição de quantidades pivotais ou de estatísticas. Porém, aqui será descrita apenas a construção em relação a quantidades pivotais. Para tanto, é necessário apresentar alguns resultados que serão úteis.

Em qualquer momento em que a média amostral  $\bar{X}$  for usada como estimativa pontual para uma média populacional  $\mu$ , surge a seguinte pergunta: a estimativa é boa? Esta pergunta gera discussões a respeito do erro envolvido no uso dessa estimativa.

De acordo com Anderson et al. (2003), o valor absoluto da diferença entre um estimador pontual sem viés (viés é a diferença entre o verdadeiro valor do parâmetro e o valor esperado do estimador) e o parâmetro da população que ele estima é chamado de erro de amostragem, ou precisão. Para o caso da média

amostral estimando a média populacional, ele considera que o erro de amostragem, denotado por  $E$ , é dado por  $E = |\bar{X} - \mu|$ .

Na prática, o valor do erro de amostragem não pode ser determinado porque a média da população, geralmente, é desconhecida. No entanto, a distribuição de amostragem de  $\bar{X}$  pode ser usada para se obter aproximações do erro cometido.

Inicialmente, considere que  $\bar{X}$  é a média amostral de uma amostra aleatória  $(X_1, \dots, X_n)$  de uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , isto é,  $X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Então:

$$\bar{X} \sim N(\mu; \sigma^2/n) \text{ (Mood et al., 1974).} \quad (1)$$

Entretanto, muitas vezes, não se têm informações a respeito da distribuição de variáveis da amostra, o que poderia impedir a utilização deste resultado (Magalhães & Lima, 2002). Felizmente, pode-se mostrar que, para um tamanho de amostra suficientemente grande, a distribuição de probabilidade da média amostral pode ser aproximada por uma distribuição normal. Este fato é conhecido como o Teorema Central do Limite.

Mood et al. (1974) enunciaram uma das formas do Teorema Central do Limite: suponha uma amostra aleatória de  $n$  observações, retirada de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , porém, não necessariamente normal. Denotando-se sua média por  $\bar{X}$ , tem-se que:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1). \quad (2)$$

Segundo Magalhães & Lima (2002), estudos envolvendo simulações mostram que, em muitos casos, valores de  $n$  próximos de 30 já fornecem aproximações boas para as aplicações práticas. O Teorema Central do Limite permite que se utilize a distribuição Normal para estudar  $\bar{X}$  probabilisticamente, mesmo que



aproximadamente. Porém, nesta tese será considerado apenas o caso normal, isto é,  $\bar{X} \sim N(\mu; \sigma^2/n)$ .

### **Intervalos de confiança para média**

Aqui será descrita a construção de intervalos de confiança por meio de quantidades pivotaís, que é um conceito importante para a elaboração de tais intervalos. A seguir serão apresentadas a definição de quantidade pivotal e a construção de intervalos utilizando tais quantidades.

Definição 11: sejam  $(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mathbf{X}$  uma amostra aleatória de uma família de distribuição  $f(\mathbf{X}; \theta)$ . Uma variável aleatória  $Q(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = Q(\mathbf{X}; \theta)$  é dita ser uma quantidade pivotal para o parâmetro  $\theta$  se sua distribuição for independente de  $\theta$ .

Nota-se que uma quantidade pivotal não é uma estatística, pois ela depende do parâmetro  $\theta$  desconhecido. Pode-se, então, para cada  $\gamma = 1 - \alpha$  fixado, encontrar  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  na distribuição de  $Q(\mathbf{X}; \theta)$  de modo que  $P[\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}; \theta) \leq \lambda_2] = \gamma$  (Bolfarine & Sandoval (2001)).

A distribuição de  $Q(\mathbf{X}; \theta)$  é independente de  $\theta$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  também não depende de  $\theta$ . Além disso, se para cada  $\mathbf{X}$  existirem  $t_1(\mathbf{X})$  e  $t_2(\mathbf{X})$ , tais que  $\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}; \theta) \leq \lambda_2$  se e somente se  $t_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq t_2(\mathbf{X})$  e, então, de  $P[\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}; \theta) \leq \lambda_2] = \gamma$ , tem-se que:

$$P[t_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq t_2(\mathbf{X})] = \gamma \quad (3)$$

de modo que  $[t_1(\mathbf{X}); t_2(\mathbf{X})]$  é um intervalo aleatório que contém  $\theta$ , com probabilidade ou coeficiente de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$ .

É importante lembrar que, na maioria dos casos, existem infinitos pares  $(\lambda_1, \lambda_2)$  satisfazendo  $P[\lambda_1 \leq Q(\mathbf{X}; \theta) \leq \lambda_2] = \gamma$ . Então, sempre que possível, deve-se escolher  $(\lambda_1, \lambda_2)$  que produza o intervalo de menor comprimento. Tal

procedimento é facilitado em situações em que a distribuição de  $Q(X; \theta)$  é simétrica, como no caso da distribuição normal (Bolfarine & Sandoval, 2001).

A construção de intervalos de confiança para a média de populações normais com variância desconhecida é descrita a seguir.

Em situações reais, é pouco provável que a variância  $\sigma^2$  seja conhecida. Assim, retira-se uma amostra aleatória  $(X_1, \dots, X_n)$  de uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . A partir da amostra, obtêm-se a média amostral  $\bar{X}$  e a variância amostral  $S^2$ .

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n) = X$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , isto é,  $X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assumindo  $\sigma^2$  desconhecido, uma quantidade pivotal para  $\mu$  é dada por:

$$Q(X; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)} \quad (4)$$

que tem distribuição t-Student com  $n - 1$  graus de liberdade, que não depende do parâmetro  $\mu$  (Mood et al., 1974). Então, dado o coeficiente de confiança  $\gamma$ , determinam-se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de modo que satisfaçam

$$P[\lambda_1 \leq Q(X; \mu) \leq \lambda_2] = \gamma \quad (5)$$

Substituindo-se a quantidade pivotal  $Q(X; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$  em (5), obtém-se

$$P\left[\lambda_1 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq \lambda_2\right] = \gamma \Leftrightarrow P\left[\bar{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = \gamma. \quad (6)$$

Assim, pode-se dizer que  $\left[\bar{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$  é um intervalo de  $100\gamma\%$  de confiança para  $\mu$ . Mas, como determinar  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ?

Como citado anteriormente, existem infinitos pares  $(\lambda_1, \lambda_2)$  que satisfazem (6). Como a distribuição da quantidade pivotal  $T$  é a distribuição t de Student, que

é simétrica, o intervalo de menor comprimento é aquele em que a área à direita de  $\lambda_2$  é igual à área à esquerda de  $\lambda_1$ , que é igual a  $\alpha/2$ , ou seja,  $\lambda_1 = -t_{(\alpha/2; n-1)}$  e  $\lambda_2 = t_{(\alpha/2; n-1)}$ , sendo  $P(T \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ , com  $T \sim t_{(\alpha/2; n-1)}$ , conforme mostrado na Figura 5.

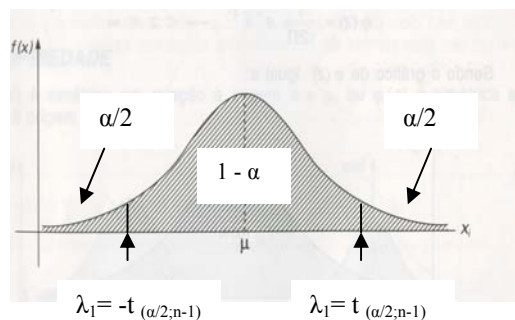


FIGURA 5 Gráfico da distribuição t de Student

Portanto, o intervalo de confiança para  $\mu$  de menor comprimento é dado

$$\text{por } \left[ \bar{X} - t_{(\alpha/2; n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{(\alpha/2; n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

Observe que o espaço amostral considerado é o do experimento, por meio da amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

### 2.3.1.1 Interpretação do intervalo de confiança

O intervalo  $[T_1, T_2]$  é um intervalo de confiança para  $\theta$ , com coeficiente de confiança  $\gamma = 1 - \alpha$ . Se a probabilidade do intervalo cobrir o parâmetro  $\theta$ , não importa qual  $\theta$  seja, é de pelo menos  $1 - \alpha$ . A interpretação desta afirmação é a seguinte: escolha e fixe  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Considere um experimento que consista em selecionar uma amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de uma família de distribuições  $f(\mathbf{X}; \theta)$ . Suponha que este experimento seja repetido um grande número de vezes

independentemente e, em cada vez, calcula-se o intervalo  $[T_1, T_2]$  com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$ .

Apesar de o intervalo variar de amostra para amostra, a probabilidade de que a afirmação  $[T_1, T_2]$  inclui o  $\theta$  seja verdadeira é de, aproximadamente (pelo menos),  $1 - \alpha$ .

Ao final da construção de  $n$  intervalos, espera-se que, pelo menos,  $100(1 - \alpha)\%$  dos intervalos assim obtidos contenham o verdadeiro valor do parâmetro. Observe como esta interpretação considera o espaço amostral do experimento (repetições  $X_1, X_2, \dots, X_n$  do mesmo experimento) e não o espaço amostral do analista dos dados.

Esse intervalo pode ou não conter o parâmetro  $\theta$ , mas, pelo que foi exposto anteriormente, um intervalo de 95% de confiança incluiria o verdadeiro valor do parâmetro em 95% das repetições do experimento. Por exemplo, se o coeficiente de confiança for 95%, espera que 95% das amostras que foram obtidas forneçam intervalos que incluam o valor de  $\theta$ , enquanto os 5% restantes não incluam. Dessa maneira, a afirmação “o intervalo inclui” será correta em cerca de 95 dentre 100 casos, enquanto nos 5 restantes será falsa. Isso pode ser observado na Figura 6, que refere-se à construção de intervalos de confiança para o parâmetro  $\theta$ , com nível de confiança  $100(1 - \alpha)\%$ .

Note que um dado intervalo de confiança inclui ou não o verdadeiro valor do parâmetro  $\theta$ , porém, não é possível saber isso, a menos que  $\theta$  seja conhecido.

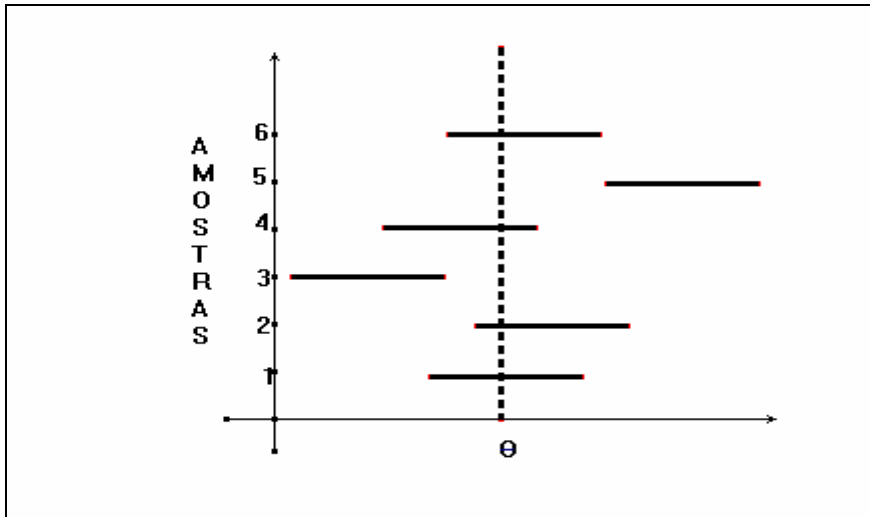


FIGURA 6 Construção de intervalos de confiança para o parâmetro  $\theta$ , com nível de confiança  $100(1 - \alpha)\%$

Na prática, interpreta-se um intervalo de confiança bilateral da seguinte maneira: com  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança, pode-se dizer que o verdadeiro valor do parâmetro  $\theta$  está contido no intervalo entre os valores de  $T_1$  e  $T_2$ . De fato, o intervalo observado contém  $\theta$  ou não. Assim,  $100(1 - \alpha)\%$  refere-se ao procedimento de construção do intervalo estatístico e não ao intervalo observado por si só (Hahn & Meeker, 1991).

### 2.3.2 Intervalos de predição

Para Hahn & Meeker (1991), um intervalo de predição contém uma ou mais observações futuras, ou alguma função de tais observações futuras, de uma população amostrada previamente. Assim, define-se um intervalo de predição da seguinte forma:

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$ , de densidade  $f(x;\theta)$  em que o parâmetro  $\theta$  pode ser um escalar ou um vetor.

Sejam  $T_1 = T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e  $T_2 = T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , com  $T_1 < T_2$ , duas estatísticas baseadas na amostra observada. Seja  $X_{n+1}$  uma observação futura da mesma distribuição  $f(x;\theta)$ . Suponha que esta observação futura seja retirada, independentemente da amostra. O intervalo de predição para uma observação futura simples é dado por  $P(T_1 < X_{n+1} < T_2) = 1 - \alpha$ , sendo  $1 - \alpha$  o coeficiente de confiança que se tem no intervalo. Um intervalo de predição para uma observação futura simples é um intervalo que, com um grau de confiança especificado, conterá a próxima observação selecionada aleatoriamente da população, sob as mesmas condições da amostra inicial. Esse intervalo de predição bilateral com  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança é obtido por

$$T_1 = \bar{X} - t_{(\alpha/2, n-1)} \times S \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad T_2 = \bar{X} + t_{(\alpha/2, n-1)} \times S \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \quad (7)$$

em que  $\bar{X}$  é a média amostral,  $t$  é o quantil superior de uma distribuição t-Student com  $n-1$  graus de liberdade e  $S$  é o desvio padrão amostral (Hahn & Meeker, 1991). Nesta seção foi citado apenas o intervalo de predição para uma observação futura, pois é o que será utilizado neste trabalho.

Muitas predições procuram prever valores de  $y$  em situações em que o valor da variável independente  $x$  está fora do intervalo de valores observados anteriormente. Tais predições, conhecidas como extrapolações, são menos confiáveis do que predições baseadas em valores da variável independente contidos no intervalo de valores previamente observados.

Aqui, também, o espaço amostral implicitamente considerado é o do experimento, outra vez por meio da amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

### 2.3.2.1 Interpretação do intervalo de predição

A interpretação de um intervalo de predição com coeficiente de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  para conter uma observação futura é interpretado a seguir: se, repetidamente, forem calculados intervalos  $[T_1, T_2]$  de muitas amostras aleatórias

independentes provenientes da mesma população em que  $100(1 - \alpha)\%$  dos intervalos deve, ao longo do tempo, conter corretamente o valor da observação futura. Note que esta interpretação sugere aos usuários do intervalo de predição que deverão ser feitas numerosas repetições de amostragem na população em estudo, o que, na prática, nunca será realizado, pois somente uma repetição da amostragem é feita nas pesquisas realizadas. Mesmo que esta interpretação seja apenas “imaginária”, ainda permanece o problema de torná-la compreensível (ou aceitável) para o público leigo, isto é, para o usuário comum das análises estatísticas.

Os intervalos de predição têm comprimentos mais largos do que os intervalos de confiança, devido à existência de duas fontes de variações envolvidas em sua construção. A primeira delas é que parâmetros desconhecidos precisam ser estimados usando dados passados e a segunda é que uma amostra futura traz uma variação aleatória adicional (Patel, 1989).

### **2.3.3 Intervalos de tolerância**

O conceito de tolerância é largamente utilizado em qualidade industrial e empresas de serviços. Mas, o que significa tolerância? Segundo Prazeres (1996), tolerância é a variabilidade total permissível em um processo ou em uma característica de qualidade de uma unidade de produto ou serviço. Esse autor ainda a define como sendo a diferença entre os valores máximo e mínimo permitidos como resultados.

Nesta seção, serão apresentadas algumas abordagens para estimar os limites de tolerância.

A estimação dos limites de tolerância de um processo é um problema importante, com muitas implicações práticas significativas na indústria. Conforme Montgomery (2004), a menos que as especificações do produto coincidam exatamente com os limites naturais de tolerância do processo, ou os excedam,

uma porcentagem extremamente elevada da produção estará fora das especificações, resultando em perda elevada ou considerável taxa de retrabalho.

Em muitos tipos de processo de produção, é costume encarar os limites naturais de tolerância como os limites que abrangem determinada fração – diga-se  $1 - \alpha$  - da distribuição (Montgomery, 2004).

Um intervalo que contém pelo menos uma proporção  $p$  da população, com um nível de confiança  $(1-\alpha)100\%$  especificado, é conhecido como intervalo de tolerância (King, 1995). Tal intervalo é utilizado para indicar os limites entre os quais se espera encontrar uma proporção especificada de uma população, a partir de dados normalmente distribuídos.

Prazeres (1996) define intervalo de tolerância como o intervalo compreendido entre os valores-limite superior e inferior de tolerância, ou seja, área na qual os valores de uma característica mensurável estão dentro da especificação. É a tolerância bruta permitida. Quando há apenas um valor-limite (superior ou inferior), diz-se haver um intervalo unilateral de tolerância e, quando há dois limites, intervalo bilateral de tolerância. Prazeres (1996) ainda define intervalo estatístico de tolerância, como sendo o intervalo para o qual se pode afirmar, com um dado nível de confiança, que ele contém ao menos uma proporção especificada da população.

Logo, um intervalo de tolerância bilateral que contém pelo menos uma proporção  $\gamma$  da população, com um nível de confiança  $(1-\alpha)100\%$  especificado, é definido da seguinte forma:

Seja uma amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de tamanho  $n$  de uma densidade  $f(x; \theta)$ , sendo  $\theta$  um escalar ou vetor. Sejam  $T_1 = t_1(X_1, \dots, X_n)$  e  $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$  duas estatísticas satisfazendo  $T_1 \leq T_2$ . Então,  $P_X(T_1 < X < T_2)$  é a cobertura do intervalo  $[T_1, T_2]$ . Sejam  $(1-\alpha)$  e  $\gamma$  duas constantes tais que  $0 < 1-\alpha < 1$  e  $0 < \gamma < 1$ , então:



$$P\left[P_X(T_1 < X < T_2) > \gamma\right] = 1 - \alpha$$

é definido como intervalo bilateral de tolerância. Dessa forma,  $1 - \alpha$  é o coeficiente de confiança que se tem em que uma particular amostra dá origem a um intervalo bilateral que contenha pelo menos uma proporção  $\gamma$  da população (Patel, 1986).

Wald & Wolfowitz (1946) consideraram o problema de construir limites de tolerância considerando uma população normal. Uma boa aproximação de tais limites foi obtida conforme descrito a seguir: considere uma amostra aleatória de tamanho  $n$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , de uma população normal. Seja  $\bar{X}$  a média amostral e a  $S^2$  variância amostral. Então, segundo Wald & Wolfowitz (1946), um intervalo de tolerância bilateral para conter, pelo menos,  $\gamma$  da população com um grau de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  é dado por:

$$P\left[P_X\left(\bar{X} - kS\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1-\alpha, n-1)}}} < X < \bar{X} + kS\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{(1-\alpha, n-1)}}}\right) > \gamma\right] = 1 - \alpha \quad (8)$$

em que  $\chi^2_{(1-\alpha, n-1)}$  é o quantil de uma distribuição Qui-Quadrado com  $n-1$  graus de liberdade e  $k$  é conhecido como fator de tolerância, sendo obtido pela raiz da equação dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}} - k}^{\frac{1}{\sqrt{n}} + k} e^{-t^2/2} dt = \gamma. \quad (9)$$

Atualmente, os fatores de tolerância  $k$  são valores tabelados em função de  $n$ ,  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança e da proporção  $\gamma$ .

Conforme Walpole & Myers (1985), os limites de tolerância são dados por  $\bar{X} \pm kS$ , com  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança, que os limites dados contenham pelo menos a proporção  $100\gamma\%$  da população, isto é,

$$P\left[P_X(\bar{X} - kS < X < \bar{X} + kS) > \gamma\right] = 1 - \alpha \quad (10)$$

em que  $k$  é um valor tabelado em função de  $1-\alpha$ ,  $\gamma$  e do tamanho  $n$  da amostra (veja tabela A1 em anexo).

Ainda suponha que uma variável aleatória  $X$  tenha distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , ambos desconhecidos. Para uma amostra aleatória de  $n$  observações, determinam-se a média amostral  $\bar{X}$  e a variância amostral  $S^2$ . Segundo Montgomery (2004), um procedimento para estimar os limites naturais de tolerância  $\mu \pm z_{\alpha/2} \sigma$  é substituir  $\mu$  por  $\bar{X}$  e  $\sigma$  por  $S$ , resultando em

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} S. \quad (11)$$

Montgomery (2004) ainda cita quem como  $\bar{X}$  e  $S$  são estimativas, não se pode afirmar que o intervalo dado pela expressão (11) sempre contenha  $100(1-\alpha)\%$  da distribuição. Pode-se, entretanto, determinar uma constante  $k$ , tal que, em um grande número de amostras, uma fração  $(1-\alpha)$  dos intervalos  $\bar{X} \pm kS$  inclua ao menos  $\gamma\%$  da distribuição, em que  $k$  é um valor tabelado em função de  $n$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  (veja Tabela A1 em Anexo).

Como ilustração, considere o seguinte exemplo citado em Montgomery (2004): um fabricante de um propulsor de foguete de combustível sólido deseja achar os limites de tolerância do processo tais que 95% das taxas de combustão estejam dentro desses limites, com 99% de probabilidade. Pela experiência anterior, sabe-se que a taxa de combustão tem distribuição normal. Uma amostra aleatória de 25 observações indica que a média e a variância amostrais da taxa de combustão são  $\bar{X} = 40,75$  e  $S^2 = 1,87$ , respectivamente. Como  $\alpha = 0,05$ ,  $\gamma = 0,99$  e  $n = 25$ , obtém-se, na Tabela A1, em Anexo, que  $k = 2,972$ . Portanto, efetuando-se as devidas substituições e cálculos, tem-se que o intervalo de tolerância é dado por  $[36,69; 44,81]$ . Ou seja, tem 95% de confiança de que pelo menos 99% de todas as taxas de combustão estão entre 36,69 e 44,81.

Podem-se, ainda, estabelecer limites de tolerância unilaterais, baseados na distribuição normal, ou seja, com probabilidade  $g$ , ao menos  $100(1-\alpha)\%$  da

distribuição superam o limite inferior de tolerância  $\bar{X} - kS$  ou ficam abaixo do limite superior de tolerância  $\bar{X} + kS$ . Neste caso, os valores de  $k$  também são tabelados e podem ser obtidos na Tabela VIII do Apêndice do livro de Montgomery (2004).

Mais uma vez, o espaço amostral considerado é o do experimento.

### **2.3.3.1 Interpretação do intervalo de tolerância**

Conforme Hahn & Meeker (1991), um intervalo de tolerância com grau de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$ , para conter pelo menos uma proporção  $\gamma$  da população, é interpretado da seguinte forma: se, repetidamente, forem calculados tais intervalos de tolerância de muitos grupos independentes de amostras aleatórias, em  $100(1 - \alpha)\%$  dos intervalos devem, ao longo do tempo, corretamente ser incluídos pelo menos  $100\% \gamma$  dos valores da população.

Para Hahn & Meeker (1991), como os intervalos de confiança e predição, o  $100(1 - \alpha)\%$  refere-se ao procedimento de construção do intervalo de tolerância e não a qualquer intervalo particular que é computado. A proporção atual da população contida dentro do intervalo de tolerância é desconhecida porque essa proporção depende de parâmetros desconhecidos.

Enquanto os limites de confiança servem para dar uma estimativa do parâmetro de uma distribuição, os limites de tolerância são utilizados para indicar os limites entre os quais se espera encontrar uma proporção especificada de uma população.

### **2.3.4 Intervalos de credibilidade (ou intervalos de confiança bayesianos)**

A inferência bayesiana é baseada no conceito de probabilidade subjetiva, que mede o grau de confiança que alguém deposita no acontecimento de um dado evento. No enfoque bayesiano, os parâmetros  $\theta$  são interpretados como variáveis aleatórias, baseadas no conhecimento e na experiência do pesquisador. Logo, é

possível expressar esse conhecimento por meio de uma distribuição de probabilidade, em que a distribuição é baseada no que se sabe antes de se observar uma dada amostra aleatória, sendo conhecida como distribuição *a priori*.

A utilização de informação a priori requer a especificação de uma distribuição a priori para a quantidade de interesse sobre o parâmetro  $\theta$ . Esta distribuição deve representar o conhecimento que se tem sobre  $\theta$ , antes da realização do experimento.

Para Paulino et al. (2003), é necessário obter uma expressão que contenha toda a informação da função de verossimilhança mais a informação adicional da *priori*. A função de verossimilhança tem papel fundamental, quer na inferência clássica, quer na inferência bayesiana, como veículo portador da informação dada pela amostra.

Segundo Box & Tiao (1992), o método bayesiano consiste em uma informação a priori,  $P(\theta)$ , a respeito dos parâmetros, de uma função de verossimilhança dos dados,  $L(y_1, \dots, y_n | \theta)$ , e do cálculo da distribuição de probabilidade a posteriori para os parâmetros.

A pergunta que surge é: por que estudar intervalos de credibilidade neste trabalho? A resposta a esta pergunta inclui:

a) para deixar clara a diferença entre a abordagem bayesiana e a abordagem freqüentista. Apesar da apresentação desta diferença, deve-se salientar que a proposta alternativa apresentada é freqüentista, pois exige trabalhar sobre as repetições do intervalo construído ao longo da vida da central;

b) intervalo de confiança para a média é um caso particular de intervalo de credibilidade quando a variância da priori tende a infinito, isto é,  $\tau^2 \rightarrow \infty$ ;

c) para deixar claro que intervalo de credibilidade trata o parâmetro como variável aleatória, e a proposta alternativa não, pois é freqüentista. Isto levaria a frases interpretativas diferentes:

- i) no caso do intervalo de credibilidade, “a probabilidade de a média populacional  $\mu$  estar entre os limites inferior e superior é de 95%”;
- ii) no caso da interpretação alternativa, “a probabilidade de o pesquisador/sistema acertar a inclusão do parâmetro dentro dos limites propostos (inferior e superior) é de 95%”;
- iii) no caso clássico de intervalo de confiança, se repetir o experimento infinitas vezes, a probabilidade do intervalo conter o verdadeiro parâmetro é de 95%.

Segundo Jesus (2004), sob o ponto de vista bayesiano, a forma mais adequada de avaliar a informação disponível a respeito de uma quantidade desconhecida  $\theta$  é por meio da distribuição a posteriori, uma vez que a estimação pontual não nos informa sobre a precisão da estimativa e restringe toda a informação presente na distribuição a posteriori num único resultado. Uma maneira de contornar esse problema é calcular intervalos de credibilidade para estes valores.

Conforme Ehlers (2008), considere uma quantidade de interesse desconhecida  $\theta$  (tipicamente não observável). A informação de que dispomos sobre  $\theta$ , resumida probabilisticamente por meio de  $p(\theta)$ , pode ser aumentada observando-se uma quantidade aleatória  $X$  relacionada com  $\theta$ . A distribuição amostral  $p(x|\theta)$  define esta relação. A idéia de que, após observar  $X = x$ , a quantidade de informação sobre  $\theta$  aumenta, é bastante intuitiva e o teorema de Bayes é a regra de atualização utilizada para quantificar este aumento de informação,

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta,x)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(\theta,x)d\theta}. \quad (12)$$

Note que  $1/p(x)$ , que não depende de  $\theta$ , funciona como uma constante normalizadora de  $p(\theta|x)$ .

Para um valor fixo de  $x$ , a função  $l(\theta;x) = p(x|\theta)$  fornece a plausibilidade ou a verossimilhança de cada um dos possíveis valores de  $\theta$ , enquanto  $p(\theta)$  é chamada de distribuição a *priori* de  $\theta$ . Estas duas fontes de informação, verossimilhança e *priori*, são combinadas, levando-se a distribuição a *posteriori* de  $\theta$ ,  $p(\theta|x)$  (Ehlers, 2008). Assim, a forma usual do teorema de Bayes é dada por:

$$p(\theta|x) \propto l(\theta; x) \times p(\theta). \quad (13)$$

Em palavras, tem-se que:

distribuição a *posteriori*  $\propto$  verossimilhança  $\times$  distribuição a *priori*.

A seguir, será definido intervalo de credibilidade (ou intervalo de confiança bayesiano).

Definição 12 (intervalo de credibilidade): seja  $\theta$  uma quantidade desconhecida no espaço paramétrico  $\Theta$ .  $C$  é um intervalo de credibilidade de  $100(1-\alpha)\%$ , ou nível de credibilidade (ou confiança)  $1-\alpha$ , para  $\theta$ , se  $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$ .

É possível construir uma infinidade de intervalos de credibilidade, mas o ideal é obter apenas aquele que tenha o menor comprimento possível. Neste caso, é denominado intervalo de credibilidade com máxima densidade a posteriori. A seguir, é definido tal intervalo.

Definição 13: um intervalo de credibilidade  $C$  de  $100(1-\alpha)\%$ , para  $\theta$ , é de máxima densidade a posteriori se  $C = \{ \theta \in \Theta : p(\theta | x) \geq K(\alpha) \}$ , em que  $K(\alpha)$  é a maior constante que satisfaz  $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$ .

Agora, considere uma amostra aleatória  $(X_1, \dots, X_n)$  de uma população normal com média  $\theta$  e variância  $\sigma^2$ .

Se a variância populacional  $\sigma^2$  é conhecida e a priori de  $\theta$  é  $N(\mu_0, \tau_0^2)$ , então, pelo teorema de Bayes, a posteriori de  $\theta$  é  $N(\mu_1, \tau_1^2)$ . Intervalos de credibilidade bayesianos para  $\theta$  podem ser construídos, usando o fato de que

$$\frac{\theta - \mu_1}{\tau_1} | x \sim N(0,1) . \quad (14)$$

Observação: a notação dada em (14), lê-se “ $\frac{\theta - \mu_1}{\tau_1}$  dado  $x$ ”.

Assim, usando uma tabela da distribuição normal padronizada, pode-se obter o valor do percentil  $z_{\alpha/2}$ , tal que:

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\theta - \mu_1}{\tau_1} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (15)$$

e isolando-se  $\theta$  em (15), obtém-se que:

$$P(\mu_1 - z_{\alpha/2} \cdot \tau_1 \leq \theta \leq \mu_1 + z_{\alpha/2} \cdot \tau_1) = 1 - \alpha. \quad (16)$$

Portanto,  $[\mu_1 - z_{\alpha/2} \cdot \tau_1; \mu_1 + z_{\alpha/2} \cdot \tau_1]$  é o intervalo de credibilidade  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\theta$ .

A priori não informativa pode ser obtida fazendo-se a variância da priori tender a infinito, isto é,  $\tau_0^2 \rightarrow \infty$ . O intervalo de credibilidade será dado por:

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (17)$$

que coincide numericamente com o intervalo de confiança para a média clássico.

Aqui, o espaço amostral  $\Omega$  é o produto cartesiano do espaço amostral do experimento, dado por  $(X_1, \dots, X_n)$  com o espaço amostral de  $\theta$ .

Um tratamento mais completo do enfoque bayesiano pode ser encontrado em Box & Tiao (1992).

#### 2.3.4.1 Interpretação do intervalo de credibilidade

Recordando a interpretação do intervalo de confiança com nível de significância  $100(1 - \alpha)\%$ : se o experimento for repetido um número muito grande de vezes em condições idênticas, os intervalos encontrados conterão o verdadeiro valor do parâmetro, numa proporção igual a  $100(1 - \alpha)\%$ . Essa informação refere-se ao intervalo e não ao parâmetro (Cordani, 2001). Já a abordagem bayesiana oferece um intervalo de credibilidade para o parâmetro com base na distribuição *a posteriori*. Este intervalo pode produzir um valor numérico análogo àquele produzido na inferência clássica, mas a interpretação é diferente, provavelmente mais próxima da linguagem usual do usuário da informação (ou do pesquisador), uma vez que a atribuição de probabilidade é feita sobre o parâmetro (Cordani, 2001).

#### 2.4 Articulações entre os intervalos estatísticos

Nesta seção será feita uma articulação entre os intervalos de confiança, de predição e de tolerância, a fim de se obter, na seção 4.2, uma expressão alternativa para calcular limites de tolerância.

Segundo Kataoka (2005), para o modelo simples normal pode-se verificar que o intervalo de tolerância (IT) é uma conjunção do intervalo de predição (IP) com o intervalo de confiança (IC), isto é,  $IT = IP + IC$ , o IT é uma “correção” que se faz no IP por causa da incerteza da média dada pelo IC. Então, para verificar tal afirmação, pode-se aumentar o tamanho da amostra, fazendo com que  $n$  tenda ao infinito ( $n \rightarrow \infty$ ) (maiores detalhes veja Kataoka, 2005).

Conforme visto na seção 2.3.1, o intervalo de confiança para a média populacional  $\mu$  é dado por:

$$\bar{X} \pm t_{(\alpha/2;n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (18)$$



Quando  $n \rightarrow \infty$ , observa-se que o intervalo acima tende à média populacional  $\mu$ , pois  $\frac{S}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  e  $\bar{X} \rightarrow \mu$ , isto é,

$$\bar{X} \pm t_{(a/2, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} \rightarrow \mu. \quad (19)$$

Para o intervalo de predição para uma observação futura, dado pela expressão (7) da seção 2.3.2, tem-se que:

$$\bar{X} \pm t_{(a/2, n-1)} S \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \mu \pm z_{a/2} \sigma \quad (20)$$

Pois, quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se que  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$ ,  $t_{(a/2, n-1)} \rightarrow z_{a/2}$  e  $S \rightarrow \sigma$ . Logo, na expressão (20), observa-se que o intervalo de predição tende ao intervalo de confiança para  $n \rightarrow \infty$ .

No caso do intervalo de tolerância conter pelo menos uma proporção  $\gamma$  da população, determina-se o fator de tolerância  $k$ , que é obtido pela raiz da equação

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}-k}^{\frac{1}{\sqrt{n}}+k} e^{-t^2/2} dt = \gamma \text{ que foi apresentada em (9). Então, quando } n \rightarrow \infty, \text{ tem-se}$$

que  $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow z_{\gamma/2}$ , em que  $z_{\gamma/2}$  é o quantil de uma distribuição normal padronizada ( $N(0,1)$ ). Logo, tem-se que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}-k}^{\frac{1}{\sqrt{n}}+k} e^{-t^2/2} dt = \gamma \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-k}^k e^{-t^2/2} dt = \gamma. \quad (21)$$

E, utilizando-se a expressão (8), quando  $n \rightarrow \infty$ , obtém-se que

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi_{(1-\alpha, n-1)}^2}} \rightarrow 1, \text{ pois, quando } n \rightarrow \infty, \text{ tem-se que } \chi_{(1-\alpha, n-1)}^2 \rightarrow n-1, \text{ ou seja, tende}$$

aos graus de liberdade. Portanto, ainda utilizando a expressão (8), tem-se que:

$$\bar{X} \pm kS \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{(1-\alpha, n-1)}^2}} \rightarrow \mu \pm z_{\gamma/2} \sigma \quad (22)$$

ou seja, tende ao intervalo de confiança para a média.

Conforme Kataoka (2005), verifica-se, portanto, que se o valor da proporção  $\gamma$  do intervalo de tolerância for muito próximo ao grau de confiança do intervalo de predição, as expressões (20) e (22) são iguais, uma vez que  $z_{\gamma/2} \cong z_{\alpha/2}$ .

Estes argumentos servem para justificar a afirmação de que o intervalo de tolerância é uma correção do intervalo de predição pela incorporação da incerteza da média expressada pelo intervalo de confiança (Kataoka, 2005).

Observe que os intervalos de predição são sempre mais amplos do que os intervalos de confiança para a média. Ao obter mais observações, os intervalos de confiança para a média ficarão mais estreitos, pois, quando  $n \rightarrow \infty$  na expressão (18), o comprimento do intervalo tende a zero. Mas, os intervalos de predição permanecerão em torno do mesmo comprimento, pois, quando  $n \rightarrow \infty$ , observa-se, na expressão (20), que o intervalo de predição tende ao intervalo de confiança.

Note que, como citado anteriormente, quando  $n$  tende para infinito ( $n \rightarrow \infty$ ) o comprimento de um intervalo de confiança tende para zero, enquanto os limites de tolerância tendem para o valor correspondente da população.

A seguir serão apresentados os materiais e os métodos utilizados neste trabalho.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

A base de dados do presente trabalho foi obtida por meio de simulação. Para gerar os dados, foi necessário estabelecer uma estratificação. Esta estratificação é baseada num conjunto de categorias, normalmente usadas no estudo de direção econômica, as quais serão apresentadas no capítulo 4. A título de simulação, tal estratificação foi determinada da seguinte forma: considerou-se o mesmo motorista dirigindo o mesmo veículo, realizando sempre o mesmo trajeto, sem estar em comboio, com defletor e outras variáveis fixas. Como toda a teoria de intervalos de tolerância citado neste trabalho é baseada na distribuição normal, então, geraram-se os dados provenientes de uma distribuição normal, com média de consumo de 2,5 km/l e desvio padrão de 0,15 km/l. Esta estratificação está sujeita a variações na definição das categorias de estratificação, conforme a necessidade da empresa.

As análises foram realizadas utilizando o software estatístico R, versão 2.6.2 (R, 2008). O programa usado para gerar os dados e calcular os limites de tolerância é apresentado a seguir.

Geração de dados:

```
dados=rnorm(100,2.5,0.15) #gerar dados com uma distribuição normal com  
média=2,5 e desvio padrão de 0,15#
```

Cálculo do intervalo de tolerância bilateral, considerando o nível de confiança de 95%:

```
n<- length(dados)
```

```
media=mean(dados) #calcula a média dos valores gerados#
```

```
media #imprime na tela o valor da média#
```

```
desvio=sd(dados) #calcula o desvio padrao#
```

```
desvio #imprime o valor do desvio padrão#
```

```

t=qt(0,975, df = n-1)      #quantil da distribuição t #
klinha=t*((sqrt(1/n)+(sqrt(1+(1/n)))))) #calcula o fator k'#
kajust=1,1957*klinha - 0,3873 #determina o k ajustado pela regressão com
n>=30#
kajust      #imprime o valor de k ajustado#
ITconsumo<-média+desvio*qt(c(0,025, 0,975), df = n-1) *kajust #intervalo de
tolerância bilateral usando o fator de tolerância ajustado#
ITconsumo #imprime o intervalo de tolerância desejado#

```

Para obter uma nova forma de calcular os fatores de tolerância, será utilizado um resultado apresentado em Kataoka (2005): para o modelo simples normal, pode-se verificar que o intervalo de tolerância (IT) é uma conjunção do intervalo de predição (IP) com o intervalo de confiança (IC), isto é,  $IT = IP + IC$ . A partir daí, será estabelecida a nova expressão.

## 4 NOVAS PROPOSTAS

Neste capítulo será apresentada uma forma alternativa de interpretar intervalo de tolerância, fazendo uma mudança no espaço amostral. Também será proposta uma expressão para calcular limites de tolerância, sem a necessidade de utilizar fatores de tolerância tabelados, conforme mencionado na seção 2.3.3. Além disso, a teoria de intervalos de tolerância será ilustrada por meio de dois exemplos aplicados ao programa de direção econômica. Toda a teoria é baseada no fato de que os dados seguem uma distribuição normal.

### 4.1 Programa de direção econômica

O mundo dos negócios está cada vez mais competitivo e, para sobreviver neste agressivo cenário econômico, torna-se imprescindível para as empresas a busca da melhoria contínua. A busca da competitividade tem exercido papel relevante para o aprimoramento e a conquista de novos mercados.

A qualidade total está sendo visualizada como forma de gerenciamento que, quando implementada, visa melhorar de modo contínuo o desempenho organizacional, pois, com o aumento da qualidade, cresce a satisfação dos clientes, correspondendo a um maior lucro e participação no mercado.

Uma empresa que pretenda alcançar e manter liderança em custo, dentro do contexto atual de globalização da economia, deve, continuamente, focar a produção com uma visão estratégica. Além da qualidade dos serviços prestados e prazos de entrega que satisfaçam às necessidades dos clientes, deve se empenhar no combate total ao desperdício, procurando eliminar todos os processos e funções que não agreguem valor ao produto ou serviço.

É importante enfatizar que um ataque total ao desperdício se aplica a todas as funções da empresa e não apenas à produção. Nesse sentido, uma empresa obtém vantagem competitiva em custo, por meio da otimização de todos os processos envolvidos na plena satisfação do cliente. A vantagem competitiva em custo é consequência da redução do custo global da empresa. Assim, para reduzir custo, a empresa deve adotar programas de melhoria contínua, utilizando métodos eficazes. Aqui, um dos métodos que será empregado é o *Just in Time* (JIT). Serão aplicados intervalos de tolerância para permitir análise e decisão em tempo real do consumo de combustível em uma empresa de transporte e logística, isto é, resolver o problema no momento e no local de abastecimento do veículo, no espírito JIT, para que a causa do consumo excessivo seja imediatamente resolvida/eliminada.

Nesta seção, propõe-se a criação de uma central contra o desperdício que deve gerenciar e ou controlar o consumo de combustível de uma frota de caminhões de uma transportadora.

Por exemplo, considere o caso em que uma transportadora possui uma frota de caminhões que percorre, aproximadamente, 1.000.000 de quilômetros por mês. Sua conta de combustível será, então, de um montante financeiro bastante significativo (considerável). Em um volume assim, qualquer variação no consumo representa uma variação grande na lucratividade da empresa. Para exemplificar o caso, suponha que o rendimento médio de combustível da frota de caminhões de uma transportadora seja de 2,212 km/litro e, quando adotado um programa de direção econômica, esse rendimento seja elevado para 2,567 km/litro, aumentando, assim, o rendimento médio em 0,355 km/litro. Este aumento implica numa redução de consumo em  $\frac{1}{2,212} - \frac{1}{2,567} \cong 0,0625$  litro por quilômetro.

Considerando o preço médio do combustível em R\$ 1,80 por litro, tem-se uma economia de:

$1,80 \cdot 0,0625 \cong \text{R\$ } 0,1125$  (ou 0,12) por quilômetro  
Mas, como a frota percorre em torno de 1.000.000 km mensais, tem-se  
 $\text{R\$ } 0,1125 \cdot 1.000.000 = \text{R\$ } 112.500,00$  de economia mensal em combustível.

Contudo, o objetivo não é apenas mostrar o valor economicamente, mas também em função da gestão da qualidade. Com a adoção de um sistema JIT, espera-se que o sistema otimize vários aspectos na empresa, levando então a uma melhoria da qualidade. Para atingir esse objetivo será necessária a criação de um sistema que será chamado “Central Contra o Desperdício”, descrito detalhadamente a seguir.

Primeiramente, suponha a existência de uma central, que será denominada Central Contra o Desperdício (CCD), que é um nome fantasia para o setor de uma empresa de transporte e logística que cuidará de todo o programa de direção econômica da empresa. Esta central consistirá de três grupos de recursos: pessoal, infra-estrutura e métodos (Figura 7). No grupo de recursos pessoais estão incluídas todas as pessoas que trabalharão na CCD. No grupo de infra-estrutura estão contidas as instalações físicas, tais como prédio, móveis, equipamentos (computadores, conexão a internet, telefones, etc.). No grupo referente aos métodos, estão contidos os procedimentos de trabalho da CCD, entre eles, com grande importância, os métodos estatísticos para a construção de intervalos.

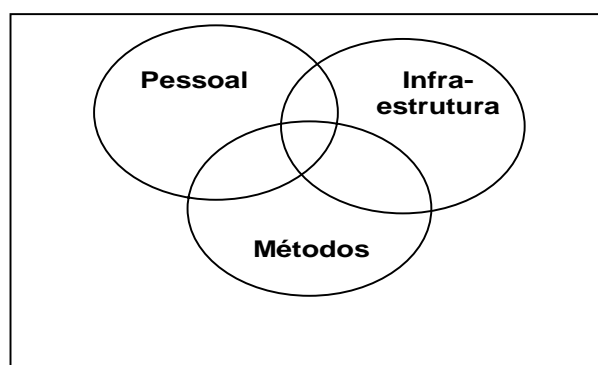


FIGURA 7 Grupos de recursos necessários na central contra o desperdício

A Central Contra o Desperdício (CCD) pode ser considerada um sistema JIT no combustível, devendo conter (conforme esquema na Figura 8):

1. um setor com pessoal conectado à internet ou a um telefone 0800 (Central Contra o Desperdício);
2. software de processamento estatístico para análise das informações registradas;
3. programa de treinamento de direção econômica.

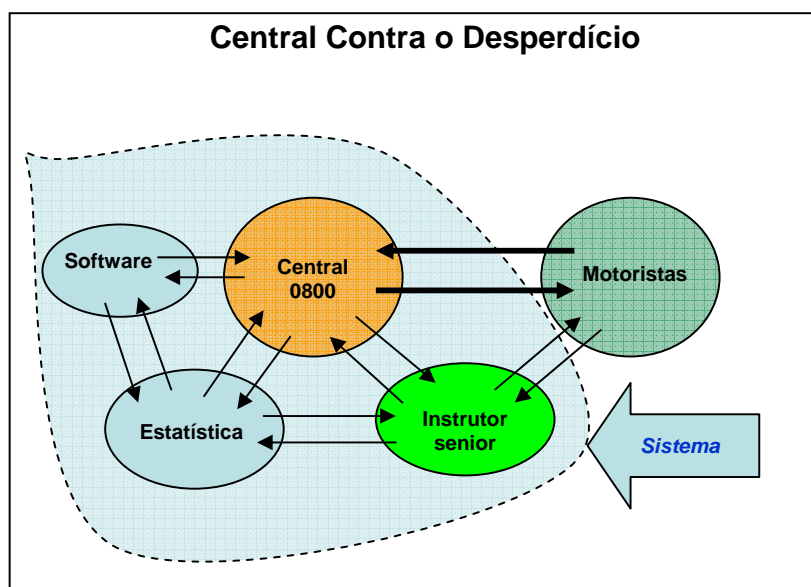


FIGURA 8 Esquema da Central Contra o Desperdício

O funcionamento da Central Contra o Desperdício será detalhado a seguir.

**Passo 1:** O caminhão é abastecido em qualquer lugar do Brasil.



**Passo 2:** Após abastecimento, o motorista informa a Central Contra o Desperdício, por meio de um telefone 0800 ou da internet, para informar o volume abastecido e a quilometragem que está registrada no caminhão.

**Passo 3:** Imediatamente, as informações são introduzidas no software que, de posse das informações de abastecimento anterior e do trecho percorrido (distância, condições de conservação da rodovia, tempo chuvoso ou não, etc.), calcula qual deveria ser o consumo ideal por meio do intervalo de tolerância e compara com o consumo real.

**Passo 4:** Se o consumo real for menor que o consumo ideal, o motorista é autorizado a seguir viagem e seus dados (nome, caminhão utilizado, trecho percorrido, etc.) são incorporados ao banco de dados do sistema, para possível introdução no programa de treinamento de outros motoristas, além de, é claro, somar-se ao banco de dados utilizado nas inferências.

**Passo 5:** Se o consumo real for maior que o consumo ideal, o motorista é convocado a prestar esclarecimentos sobre essa anomalia. Se as explicações não forem convincentes (ou mesmo que sejam), o motorista é orientado a levar o caminhão para oficina mecânica, concessionária ou equipe especializada, para que seu veículo seja vistoriado. E, com o resultado das análises, providências serão tomadas, como, por exemplo, treinamento e reciclagem de motoristas.

O banco de dados da Central Contra o Desperdício será composto de informações referentes ao:

- a) consumo por caminhão (marca, modelo, ano, idade, tipo, etc.);
- b) consumo por motorista;
- c) consumo por rota (trajeto);
- d) consumo por condições de estrada (ou rodovias);
- e) consumo por tipo de carga;
- f) está em comboio?;
- g) uso ou não de defletor;

- h) número de horas do motorista sem dormir;
- i) temperatura do ar, etc.

Observa-se, no Quadro 3, que se refere ao custo e à qualidade em função da maneira de como o motorista dirige, que:

a) quando o motorista usa de forma inadequada o câmbio, isso leva ao aumento de consumo de combustível e ao aumento de desgaste de peças, ou seja, ocorre aumento no custo, além de gerar solavancos na carga, podendo danificá-la;

b) o uso errado dos freios implica em aumento de combustível e maior desgaste de peças, levando a maiores custos. Se a utilização for de forma adequada, ocorrerão menos solavancos na carga, entre redução no consumo de combustível e menor desgaste de peças. Assim, haverá redução de custos, além de proporcionar menos quebras na carga;

c) a velocidade excessiva gera o consumo excessivo de combustível, além de maior desgaste de peças, gerando maiores custos, além de trepidação excessiva, solavancos potencialmente mais danosos na carga e risco de acidentes.

Assim, conforme Quadro 3, a economia de combustível implica em qualidade pelos seguintes aspectos:

- a) motorista atento à direção desvia de mais buracos nas rodovias;
- b) menor uso de freios levará a uma viagem mais suave, logo, menos quebra de mercadorias;
- c) maior concentração no trabalho, melhorando o desempenho geral, assim evitando acidentes.

Logo, se o motorista tiver uma direção adequada, além de evitar acidentes, ele levará a uma redução de custos em relação ao menor consumo de combustível, menores desgastes de peças, implicando em menos manutenção do veículo e proporcionando maior qualidade em função de ocorrer redução de quebras na carga.

Portanto, com a adoção de um programa de direção econômica, a empresa obtém qualidade pela direção do motorista. Portanto, gerenciar custo induzirá a uma postura mais profissional do motorista, que acarretará melhorias da qualidade.

QUADRO 3 Custo e qualidade em função da maneira de como o motorista dirige

| Direção                              | Desempenho  |  |
|--------------------------------------|---|--|
|                                      | Custo   | Qualidade  |
| 1·Uso errado do câmbio               | · aumento de consumo de combustível<br>· aumento do desgaste de peças                                   | · solavancos na carga  |
| 2·Uso errado dos freios              | · aumento de consumo de combustível<br>· aumento do desgaste de peças<br>· aumento do desgaste de pneus | · solavancos na carga  |
| 3·Velocidade excessiva               | · aumento consumo de combustível<br>· aumento do desgaste de pneus                                      | · trepidação excessiva<br>· solavancos potencialmente mais danosos<br>· risco de acidentes |
| 4·Não desvio de buracos e saliências | · quebra e desgaste de peças  | · trepidação excessiva<br>· solavancos potencialmente mais danosos                         |
| 5· outros                            |   |  |

#### 4.2 Expressão para o cálculo dos limites de tolerância

Nesta seção será necessário considerar o resultado já discutido em Kataoka (2005), para que seja possível obter uma forma alternativa para calcular limites de tolerância. Tal expressão, que será apresentada nesta seção, não necessitará de valores tabelados para o fator de tolerância  $k$ , conforme citado na seção 2.3.3 e dependerá apenas de dados amostrais, sendo possível construir intervalos de tolerância para qualquer tamanho de amostra.

Suponha que os dados referentes ao consumo de combustível (Y) provenham de uma distribuição normal com média de consumo  $\mu$  em km/l e desvio padrão  $\sigma$ , ou seja,  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Como citado anteriormente, o intervalo de tolerância (IT) pode ser considerado como uma conjunção do intervalo de predição (IP) com o intervalo de confiança (IC), isto é, IT é o IP conjugado com o IC. Logo, se pode escrever que:

$$\begin{aligned} IT = \text{“IP + IC”} &= \bar{X} \pm \left[ t_{(\alpha/2, n-1)} S \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + t_{(\alpha/2, n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = \\ &= \bar{X} \pm t_{(\alpha/2, n-1)} S \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

Assim, outra expressão que pode servir como base para determinar intervalos de tolerância é dada por:

$$\bar{X} \pm t_{(\alpha/2, n-1)} S \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right). \quad (23)$$

Como os limites de tolerância podem ser obtidos pela expressão (19), ou seja, por  $\bar{X} \pm kS$ , com k tabelado conforme apresentado na Tabela A1, em anexo, considerou-se na expressão (23), como fator de tolerância

$k' = t_{(\alpha/2, n-1)} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right)$  e ajustou-se uma regressão linear, da forma  $y = a + b x$ ,

entre k e k'.

O gráfico da Figura 9 refere-se ao ajuste de tal regressão. Observa-se que a equação obtida foi  $\hat{k} = 1,577 k - 1,3324$ , com  $R^2 = 0,9990$ , em que k é o fator de tolerância tabelado em Walpole & Myers (1985) e k' é o fator de tolerância proposto anteriormente. Reescrevendo-se a equação tem-se

$$\hat{k} = 1,577 k - 1,3324 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{k} = 1,577 \cdot t_{(\alpha/2, n-1)} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) - 1,3324. \quad (24)$$

como  $R^2 = 0,9990$ , então, pode-se dizer que 99,90% da variação do fator de tolerância tabelado  $k$ , é explicado pelo modelo ajustado.

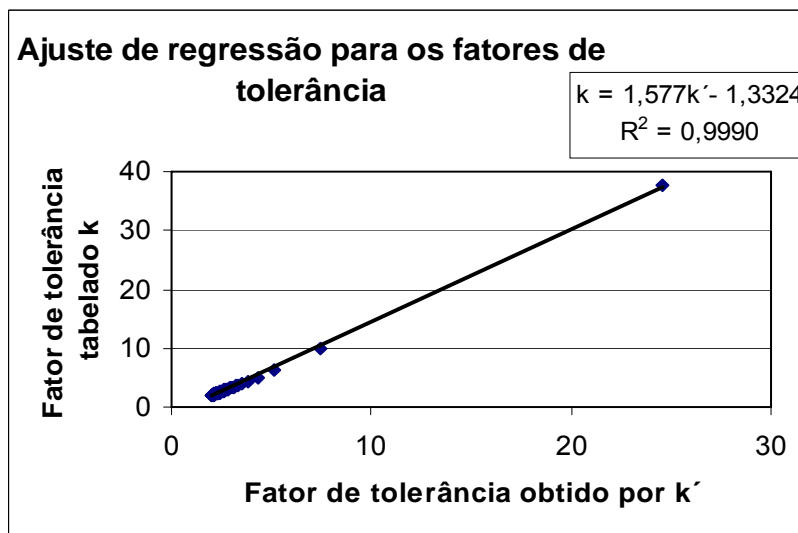


FIGURA 9 Ajuste de regressão entre os fatores de tolerância obtidos por  $k'$  por meio da expressão (23), com os fatores tabelados em Walpole & Myers (1985)

Os dados da Tabela 1 referem-se aos fatores de tolerância obtidos por meio da expressão (24) e de valores tabelados apresentados em Walpole & Myers (1985), com um nível de confiança de 95%. Logo, observa-se, pela Tabela 1, que os fatores de tolerância calculados pela equação (24) estão ficando próximos dos fatores tabelados em Walpole & Myers (1985).

TABELA 1 Fatores de tolerância obtidos por meio da expressão (24) e os valores tabelados apresentados em Walpole & Myers (1985), com um nível de confiança de 95%.

| <b>n</b> | <b>k tabelado</b> | <b>k ajustado</b><br>$\hat{k} = 1,577 k - 1,3324$ | <b>n</b> | <b>k tabelado</b> | <b>k ajustado por</b><br>$\hat{k} = 1,577 k - 1,3324$ |
|----------|-------------------|---|----------|-------------------|---|
| 2        | 37,6740           | 37,3774   | 45       | 2,4080            | 2,3547  |
| 3        | 9,9160            | 10,4201   | 50       | 2,3790            | 2,3164  |
| 4        | 6,3700            | 6,7881  | 55       | 2,3540            | 2,2842  |
| 5        | 5,0790            | 5,4221  | 60       | 2,3330            | 2,2567  |
| 6        | 4,4140            | 4,7012  | 65       | 2,3150            | 2,2329  |
| 7        | 4,0070            | 4,2513  | 70       | 2,2990            | 2,2120  |
| 8        | 3,7320            | 3,9412  | 75       | 2,2850            | 2,1936  |
| 9        | 3,5320            | 3,7131  | 80       | 2,2720            | 2,1770  |
| 10       | 3,3790            | 3,5373  | 85       | 2,2610            | 2,1622  |
| 11       | 3,2590            | 3,3971  | 90       | 2,2510            | 2,1487  |
| 12       | 3,1620            | 3,2823  | 95       | 2,2410            | 2,1365  |
| 13       | 3,0810            | 3,1863  | 100      | 2,2330            | 2,1252  |
| 14       | 3,0120            | 3,1046  | 150      | 2,1750            | 2,0486  |
| 15       | 2,9540            | 3,0342  | 200      | 2,1430            | 2,0050  |
| 16       | 2,9030            | 2,9727  | 250      | 2,1210            | 1,9762  |
| 17       | 2,8580            | 2,9184  | 300      | 2,1060            | 1,9554  |
| 18       | 2,8190            | 2,8702  | 400      | 2,0840            | 1,9268  |
| 19       | 2,7840            | 2,8269  | 500      | 2,0700            | 1,9076  |
| 20       | 2,7520            | 2,7879  | 600      | 2,0600            | 1,8937  |
| 25       | 2,6310            | 2,6378  | 700      | 2,0520            | 1,8831  |
| 30       | 2,5490            | 2,5351  | 800      | 2,0460            | 1,8745  |
| 35       | 2,4900            | 2,4596  | 900      | 2,0400            | 1,8675  |
| 40       | 2,4450            | 2,4014  | 1000     | 2,0360            | 1,8616  |

Observa-se que, para  $n = 2$ , o valor é discrepante dos demais. Então, foi retirada essa observação e ajustada uma nova regressão.

O gráfico da Figura 10 refere-se ao ajuste da regressão entre o fator de tolerância tabelado com o fator de tolerância proposto por  $k'$ , retirando-se  $n = 2$ . Observa-se que a equação obtida foi  $\hat{k} = 1,4199 k' - 0,9163$ , com  $R^2 = 0,9974$ , em que  $k$  é o fator de tolerância tabelado em Walpole & Myers (1985) e  $k'$  é o fator de tolerância proposto anteriormente. Reescrevendo-se a equação tem-se:

$$\hat{k} = 1,4199 k' - 0,9163 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{k} = 1,4199 \cdot t_{(\alpha/2; n-1)} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) - 0,9163. \quad (25)$$

como  $R^2 = 0,9974$ , então, pode-se dizer que 99,74% da variação do fator de tolerância tabelado  $k$  é explicado pelo modelo ajustado.

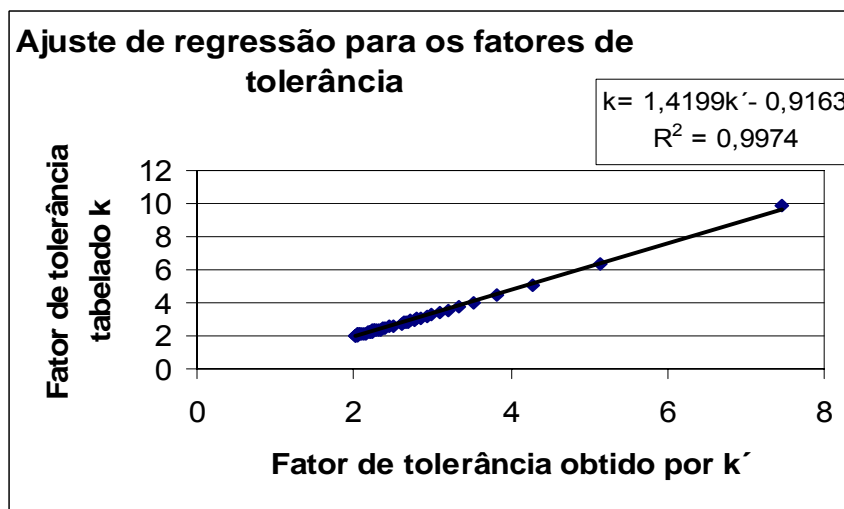


FIGURA 10 Ajuste de regressão entre os fatores de tolerância obtidos por  $k'$  por meio da expressão (23) com os fatores tabelados em Walpole & Myers (1985), retirando-se o primeiro valor de ambos, ou seja, retirando-se os valores para  $n=2$ .

Os dados da Tabela 2 referem-se aos fatores de tolerância obtidos por meio da expressão (25) e de valores tabelados apresentados em Walpole & Myers (1985), com um nível de confiança de 95%. Observa-se que, retirando-se os valores para  $n = 2$ , os fatores de tolerância calculados pela equação (25) se aproximaram mais dos fatores tabelados em Walpole & Myers (1985).

TABELA 2 Fatores de tolerância obtidos por meio da expressão (25) e os valores tabelados apresentados em Walpole & Myers (1985), com um nível de confiança de 95%.

| <b>n</b> | <b>k</b><br><b>tabelado</b> | <b>k ajustado</b><br>$\hat{k} = 1,4199 k' - 0,9163$ | <b>n</b> | <b>k</b><br><b>tabelado</b> | <b>k ajustado por</b><br>$\hat{k} = 1,4199 k' - 0,9163$ |
|----------|-----------------------------|---|----------|-----------------------------|---|
| 3        | 9,9160                      | 9,6654  | 50       | 2,3790                      | 2,4035  |
| 4        | 6,3700                      | 6,3952  | 55       | 2,3540                      | 2,3690  |
| 5        | 5,0790                      | 5,1653  | 60       | 2,3330                      | 2,3400  |
| 6        | 4,4140                      | 4,5162  | 65       | 2,3150                      | 2,3153  |
| 7        | 4,0070                      | 4,1111  | 70       | 2,2990                      | 2,2938  |
| 8        | 3,7320                      | 3,8320  | 75       | 2,2850                      | 2,2750  |
| 9        | 3,5320                      | 3,6265  | 80       | 2,2720                      | 2,2584  |
| 10       | 3,3790                      | 3,4682  | 85       | 2,2610                      | 2,2435  |
| 11       | 3,2590                      | 3,3420  | 90       | 2,2510                      | 2,2302  |
| 12       | 3,1620                      | 3,2387  | 95       | 2,2410                      | 2,2180  |
| 13       | 3,0810                      | 3,1522  | 100      | 2,2330                      | 2,2070  |
| 14       | 3,0120                      | 3,0787  | 150      | 2,1750                      | 2,1969  |
| 15       | 2,9540                      | 3,0153  | 200      | 2,1430                      | 2,1279  |
| 16       | 2,9030                      | 2,9599  | 250      | 2,1210                      | 2,0887  |
| 17       | 2,8580                      | 2,9111  | 300      | 2,1060                      | 2,0627  |
| 18       | 2,8190                      | 2,8676  | 400      | 2,0840                      | 2,0439  |
| 19       | 2,7840                      | 2,8287  | 500      | 2,0700                      | 2,0182  |
| 20       | 2,7520                      | 2,7935  | 600      | 2,0600                      | 2,0010  |
| 25       | 2,6310                      | 2,6584  | 700      | 2,0520                      | 1,9885  |
| 30       | 2,5490                      | 2,5659  | 800      | 2,0460                      | 1,9788  |
| 35       | 2,4900                      | 2,4980  | 900      | 2,0400                      | 1,9712  |
| 40       | 2,4450                      | 2,4455  | 1000     | 2,0360                      | 1,9648  |

Agora, considerando  $n \geq 30$ , ajustou-se outra regressão. A Figura 11 refere-se ao ajuste da regressão entre o fator de tolerância tabelado com o fator de tolerância proposto por  $k'$ , para  $n \geq 30$ . A equação obtida foi  $\hat{k} = 1,1957 k' - 0,3873$ , com  $R^2 = 0,9999$ , em que  $k$  é o fator de tolerância tabelado em Walpole & Myers (1985) e  $k'$  é o fator de tolerância proposto anteriormente. Observa-se também que o ajuste melhorou em relação ao ajuste anterior. Reescrevendo-se a equação tem-se:

$$\hat{k} = 1,1957 k' - 0,3873 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \hat{k} = 1,1957 \cdot t_{(\alpha/2; n-1)} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) - 0,3873. \quad (26)$$

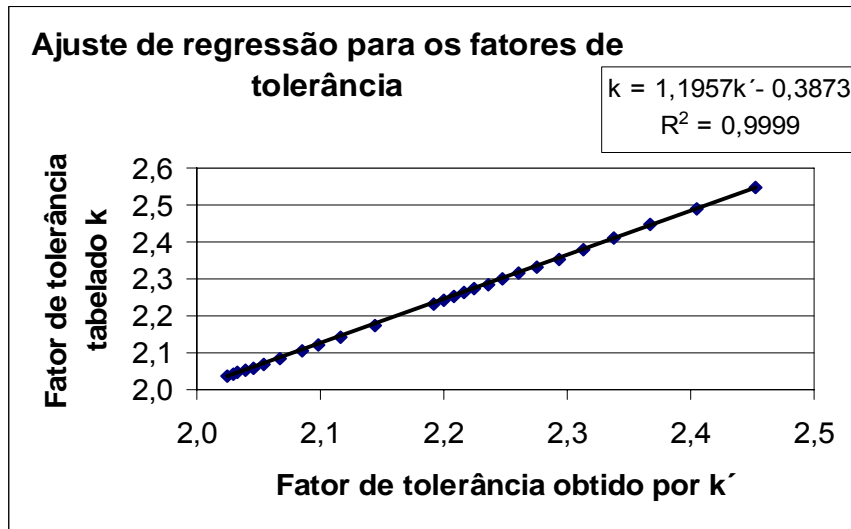


FIGURA 11 Ajuste de regressão entre os fatores de tolerância obtidos por  $k'$  por meio da expressão (23) com os fatores tabelados em Walpole & Myers (1985), considerando  $n \geq 30$ .

Os dados da Tabela 3 referem-se aos fatores de tolerância obtidos por meio da expressão (26) e de valores tabelados apresentados em Walpole & Myers (1985), com um nível de confiança de 95%. Considerando  $n \geq 30$ , os fatores de tolerância ajustados pela equação (26) se aproximaram bem dos fatores tabelados em Walpole & Myers (1985), diferenciando-se, em geral, do fator de tolerância tabelado a partir da terceira casa decimal. Portanto, para  $n \geq 30$ , a equação  $\hat{k} = 1,1957 k' - 0,3873$  pode ser usada para calcular os fatores de tolerância, produzindo valores aproximadamente iguais aos fatores de tolerância tabelados. Além de ser possível determinar fatores de tolerância para qualquer tamanho de

amostra, uma vez que em Walpole e Myers (1985) são apresentados fatores de tolerância para, no máximo, n=1000.

TABELA 3 Fatores de tolerância obtidos por meio da expressão (26), com  $n \geq 30$  e os valores tabelados apresentados em Walpole & Myers (1985), com um nível de confiança de 95%.

| <b>n</b> | <b>k</b><br><b>tabelado</b> | <b>k ajustado</b><br>$\hat{k} = 1,1957 k' - 0,3873$ | <b>n</b> | <b>k</b><br><b>tabelado</b> | <b>k ajustado por</b><br>$\hat{k} = 1,1957 k' - 0,3873$ |
|----------|-----------------------------|---|----------|-----------------------------|---|
| 30       | 2,5490                      | 2,5451  | 100      | 2,2330                      | 2,2343  |
| 35       | 2,4900                      | 2,4879  | 150      | 2,1750                      | 2,1762  |
| 40       | 2,4450                      | 2,4437  | 200      | 2,1430                      | 2,1432  |
| 50       | 2,3790                      | 2,4083  | 250      | 2,1210                      | 2,1213  |
| 55       | 2,3540                      | 2,3793  | 300      | 2,1060                      | 2,1055  |
| 60       | 2,3330                      | 2,3549  | 400      | 2,0840                      | 2,0838  |
| 65       | 2,3150                      | 2,3340  | 500      | 2,0700                      | 2,0693  |
| 70       | 2,2990                      | 2,3160  | 600      | 2,0600                      | 2,0588  |
| 75       | 2,2850                      | 2,3001  | 700      | 2,0520                      | 2,0507  |
| 80       | 2,2720                      | 2,2861  | 800      | 2,0460                      | 2,0442  |
| 85       | 2,2610                      | 2,2736  | 900      | 2,0400                      | 2,0389  |
| 90       | 2,2510                      | 2,2623  | 1000     | 2,0360                      | 2,0344  |
| 95       | 2,2410                      | 2,2521  |          |                             |   |

Assim, a expressão obtida em (26) pode ser considerada como uma boa aproximação para determinar os fatores de tolerância, obtendo resultados bem próximos aos produzidos, utilizando-se os valores tabelados e dependendo apenas de dados amostrais. Na prática, esta seria mais viável, pois sua implementação em softwares seria mais fácil, uma vez que não depende de valores tabelados.

Portanto, para  $n \geq 30$ , os limites de tolerância podem ser obtidos por:

$$\bar{X} \pm \hat{k}S =$$

$$\bar{X} \pm \left( 1,1957 \times t_{(\alpha/2; n-1)} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) - 0,3873 \right) \cdot S \quad (27)$$

### 4.3 Interpretação alternativa do intervalo de tolerância

Conforme já citado anteriormente, na construção de intervalos estatísticos freqüentistas supõe-se que sejam realizadas inúmeras repetições do experimento. Porém, na prática, somente um experimento de amostragem é levado a efeito; conseqüentemente, apenas a primeira amostra e o primeiro intervalo são considerados. Não ocorrem várias repetições do mesmo experimento (isto é, a obtenção de várias amostras de tamanho  $n$  repetidas um grande número de vezes - “long run”), a fim de garantir se realmente  $100(1 - \alpha)\%$  dos intervalos obtidos contêm o parâmetro. Com base **em um único** experimento é feita a afirmação de que há  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança de que verdadeira média  $\mu$  da população em estudo esteja contida dentro do intervalo que se estende de  $T_1$  a  $T_2$  (Hoel, 1976).

Hoel (1976) observa, de passagem, que esta interpretação carece de realização prática e sugere uma interpretação alternativa: se, para muitos experimentos diferentes, porém, com um mesmo coeficiente de confiança  $100(1 - \alpha)\%$ , forem feitas estimativas para o intervalo correspondente, então,  $100(1 - \alpha)\%$  de tais intervalos construídos serão verdadeiros (isto é, conterão a verdadeira média), na longa seqüência desses experimentos diferentes, semelhantes **apenas** quanto ao coeficiente de confiança. Mas, Hoel (1976) somente sugere a interpretação e não entra em maiores detalhes. Com base nesta idéia de Hoel (1976), está proposto, nesta tese, fazer uma interpretação freqüentista alternativa para o intervalo de tolerância, que será descrita a seguir.

Considere a central contra o desperdício (o analista ou um grupo): a esta central sempre chegam demandas para a decisão se um dado veículo está com consumo elevado, normal ou baixo, os quais podem receber como solução intervalos de tolerância de  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança.

Na interpretação tradicional, como já dito, imagina-se que se repete infinitas vezes o experimento, ou seja, deve considerar-se, neste caso, o mesmo

caminhão, a mesma rota, o mesmo motorista, o mesmo peso da carga, as mesmas condições climáticas, etc. e fazer com que isso ocorra infinitas vezes. Na prática, isso não faz sentido, uma vez que o mesmo motorista pode fazer apenas uma viagem com o mesmo caminhão X, com o mesmo peso de carga Y, nas mesmas condições climáticas, etc. Assim não seria possível utilizar a idéia de construção de intervalos de tolerância com interpretação tradicional, pelo fato de serem consideradas infinitas repetições do mesmo experimento. A forma alternativa sugerida por Hoel (1976) leva a fazer a mudança do espaço amostral do experimento para o espaço amostral do analista, o qual irá determinar soluções para cada viagem e este construirá intervalos de tolerância para cada situação (ou seja, para cada chamada recebida pela central). Assim, em vários problemas solucionados ao longo do tempo (tempo de vida da central), terá que, por exemplo, 95% deles estarão corretos e 5% não estariam.

A interpretação do intervalo de tolerância do espaço amostral tradicional prevê muitas repetições do experimento, enquanto a proposição (ou interpretação) alternativa prevê muitas situações diferentes, cada uma delas repetida uma única vez.

A pergunta que surge é: então, por que não usar a inferência bayesiana para solucionar esse problema? A inferência bayesiana considera o parâmetro como variável aleatória e aqui não é isso que está sendo considerado. Nesta interpretação alternativa, mudando o espaço amostral, a interpretação de probabilidade continua sendo freqüentista e todos os parâmetros continuam sendo **números** desconhecidos e não variáveis aleatórias. Além disso, a vantagem é que o espaço amostral continua não necessitando de uma priori.

Considere a seguinte situação: a central contra o desperdício recebe a chamada de um determinado motorista neste exato momento e tem que passar algumas informações a ele, por exemplo, “você deveria abastecer na quilometragem tal”. São construídos intervalos de tolerância em relação ao

consumo. Em cada chamada será construído um intervalo com probabilidade  $100(1 - \alpha)\%$  de “acertar”.

Imagine que, ao longo da vida da central, esta receba inúmeros problemas que necessitem da utilização de intervalos de tolerância citados anteriormente. Em cada problema, poderá determinar a solução correta ou não. Assim, ao longo de sua vida, terão resolvido  $n$  problemas deste tipo.

Nesta seção, será demonstrado que essa interpretação alternativa é válida, pois a probabilidade de acertar ao longo da vida da central tenderá a  $100(1 - \alpha)\%$ , que será considerado como 95%, a efeito de ilustração prática.

Considere a população de muitas repetições de intervalos de tolerância construídos na história de vida da central, ou seja, todas as chamadas recebidas no decorrer de sua existência com o conseqüente intervalo construído e a decisão sobre o consumo (alto, normal ou baixo). Esta decisão pode estar correta ou não, em função do intervalo estar correto ou não. Por exemplo, se um intervalo de tolerância afirma que um consumo normal para uma dada condição de motorista, veículo, carga, etc., está entre os valores de 2,56 km/l e 2,68 km/l, um consumo de 2,70 km/l seria considerado alto. Porém, o intervalo correto poderia ser de 2,57 km/l a 2,71 km/l, levando, portanto, a uma decisão errada sobre a performance do motorista (um erro na construção do intervalo deve-se ao erro de estimação da média e do desvio padrão, embutido no cálculo do intervalo de tolerância). Portanto, o conjunto de todos os resultados possíveis será do tipo “acerta” = 1 o intervalo ou “erra” = 0, ou seja,  $\Omega = \{0, 1\}$  será o espaço amostral considerado.

Agora, considere  $Y(n)$  uma variável aleatória indicadora do evento “acerta” na  $n$ -ésima chamada, isto é,

$$Y(n) = \begin{cases} 1, & \text{se o } n\text{-ésimo intervalo está correto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para fixar idéias, considere intervalos de 95%. Cada intervalo de 95% construído pela central tem dois resultados possíveis, que serão sucesso= “acertar” e fracasso = “errar”, com as respectivas probabilidades iguais a  $p = 95\% = 0,95$  e  $q = 1-p = 5\% = 0,05$ .

Assim,  $Y(n)$  tem uma distribuição Bernoulli com parâmetro  $p$ , ou seja,  $Y(n) \sim \text{Bernoulli}(p=0,95)$  sendo a média dada por  $E[Y(n)] = p$  e a variância por  $\text{Var}[Y(n)] = pq$ .

Pode-se definir o número de acertos em  $n$  chamadas como sendo  $\sum_{i=1}^n Y(i)$ .

Sabe-se que  $\sum_{i=1}^n Y(i) \sim \text{Binomial}(n, p)$ , em que  $n$  é o número de chamadas recebidas na central. Além disso, a média é dada por  $E[Y(n)] = np$  e a variância por  $\text{Var}[Y(n)] = npq$ .

Seja  $X(n)$  uma variável aleatória definida pelo quociente entre o número

de acertos em  $n$  chamadas e as  $n$  chamadas, isto é,  $X(n) = \frac{\sum_{i=1}^n Y(i)}{n}$ . Logo,  $X(n) = \text{proporção de acertos em } n \text{ chamadas} = \hat{p}$ .

Mood et al. (1974) citam que  $\hat{p} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ , em que  $\xrightarrow{D}$  denota convergência em distribuição à medida que  $n$  tende ao infinito. Evidências empíricas sugerem que a convergência é satisfatória quando  $np$  e  $npq$  são ambos maiores que 5. Assim,

$$X(n) = \frac{\sum_{i=1}^n Y(i)}{n} = \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right).$$

Para verificar se a seqüência de intervalos corretos construídos ao longo da vida da central contra o desperdício tenderá a uma probabilidade  $p$  de acertos,

ou seja,  $X(n)$  converge estocasticamente a  $p$ , basta utilizar o teorema ergódico (citado anteriormente 2.2.3).

Usando o teorema ergódico, deve-se mostrar que:

- 1)  $X(n) \xrightarrow{P} p$ , ou seja, que  $X(n)$  converge em probabilidade a  $p$ ;
- 2) pressupondo-se que  $X(n)$  não são autocorrelacionados, deve-se verificar que  $\text{Var}[X(n)]$  tende a zero quando  $n$  tende a infinito.

Para mostrar  $X(n) \xrightarrow{P} p$ , será utilizado o seguinte corolário (Lei dos Grandes Números de Bernoulli) citado em James (2002): considere uma seqüência de ensaios binomiais independentes, tendo a mesma probabilidade  $p$  de “sucesso” em cada ensaio. Se  $S_n$  é o número de sucessos nos primeiros  $n$  ensaios, então,  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$ . Neste trabalho, o  $\frac{S_n}{n}$  é equivalente ao  $X(n)$ . Portanto, pode-se dizer que  $X(n) \xrightarrow{P} p$ , satisfazendo o item (1) do teorema ergódico.

Supondo-se  $X(n)$  não autocorrelacionados, para  $n = 1, 2, \dots$  tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pq}{n} = 0.$$

o que verifica o item (2) do teorema ergódico.

Portanto, pode-se dizer que  $X(n)$  converge para  $p$ . Isto é, que, ao longo de vida da Central Contra o Desperdício, a seqüência de intervalos construídos corretamente tende a uma probabilidade  $p$ . Graficamente, uma possível situação é apresentada na Figura 12, que se refere ao quociente entre o número de acertos de intervalos construídos ao longo da vida da central em  $n$  chamadas.

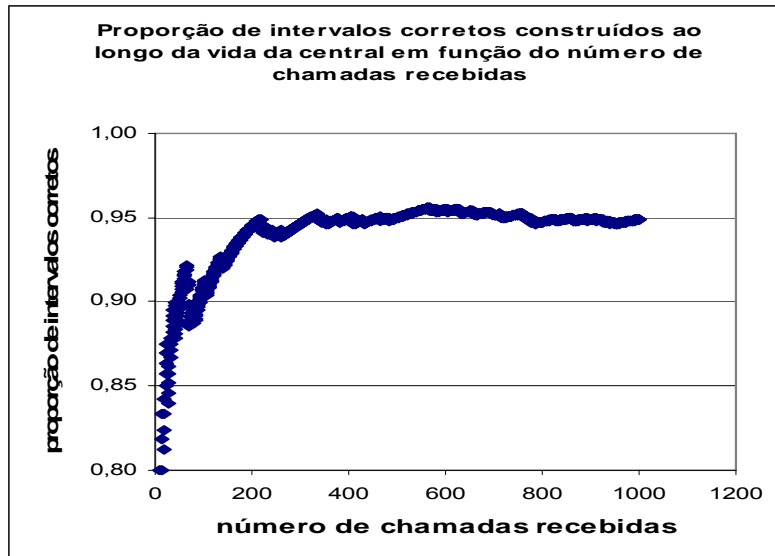


FIGURA 12 Proporção de intervalos corretos construídos ao longo da vida da central, em função do número de chamadas recebidas.

O gráfico apresentado na Figura 12 foi obtido por meio de uma simulação, em planilha eletrônica, da seguinte maneira:

- considerou-se  $p = 0,95$  (por exemplo, célula A1);
- numa coluna da planilha, por exemplo, coluna B, digitou-se os valores do  $n$  (ou seja, o número de chamadas recebidas na central), sendo  $n=1, \dots, 1000$ ;
- na coluna C, geraram-se 1.000 números aleatórios;
- na coluna D, obteve-se o valor de  $Y$  por meio do seguinte critério: se o número aleatório (coluna C)  $\leq 0,95(A1)$ , então, recebe 1; caso contrário, recebe 0. Essa coluna contém valores 0 ou 1;
- a coluna E contém os valores de  $X$  que são a soma acumulada dos valores  $Y$  dividida pelo número de chamadas recebidas na respectiva linha, ou

$$\text{seja, é o } X(n) = \frac{\sum_{i=1}^n Y(i)}{n};$$



f) o gráfico foi obtido plotando-se os valores de  $n$  com  $X$ .

#### **4.4 Aplicação do intervalo de tolerância no programa de direção econômica**

Para um melhor entendimento da aplicação da metodologia desenvolvida no decorrer do trabalho, será exemplificada, por meio de uma possível situação, utilizando-se a metodologia de intervalos de tolerância (IT) na central contra o desperdício, em que ela receba a chamada e imediatamente posiciona a situação do consumo de combustível.

Imagine que a CCD recebe, neste exato momento, uma chamada de um motorista, por exemplo, André XX. Ele passa as devidas informações necessárias para a central e é calculado o IT para o consumo, que é dado em km/l. Na Figura 13 está representada a aplicação do IT na CCD. Nota-se que, se o consumo estiver dentro dos valores estabelecidos nos limites de tolerância, o motorista é liberado para seguir viagem. Caso contrário, duas situações podem ocorrer:

a) se o consumo (em km/l) estiver acima do limite superior do IT: isso significa que o consumo foi bem menor do que deveria, logo, o motorista expõe possíveis motivos que o levaram a consumir menos (servindo como base para treinamento), é parabenizado e liberado para seguir viagem;

b) se o consumo estiver abaixo do limite inferior do IT: significa que o consumo foi maior do que deveria (considerado alto). Logo, deve haver um levantamento das possíveis causas e o veículo é levado para a manutenção.

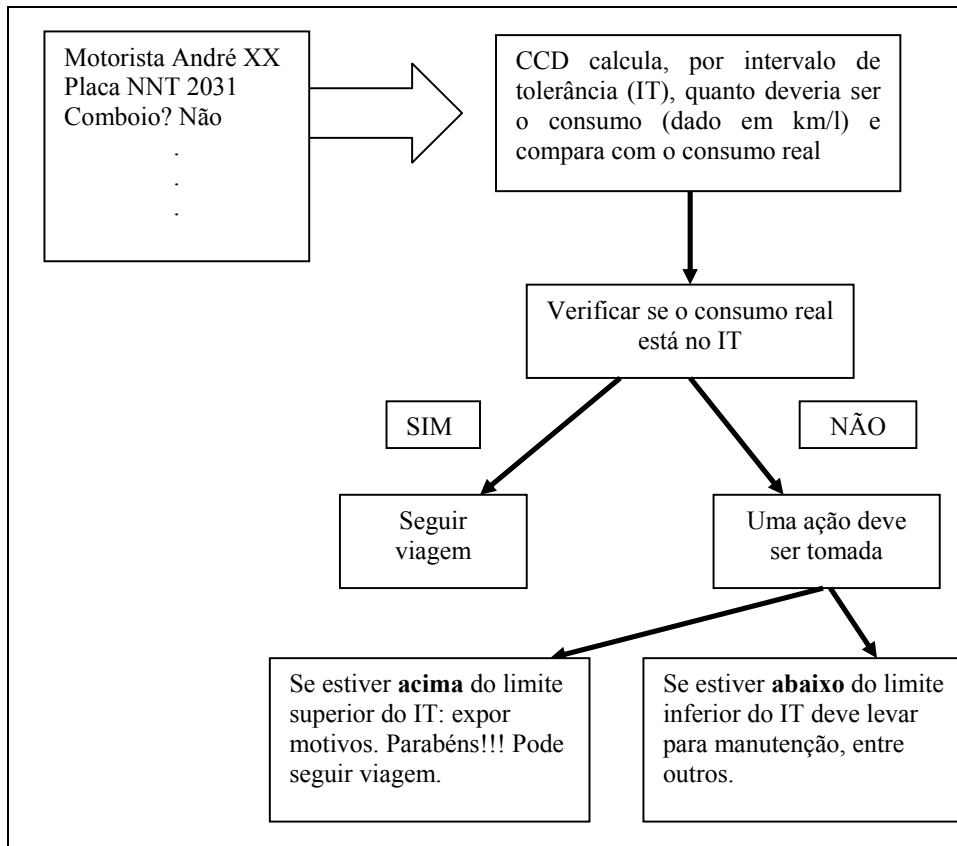


FIGURA 13 Aplicação do intervalo de tolerância na Central Contra o Desperdício

A seguir, serão apresentados dois exemplos ilustrativos hipotéticos, que procuram dar ao leitor a percepção de como seria a real operação de um programa de direção econômica estatisticamente embasado:

Exemplo 1:

- a) Suponha que, neste exato momento, a central CCD receba uma chamada do motorista André XX, informando seus dados de

abastecimento, para os quais o software de gestão da CCD dá um consumo de 2,49 km/l.

- b) Com o banco de dados gerado por simulação até a chamada anterior, obtiveram-se a média de consumo de 2,5117 km/l e o desvio padrão 0,1355 km/l, a partir dos quais determinam-se os limites de tolerância utilizando a expressão obtida em (27). O intervalo de tolerância obtido foi [1,9971 km/l; 3,0262 km/l].
- c) Agora, para tomar a decisão sobre o consumo do motorista André XX, o analista irá comparar o consumo real com os valores do intervalo de tolerância. Observa-se que o valor de 2,49 km/l está no intervalo, levando, então, a concluir que ele pode seguir viagem.

Exemplo 2:

- a) Suponha, como um outro exemplo, que o consumo de André XX foi de 1,354 km/l. Comparando esse valor com o IT obtido anteriormente, observa-se que o consumo está abaixo do limite inferior de tolerância, ou seja, o consumo foi inferior ao consumo tolerável. Logo, o motorista deve esclarecer possíveis causas que atuaram para aumentar o consumo e ou, então, levar o veículo para a manutenção.

Deve-se salientar que esses valores de abastecimento devem ser acrescentados ao banco de dados, sendo, então, gerado um novo IT, com o banco de dados atualizado. Esse processo iterativo repete-se a cada chamada, isto é, quando recebe uma nova chamada, procede-se analogamente à situação anterior. Observe que, no exato momento de cada chamada, toma-se a necessária decisão por meio da comparação do valor do consumo do motorista com o intervalo de tolerância obtido. Com isso, verifica-se que, para avaliar o consumo de

combustível, a empresa deve implantar um programa de direção econômica, fazendo um monitoramento on-line diário do gasto de combustível com sua frota de veículos. Assim, é possível intervir nas causas que estiverem atuando para elevar o consumo. Além disso, uma vez que se identificam e se eliminam as possíveis causas que estão atuando, consegue-se melhorar o sistema como um todo, produzindo um resultado que vai ao encontro dos anseios da organização.

## 5 CONCLUSÃO

a) Com a interpretação alternativa dos intervalos estatísticos freqüentistas, fica mais fácil o entendimento, principalmente, para os leigos em Estatística, pois não supõe-se que o experimento seja repetido inúmeras vezes.

b) A expressão obtida para calcular os limites de tolerância não depende dos fatores de tolerância  $k$  tabelados e pode-se obter fatores de tolerância para qualquer tamanho de amostra.

c) Utilizando os intervalos de tolerância, é possível verificar, no exato momento que a central CCD recebe a chamada, se o consumo de combustível é excessivo ou não. Em conseqüência, para obter um consumo de combustível ideal, o motorista deve ter a direção voltada para a economia e também dirigir conscientemente.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para avaliar o consumo de combustível, a empresa deve implantar um monitoramento on-line do gasto de sua frota. Se for alto, haverá um levantamento de motivos, uma possível reunião com o motorista para esclarecer a situação e conscientizá-lo e, em seguida, o veículo será levado para a manutenção. Portanto, a empresa deve investir na busca de melhorias nos processos envolvidos ao consumo de combustível, como, por exemplo, em um plano de manutenção de veículos, além de oferecer um programa de treinamento aos motoristas que estiverem gastando combustível acima da média. Adotando um programa de direção econômica, a empresa aumenta o rendimento médio de combustível de sua frota de caminhões, gerando uma economia mensal significativa. Em consequência, para obter um consumo ideal de combustível, o motorista deve ter a direção voltada para a economia, evitando acelerações bruscas, retomadas desnecessárias, utilizando os pontos ideais de troca de marchas e, também, dirigindo conscientemente. Assim, ocorrerão menos quebras nas mercadorias, os prazos das entregas serão cumpridos e haverá menos acidentes com os motoristas, além, é claro, de proporcionar um benefício ambiental, devido à redução do consumo de combustível.

Aqui toda a teoria utilizada foi baseada na distribuição normal. Porém, trabalhos futuros poderiam desenvolver toda a teoria de intervalos de tolerância baseando-se em outras distribuições, como, por exemplo, a distribuição binomial.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, D. R.; SWEENEY, D. J.; WILLIMAS, T. A. **Estatística aplicada à administração**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 642 p.

BARNETT, V. **Comparative statistical inference**. 2. ed. Chichester, 1982. 325 p.

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à inferência estatística**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 125 p.

BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. **Bayesian inference in statistical analysis**. New York: J. Wiley, 1992.

CARVALHO, D.L.; OLIVEIRA, P. C. **Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal**. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf>. > Acesso em: 10 dez. 2006.

CARVALHO, J. L.M.; TOLEDO, J. C. A contribuição dos programas da qualidade na competitividade: estudo de caso no mercado brasileiro de polipropileno. **Polímeros: Ciência e Tecnologia**, v. 12, n.4, p. 240-247, 2002.

CORDANI, L. K. **O ensino de estatística na universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. 2001. 142 p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. 2. ed. São Paulo: Ed. da USP, 2000. 253 p.

DEGROOT, M. H. **Probability and statistics**. 2.ed. Ontario: Addison-Wesley, 1989. 723 p.

ECONOMIZAR: um programa que garante ar mais em nossas cidades. Disponível em: <[http://www.fetranspor.com.br/revista\\_onibus/revista31\\_meio\\_ambiente.htm](http://www.fetranspor.com.br/revista_onibus/revista31_meio_ambiente.htm)> Acesso em: 10 mar. 2007.

EHLERS, R. S. **Introdução à inferência bayesiana**. Disponível em <<http://leg.ufpr.br/~ehlers/notas/bayes.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2008.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2001. V. 1, 380 p.

GARVIN, D. A. **Gerenciando a qualidade**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1992. 357 p.

GUIMARÃES, N. V. **Reduzindo o consumo**. Disponível em: <<http://www.revistaocarreteiro.com.br/ano2000/Edicao316/frota.htm>>. Acesso em: 05 jan. 2007.

HAHN, G. J.; MEEKER W. Q. **Statistical intervals: a guide for practitioners**. New York: J. Wiley. 1991. 392p.

HOEL, P. G. **Elementary statistics**. 4. ed. New York: J. Wiley, 1976. 361 p.

KATAOKA, V. Y. **Inferência baseada em intervalos estatísticos aplicada à segurança pública**. 2005. 137 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.

KING, D. W. **Statistical quality control using the SAS System**. Cary, NC: SAS Institute, 1995. 383 p.

KOLMOGOROV, A. N. **Foundations of the theory of probability**. New York: Chelsea, 1956. 84 p.

JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 299 p.

JATOBÁ, P. C. A análise de custos e a formação de preço de vendas. **Falando de Qualidade**, São Paulo, v.15, n. 149, p. 24-43, out. 2004.

JESUS, C. D. **Uma análise bayesiana para dados educacionais**. 2004. 145 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro/RJ. Disponível em: <<http://www.pg.im.ufrj.br/teses/Estatistica/Mestrado/101.pdf>> Acesso em 20 dez. 2006.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. São Paulo: Edusp, 2006. 428 p.



MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de probabilidade estatística**. 4. ed. São Paulo: Edusp, 2002. 392 p.

MISES, R. von. **Mathematical theory of probability and statistics**. New York: Academic Press, 1964.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4. ed. New York: J.Wiley, 2004. 513 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. Tokyo: McGraw Hill, 1974. 564 p.

O'HAGAN, A. **Kendall's advanced theory of statistics : bayesian inference**. New York: E. Arnold, 1994. V. 2B.

OLIVEIRA, M. S. **Qualidade na educação universitária**. 2000. 267 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

ORTOLANI, L. F. B. **Logística, gestão de estoques e sistemas de informação: instrumentos imprescindíveis para eficiência nas organizações públicas e privadas**. Disponível em: <<http://www.pr.gov.br/batebyte/edicoes/2002/bb121/logistica.htm>> Acesso em 30 dez. 2006.

PAPOULIS, A. **Probability, random variables, and stochastic processes**. Tokyo: McGraw-Hill, 1965. 583 p.

PATEL, J. K. Prediction intervals - a review. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, New York, v. 18, n. 7, p. 2393-2465, 1989.

PATEL, J. K. Tolerance intervals - a review. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, New York, v. 15, n. 9, p.2719-2762, 1986.

PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446 p.

PEDRINHO, A. F. Gestão da qualidade: uma premissa mundial. **Falando de Qualidade**, São Paulo, v. 14, n. 151, p. 76-77, dez. 2005.

PORTUGAL, A. C. Probabilidade e raciocínio científico. **Revista Episteme**, Porto Alegre, n. 18, p. 19-40, jan./jun. 2004. Disponível em:

<[http://www.ilea.ufrgs.br/episteme/porta1/pdf/numero18/episteme18\\_artigo\\_portugall.pdf](http://www.ilea.ufrgs.br/episteme/porta1/pdf/numero18/episteme18_artigo_portugall.pdf)>. Acesso em: 28 dez. 2006.

PRAZERES, P. M. **Dicionário de termos da qualidade**. São Paulo: Atlas, 1996. 421 p.

R Development Core Team (2008). The R manuals: current version: 2.6.2. 2008. Disponível em: <<http://www.r-project.org>> Acesso em: 2008.

RITSMAN, L. P.; KRAJEWSKI, L. J. **Administração da produção e operações**. Tradução de Roberto Galman. São Paulo: Prentice Hall, 2004. 431 p.

SAVAGE, L. J. **The foundations of statistics**. New York: Dover Publications, 1972.

SILVEIRA, G.L.; MACHADO, C.C.; SOUZA, A.P.; LEITE, H.G.; SANTOS, H.N.; FERNANDES, D. C. M. Avaliação de parâmetros de consumo de combustível do tritrem no transporte de madeira. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 28, n. 1, p. 99-106, 2004. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rarv/v28n1/a13v28n1.pdf>> Acesso em: 23 dez. 2007.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; HARLAND, C.; HARRISON, A.; JOHNSTON, R. **Administração da produção**. São Paulo: Atlas, 1997. 726 p.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por meios geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 20, p. 16-22, 1992.

WALD, A.; WOLFOWITZ, J. Tolerance limits for a normal distribution. **Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, v. 17, p. 208-215, 1946.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H. **Probability and statistics for engineers and scientists**. 3. ed. New York: MacMillan, 1985.

## **ANEXO**

TABELA A1 Fatores de tolerância para distribuição normal ..... 94

TABELA A1: Fatores de tolerância para distribuição normal

| $\gamma = 0,95$ |             |        |        | $\gamma = 0,95$ |             |       |       |
|-----------------|-------------|--------|--------|-----------------|-------------|-------|-------|
| n               | 1- $\alpha$ |        |        | n               | 1- $\alpha$ |       |       |
|                 | 0,90        | 0,95   | 0,99   |                 | 0,90        | 0,95  | 0,99  |
| 2               | 32,019      | 37,674 | 48,430 | 45              | 2,021       | 2,408 | 3,165 |
| 3               | 8,380       | 9,916  | 12,861 | 50              | 1,996       | 2,379 | 3,126 |
| 4               | 5,369       | 6,370  | 8,299  | 55              | 1,976       | 2,354 | 3,094 |
| 5               | 4,275       | 5,079  | 6,634  | 60              | 1,958       | 2,333 | 3,066 |
| 6               | 3,712       | 4,414  | 5,775  | 65              | 1,943       | 2,315 | 3,042 |
| 7               | 3,369       | 4,007  | 5,248  | 70              | 1,929       | 2,299 | 3,021 |
| 8               | 3,136       | 3,732  | 4,891  | 75              | 1,917       | 2,285 | 3,002 |
| 9               | 2,967       | 3,532  | 4,631  | 80              | 1,907       | 2,272 | 2,986 |
| 10              | 2,839       | 3,379  | 4,433  | 85              | 1,897       | 2,261 | 2,971 |
| 11              | 2,737       | 3,259  | 4,277  | 90              | 1,889       | 2,251 | 2,958 |
| 12              | 2,655       | 3,162  | 4,150  | 95              | 1,881       | 2,241 | 2,945 |
| 13              | 2,587       | 3,081  | 4,044  | 100             | 1,874       | 2,233 | 2,934 |
| 14              | 2,529       | 3,012  | 3,955  | 150             | 1,825       | 2,175 | 2,859 |
| 15              | 2,480       | 2,954  | 3,878  | 200             | 1,798       | 2,143 | 2,816 |
| 16              | 2,437       | 2,903  | 3,812  | 250             | 1,780       | 2,121 | 2,788 |
| 17              | 2,400       | 2,858  | 3,754  | 300             | 1,767       | 2,106 | 2,767 |
| 18              | 2,366       | 2,819  | 3,702  | 400             | 1,749       | 2,084 | 2,739 |
| 19              | 2,337       | 2,784  | 3,656  | 500             | 1,737       | 2,070 | 2,721 |
| 20              | 2,310       | 2,752  | 3,615  | 600             | 1,729       | 2,060 | 2,707 |
| 25              | 2,208       | 2,631  | 3,457  | 700             | 1,722       | 2,052 | 2,697 |
| 30              | 2,140       | 2,549  | 3,350  | 800             | 1,717       | 2,046 | 2,688 |
| 35              | 2,090       | 2,490  | 3,272  | 900             | 1,712       | 2,040 | 2,682 |
| 40              | 2,052       | 2,445  | 3,213  | 1000            | 1,709       | 2,036 | 2,676 |
|                 |             |        |        | $\infty$        | 1,645       | 1,960 | 2,576 |

Fonte: Walpole & Myers (1985)

TABELA A1, Cont.

| $\gamma = 0,99$ |             |         |         | $\gamma = 0,99$ |             |       |       |
|-----------------|-------------|---------|---------|-----------------|-------------|-------|-------|
| n               | 1- $\alpha$ |         |         | n               | 1- $\alpha$ |       |       |
|                 | 0,90        | 0,95    | 0,99    |                 | 0,90        | 0,95  | 0,99  |
| 2               | 160,193     | 188,491 | 242,300 | 45              | 2,200       | 2,621 | 3,444 |
| 3               | 18,930      | 22,401  | 29,055  | 50              | 2,162       | 2,576 | 3,385 |
| 4               | 9,398       | 11,150  | 14,527  | 55              | 2,130       | 2,538 | 3,335 |
| 5               | 6,612       | 7,855   | 10,260  | 60              | 2,103       | 2,506 | 3,293 |
| 6               | 5,337       | 6,345   | 8,301   | 65              | 2,080       | 2,478 | 3,257 |
| 7               | 4,613       | 5,488   | 7,187   | 70              | 2,060       | 2,454 | 3,225 |
| 8               | 4,147       | 4,936   | 6,468   | 75              | 2,042       | 2,433 | 3,197 |
| 9               | 3,822       | 4,550   | 5,966   | 80              | 2,026       | 2,414 | 3,173 |
| 10              | 3,582       | 4,265   | 5,594   | 85              | 2,012       | 2,397 | 3,150 |
| 11              | 3,397       | 4,045   | 5,308   | 90              | 1,999       | 2,382 | 3,130 |
| 12              | 3,250       | 3,870   | 5,079   | 95              | 1,987       | 2,368 | 3,112 |
| 13              | 3,130       | 3,727   | 4,893   | 100             | 1,977       | 2,355 | 3,096 |
| 14              | 3,029       | 3,608   | 4,737   | 150             | 1,905       | 2,270 | 2,983 |
| 15              | 2,945       | 3,507   | 4,605   | 200             | 1,865       | 2,222 | 2,921 |
| 16              | 2,872       | 3,421   | 4,492   | 250             | 1,839       | 2,191 | 2,880 |
| 17              | 2,808       | 3,345   | 4,393   | 300             | 1,820       | 2,169 | 2,850 |
| 18              | 2,753       | 3,279   | 4,307   | 400             | 1,794       | 2,138 | 2,809 |
| 19              | 2,703       | 3,221   | 4,230   | 500             | 1,777       | 2,117 | 2,783 |
| 20              | 2,659       | 3,168   | 4,161   | 600             | 1,764       | 2,102 | 2,763 |
| 25              | 2,494       | 2,972   | 3,904   | 700             | 1,755       | 2,091 | 2,748 |
| 30              | 2,385       | 2,841   | 3,733   | 800             | 1,747       | 2,082 | 2,736 |
| 35              | 2,306       | 2,748   | 3,611   | 900             | 1,741       | 2,075 | 2,726 |
| 40              | 2,247       | 2,677   | 3,518   | 1000            | 1,736       | 2,068 | 2,718 |
|                 |             |         |         | $\infty$        | 1,645       | 1,960 | 2,576 |

Fonte: Walpole &amp; Myers (1985)