



DANIEL FRANÇA FONSECA

**ASPECTOS ESTRUTURAIS E HISTÓRICOS
QUE RELACIONAM A MÚSICA E A
MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM
INTERDISCIPLINAR PARA A APLICAÇÃO DE
MÉDIAS, PROGRESSÕES E, EM ESPECIALOS
LOGARITMOS, NO ENSINO MÉDIO**

LAVRAS - MG

2013

DANIEL FRANÇA FONSECA

**ASPECTOS ESTRUTURAIS E HISTÓRICOS QUE RELACIONAM A
MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR
PARA A APLICAÇÃO DE MÉDIAS, PROGRESSÕES E, EM ESPECIAL OS
LOGARITMOS, NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora

Dra. Ana Cláudia Pereira

LAVRAS - MG

2013

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Fonseca, Daniel França.

Aspectos estruturais e históricos que relacionam a música e a matemática : uma abordagem interdisciplinar para a aplicação de médias, progressões e logaritmos, no Ensino Médio / Daniel França Fonseca. – Lavras : UFLA, 2013.

116 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.

Orientador: Ana Cláudia Pereira.

Bibliografia.

Mestrado Profissional em Matemática.

1. Matemática e música. 2. Escala pitagórica. 3. Escala temperada. 4. Logaritmos e música. 5. Temperamento igual. 6.

Inteligência musical. 7. Inteligência lógico-matemática. I.

Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 373.13078

DANIEL FRANÇA FONSECA

**ASPECTOS ESTRUTURAIS E HISTÓRICOS QUE RELACIONAM A
MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR
PARA A APLICAÇÃO DE MÉDIAS, PROGRESSÕES E, EM ESPECIAL OS
LOGARITMOS, NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 09 de setembro de 2013.

Dr. Mário Henrique Andrade Cláudio UFLA

Dr. Ricardo Menezes Salgado UNIFAL

Dra. Ana Claudia Pereira
Orientadora

LAVRAS - MG

2013

A Irani, meu pai,
pelo incentivo e auxílio na construção do monocórdio;
a Lídia, minha mãe,
pelo incentivo e apoio, principalmente para que eu volte aos meus estudos em
música;
a meu irmão André,
pelas discussões a respeito da educação brasileira.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Lavras e ao Departamento de Matemática, pela oportunidade concedida para a realização do Mestrado.

À Capes, pela concessão de bolsas de estudo.

Aos professores do Departamento de Matemática, pelos ensinamentos transmitidos e pela convivência.

À professora e orientadora Dra. Ana Cláudia Pereira, pela orientação, paciência, dedicação e seus ensinamentos que foram de grande relevância para a realização deste trabalho e meu crescimento profissional.

À gerente da Escola SESI Newton Antônio da Silva Pereira, Vanessa Leandra Dornellas G Ribeiro e à pedagoga Camilla de Lourdes Godinho, pelo incentivo, apoio e compreensão. Aos professores Cláudio Martines Ribeiro Filho e Ricardo Alan de Oliveira e Silva, pelo apoio na leitura e discussão pedagógica deste material.

À direção da Escola Municipal Mestre Paranhos, profa. Adriana Fonseca e profa. Simone Mazolli pelo incentivo, apoio e compreensão.

Aos amigos do Mestrado, em especial, Alexandre, Emílio, Rosan, Néder e Rodnei, pela companhia nos estudos e nas caronas para nossas aulas de sábado.

Ao amigo Maycon, pelas dicas, críticas, paciência, compreensão e apoio nas horas difíceis.

RESUMO

Investigou-se, neste trabalho, as relações entre a matemática e a música desde níveis básicos como a relação entre o comprimento de uma corda e as médias, até as relações com exponenciais e logaritmos. Para tanto, utilizou-se da história da música e da história da matemática para interagir com o professor e o estudante de uma maneira acessível e curiosa, no intuito de despertar o interesse pelo aprendizado do assunto e/ou até mesmo aprofundá-lo, auxiliando no ensino e na aprendizagem dessas duas áreas do conhecimento. No Capítulo 1, são apresentadas as justificativas que levaram à escrita deste trabalho apontando ainda seus objetivos. No Capítulo 2, como forma de introduzir o assunto ao estudante, e principalmente ao professor, são apresentadas as relações entre a música e a matemática. Neste capítulo, o enfoque na música se torna necessário para que pessoas leigas nesta área do conhecimento possam se familiarizar com termos, formas e conceitos musicais. Ainda dentro desta exposição, os conceitos matemáticos são apresentados aos leitores. No Capítulo 3, é apresentado um pequeno histórico dos logaritmos que servirá como apoio para a realização da atividade 4 e também para a compreensão da utilidade desta área da matemática, na organização da música contemporânea ocidental. Nos Capítulos 4 e 5, apoiado principalmente nos livros de Howard Gardner e Ivani Fazenda pretende-se mostrar que a ideia central deste trabalho é justificada teoricamente seja na relação entre as inteligências musical e lógico-matemática, seja na necessidade da modernização da didática e da interdisciplinaridade no ensino da Matemática. Assim, no capítulo 6, são apresentadas atividades (oficinas) que podem ser desenvolvidas com alunos de Ensino Médio, e com algumas adaptações para alunos do Ensino Fundamental – séries finais, as quais deverão propiciar a ampliação da visão do estudante para estas duas áreas do conhecimento e suas relações. Essas atividades envolvem exercícios teóricos e práticos de forma dinâmica, investigativa, desafiadora; e por serem contextualizadas, tornam-se interessantes e úteis.

Palavras-chave: Matemática e Música. Escala pitagórica. Escala temperada. logaritmos e música. Temperamento igual. Inteligência musical. Inteligência lógico-matemática.

ABSTRACT

This work investigated the relations between mathematics and music, from basic levels, such as the relation between the length of a string and the means, to the relations with exponentials and logarithms. For such, we used the history of music and of mathematics to interact with the teacher and the student in an accessible and curious manner with the intent to awaken the interest for learning the subject and/or even deepening it, aiding in the teaching and learning of these two knowledge areas. In Chapter 1, we present the justifications which lead to producing this work, pointing its objectives. In Chapter 2, as a manner of introducing the subject to the student, and especially to the teacher, we present the relations between music and mathematics. In this chapter, the focus in music becomes necessary so that people lay to this area may become familiar with the musical terms, forms and concepts. Still in this exposition, the mathematical concepts are presented to the readers. In Chapter 3, we present a short historical of logarithms which will serve as support for activity 4 in addition to the understanding of the use of this area in mathematics in organizing occidental contemporary music. In Chapters 4 and 5, supported mainly by Howard Gardner and Ivani Fazenda's books, we intend to show that the central idea of this work is theoretically justified in either relation between musical intelligences and logic-mathematical or in the need to modernize the didactics and interdisciplinarity in teaching mathematics. Thus, in Chapter 6, we present activities (workshops) which may be developed with High School students, and with a few adaptations for Grade School – final grades, which should propitiate the expansion of the students view for these two knowledge areas and its relations. These activities involve theoretical and practical exercises in a dynamic, investigative and challenging manner; and, for being contextualized, become interesting and useful.

Keywords: Mathematics and Music. Pitagorical scale. Temperate scale. Logarithms and music. Equal temperament. Musical intelligence. Logic-mathematic intelligence.

RESUMEN

En este trabajo se ha investigado sobre la relación entre las matemáticas y la música desde niveles básicos, como la relación entre la longitud de una cuerda y las medias, hasta las relaciones con exponenciales y logaritmos. Para ello se ha utilizado la historia de la música y de las matemáticas para interactuar con el profesor y el alumno de una manera accesible y atractiva, con el fin de despertar el interés en el aprendizaje de la materia e incluso profundizar en él, auxiliando en la enseñanza y en el aprendizaje de esas dos áreas del conocimiento. En el Capítulo 1 se presentan los motivos que condujeron a escribir este trabajo y se señalan sus objetivos. En el Capítulo 2, como forma de introducir el asunto al estudiante y, principalmente, al profesor, se presentan las relaciones entre la música y las matemáticas. En este capítulo, la focalización en la música se hace necesaria para que las personas legas en esta área del conocimiento puedan familiarizarse con términos, formas y conceptos musicales. Asimismo, dentro de esta exposición se presentan a los lectores los conceptos matemáticos. En el Capítulo 3 se presenta una breve historia de los logaritmos que servirá de apoyo a la realización de la actividad 4 y también para la comprensión de la utilidad de esta área de las matemáticas en la organización de la música contemporánea occidental. En los Capítulos 4 y 5, con fundamento principal en los libros de Howard Gardner y de Ivani Fazenda, se pretende mostrar que la idea central de este trabajo está justificada teóricamente bien en la relación entre las inteligencias musical y lógico-matemática, bien en la necesidad de la modernización de la didáctica y de la interdisciplinaridad de la enseñanza de las matemáticas. Así, en el Capítulo 6 se presentan actividades (talleres) que pueden llevarse a cabo con alumnos de enseñanza media, con algunas adaptaciones para alumnos de los últimos cursos de enseñanza primaria, las cuales deberán propiciar la ampliación de la visión del estudiante respecto de estas dos áreas del conocimiento y sus relaciones. Estas actividades incluyen ejercicios teóricos y prácticos de forma dinámica, investigadora, desafiadora; y por estar contextualizadas, resultan interesantes y útiles.

Palabras clave: Matemáticas y Música. Escala pitagórica. Escala templada. Logaritmos y música. Temperamento igual. Inteligencia musical. Inteligencia lógico-matemática.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Relação entre $1/2$ do comprimento de uma corda e sua frequência	17
Tabela 2	Relação entre $2/3$ do comprimento de uma corda e sua frequência	18
Tabela 3	Relação entre $3/4$ do comprimento de uma corda e sua frequência	18
Tabela 4	Relação entre o número natural N e $(N/2)^2$	31
Tabela 5	Comparação da PA de razão 1, com a PG de razão 2	31
Tabela 6	Comparação da PA de razão 1 com a PG de razão 10	33
Tabela 7	Primeira aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$	34
Tabela 8	Segunda aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$	34
Tabela 9	Terceira aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$	35
Tabela 10	Quarta aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$	35
Tabela 11	Relação entre o comprimento e a frequência de uma corda – sons consonantes	90
Tabela 12	Relação entre o comprimento e a frequência de uma corda - sons dissonantes	95
Tabela 13	Encontrando as notas musicais pelo percurso de quintas	98
Tabela 14	Relação entre a frequência das notas musicais da escala Pitagórica e da escala temperada	101

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Monocórdio	16
Figura 2	Escala musical natural	22
Figura 3	Escala musical diatônica	24
Figura 4	Escala musical temperada	28
Figura 5	Comparação entre as escalas pitagórica e temperada.....	29
Figura 6	Divisões da corda do monocórdio – relação entre o tom, a oitava, a quarta e a quinta.	89

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivo Geral	13
1.2	Objetivos específicos	13
1.3	Justificativa	14
2	RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA – UM BREVE HISTÓRICO	15
3	UM BREVE HISTÓRICO SOBRE OS LOGARITMOS	30
4	REFERENCIAL TEÓRICO	37
4.1	Inteligência Musical	37
4.2	Os Elementos da Composição Musical e os Componentes da Inteligência Musical	38
4.3	O desenvolvimento da Competência Musical	43
4.4	Características da Evolução Neurológica da Habilidade Musical ..	47
4.5	A Relação com outras Competências	51
4.6	A Inteligência Lógico-Matemática – A Colaboração de Piaget no Entendimento da Competência Lógico-Matemática	55
4.7	A Competência Lógico-Matemática através das Culturas	62
4.8	A Relação da Matemática com outras Competências	68
5	A QUESTÃO INTERDISCIPLINAR	72
5.1	A Interdisciplinaridade em seu desenvolvimento histórico	73
5.2	As características da Pluri, Inter, Multi e Transdisciplinaridade ...	76
5.2.1	A interdisciplinaridade em sua práxis	78
5.2.2	A Formação Docente	82
5.3	Razões para a Interdisciplinaridade	84
6	ATIVIDADES (OFICINAS)	87
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	REFERÊNCIAS	107
	ANEXOS	109

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, professores têm se deparado com questões pedagógicas que apontam para um ensino diferenciado e, portanto para uma mudança/quebra efetiva de paradigmas na Educação. Essas questões têm se desenvolvido nas pequenas instâncias, como por exemplo, dentro da escola, frente a um aluno questionador e, não mais, mero expectador e receptor de conteúdos, até mesmo nas instâncias maiores, envolvendo, por exemplo, e principalmente, o ENEM; como a forma mais utilizada de entrada no ensino superior.

Tais mudanças apontam que aqueles que não buscarem a inovação, que não utilizarem a tecnologia como recurso didático, que não buscarem a contextualização dos objetos de aprendizagem (conteúdos) e/ou que não entenderem a interdisciplinaridade como uma evolução, poderão estar fadados ao fracasso profissional/institucional nos próximos anos.

O estudo das relações entre matemática e música aponta-nos para mudanças, reforçando o aprendizado interdisciplinar e proporcionando ao aluno um conhecimento mais amplo da matemática e da música, e finalmente retirando a matemática de um campo puramente abstrato e distante do “necessário” em nossa vida cotidiana e/ou acadêmica. Ou seja, cada vez mais professores comprometidos com a verdadeira formação buscam novas abordagens para conquistar e atrair seus alunos, para que esses não sejam apenas simples máquinas de calcular ou máquinas de dividir compassos corretamente, decorando melodias e fórmulas, objetivando apenas sua aprovação no vestibular.

Este estudo, das relações entre matemática e música, apesar de não serem recentes em sua história, se fazem recentes no trabalho da Educação Matemática. Dessa forma, este trabalho, através de oficinas interessantes e até mesmo inusitadas para os alunos, propõe-se a introduzir, ou rerepresentar de uma maneira diferente, o ensino de médias, progressões e, em especial, o logaritmo

para alunos do Ensino Médio. Assim, espera-se que esses objetos de aprendizagem sejam mais significativos e compreensíveis aos estudantes.

1.1 Objetivo Geral

Objetivou-se, principalmente, neste trabalho elaborar uma aula para alunos do Ensino Médio, que relacione conceitos matemáticos como médias, progressões e, em especial, o Logaritmo, com a escala musical pitagórica e a escala musical temperada.

Dessa forma, pretende-se que esta aula contextualizada e as atividades propostas possam despertar nos alunos um desejo pelo aprendizado do Logaritmo e suas propriedades.

1.2 Objetivos específicos

Também pretende-se relacionar os seguintes temas:

- a) frações e a organização da música em compassos (divisão temporal);
- b) razões e a escala musical dos pitagóricos;
- c) organização da notação musical segundo uma estrutura matemática;
- d) temperamento igual e temperamento desigual;
- e) a escala musical e o logaritmo.

Do ponto de vista histórico, o presente trabalho visa refletir sobre as concepções anteriormente mencionadas ao eixo matemática/música revelando, a partir da comparação das trajetórias das ciências e das artes referidas, esquemas comuns na dinâmica de construção de significados.

Observando as trajetórias da matemática e da música, o trabalho procura revelar analogias e similaridades no desenvolvimento de conceitos considerados exclusivos às áreas referidas.

1.3 Justificativa

Este trabalho surge, inicialmente, da investigação com alunos do Ensino Médio, principalmente de 2º e 3º anos, que, em sua maioria, afirmam não ter assimilado logaritmos no 1º ano ou afirmam não terem entendido o significado de aprendê-lo. Além disso, as progressões aritmética e geométrica, base para entender as operações logarítmicas e seu significado são trabalhadas no início do 2º ano do Ensino Médio, sendo de grande valia aproveitar esse momento para rever logaritmos em uma abordagem interdisciplinar.

Também vale ressaltar que a junção entre os conceitos de matemática e música intrigaram-me desde o início de minha formação em matemática e que, posteriormente, despertaram-me o interesse em aplicá-los na sala de aula.

Ao entender as relações entre matemática e música, e isso me foi possível, pois tenho formação técnica em música, percebi o grande potencial para “alcançarmos” os alunos de uma forma mais próxima da sua realidade e de como a grande maioria dos professores de matemática da escola básica estão distantes desta possibilidade por não terem um conhecimento básico da teoria musical.

Dessa forma, acredito que atividades que envolvam música e matemática possam tornar o ensino de logaritmos, e de outros temas, mais interessantes e contextualizados, despertando no aluno o desejo pelo aprendizado desses conceitos. Ao mesmo tempo, espera-se que a parte teórica do trabalho e das atividades permita que professores leigos em conceitos musicais possam ainda assim compreender e utilizar essas atividades em suas aulas.

2 RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA – UM BREVE HISTÓRICO

A relação existente entre matemática e música não é evidente e clara. Portanto, faz-se necessária uma discussão dos aspectos históricos e teóricos dessas duas ciências e dos momentos em que essa relação se apresenta.

Acredita-se que o início da percepção das relações entre matemática e música perde-se no tempo, uma vez que povos da Antiguidade já possuíam manifestações das duas áreas separadamente, como cita Abdounur (2002, p. VII)

[...] o poder conquistador supra-humano da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu, cujo canto acompanhado de lira sustava rios, amansava feras e movia pedras. A matemática também se faz presente desde os tempos mais remotos, por exemplo, na contagem de objetos.

Assim, é natural pensarmos que, em algum momento, o homem tenha começado a conjecturar relações entre a matemática e a música, apesar de não podermos afirmar ao certo quando isso começa, como cita Abdounur (2002, p. VII-VIII)

[...] referente a um osso de urso com idade entre 43.000 e 82.000 anos [...] apresentando uma configuração de buracos capaz de produzir intervalos musicais de tons e semitons, elementos fundamentais da escala diatônica moderna

[...] o que já mostraria preocupações matemáticas quando de sua confecção. Porém, tais considerações não passam de conjecturas.

O primeiro registro científico que se tem conhecimento da relação entre matemática e música data de, aproximadamente, VI a.C, na escola Pitagórica, em que Pitágoras de Samos realiza experimentos com um monocórdio,

instrumento composto por uma única corda, provavelmente inventado por ele, e onde é possível realizar divisões desta corda, fazendo vibrar partes (frações) da mesma, como descreve Abdounur (2002, p. 4).

[...] o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções. A princípio, seus experimentos evidenciavam relações entre comprimento de uma corda estendida e a altura musical do som emitido quando tocada.

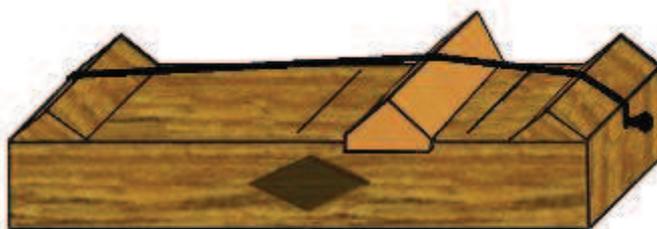


Figura 1 Monocórdio

Fonte: Instrumentos... (2006)

Assim, Pitágoras observou que, ao pressionar a corda no ponto central, colocando o cavalete móvel neste ponto (calço) e tocando uma de suas metades, obtinha-se um som equivalente¹ao original (a mesma nota uma oitava² acima, e utilizarmos a notação moderna). Hoje, sabemos que essa equivalência significa

¹ Duas notas são equivalentes se diferirem em intervalo por um número inteiro de oitavas.

² Na escala moderna existem 7 notas naturais: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si. A oitava nota, deve ser a repetição da primeira, e portanto nessa sequência seria um outro dó, mas com a frequência dobrada em relação ao primeiro dó. Assim, quando uma mulher ou criança acompanha um homem cantando, isso ocorre por uma diferença de oitava, o que nos leva a considerar como equivalentes notas que difiram por um número de oitavas.

que a nota emitida pela metade de uma corda tem frequência³ duplicada em relação à frequência da corda original. Assim, temos as seguintes relações entre os comprimentos e as frequências destas cordas.

Tabela 1 Relação entre 1/2 do comprimento de uma corda e sua frequência

Comprimento da corda (X)	Frequência (f)
X	f
X/2	2f

Este é considerado o intervalo mais consonante em música, ou seja, os dois sons emitidos simultaneamente são agradáveis aos ouvidos, parecem “casar-se” perfeitamente. Então, as notas diferenciadas por intervalos de oitavas apresentam certa equivalência, como aborda Abdounur (2002, p. 9)

[...] notas diferenciadas por intervalos de oitava apresentam [...] uma espécie de classe de equivalência musical da seguinte forma: duas notas são equivalentes, se o intervalo definido por elas for um número inteiro de oitavas. Sob essa ótica, as distintas oitavas reduzem-se apenas a uma, possuindo portanto cada nota, notas equivalentes em todas as outras oitavas, e particularmente naquela referencial.

Dessa forma, Pitágoras começa a observar a emissão de outros sons a partir de outras frações da corda, como por exemplo, colocando o cavalete móvel a 1/3 do final da corda e tocando os 2/3 restantes dela. Esse novo som produzido é consonante aos dois primeiros sons obtidos, o original e a oitava, e sua relação de comprimento e frequência com a corda original é:

³ O termo frequência ainda não era conhecido no período em questão. Utilizamos como forma de simplificar a compreensão do discurso. Atualmente, sabemos que comprimento e frequência são grandezas inversamente proporcionais.

Tabela 2 Relação entre 2/3 do comprimento de uma corda e sua frequência

Comprimento da corda (X)	Frequência (f)
X	f
2X/3	3f/2

Já a relação de comprimento e frequência desse novo som produzido, com a oitava é:

Tabela 3 Relação entre 3/4 do comprimento de uma corda e sua frequência

Comprimento da corda (X)	Frequência (f_1)
2X/3	f_1
3X/4	$4f_1/3$

Estes quatro sons produzidos pela vibração dos seguintes comprimentos da corda: X, X/2, 2X/3 e 3X/4 (tabelas 1, 2 e 3), são todos consonantes entre si e são chamados de consonâncias pitagóricas. A descoberta desses intervalos é atribuída a Pitágoras, mas provavelmente já fossem conhecidos em diversas culturas antigas.

Esta descoberta mostrou-se significativa para os pitagóricos, uma vez que a relação entre matemática e consonância em música envolvia razões de números inteiros. E mais ainda, essas consonâncias estavam relacionadas por razões de pequenos números inteiros, entre 1 e 4, ou seja, aquelas em que as razões entre as frequências são: 1/1 ; 2/1 ; 3/2 ; 4/3; fato que os deixaram vislumbrados como cita Abdounur (2002, p. 6-7)

[...] Os pitagóricos consideravam o número quatro – primeiro quadrado par – origem de todo o universo, todo o mundo material, representando a matéria em seus quatro elementos integradores: o fogo, o ar, a terra e a água. A importância do número quatro para os pitagóricos emerge

ainda no cenário musical ao considerar o tetracorde – sistema de quatro sons, [...] como escala mais elementar e unidade fundamental da música grega.

E ainda, acusticamente, cita Abdounur (2002, p. 6)

Tais intervalos mostram-se naturais ao ouvido humano, pois estabelecem configurações de onda compostas por relações de pulsações simples – 1 contra 2, 2 contra 3 e 3 contra 4. Em linguagem cartesiana Descartes (1961), tal característica cansaria menos o ouvido, já que, na onda resultante, o número de pulsos a serem percebidos diminui em função das coincidências.

Também acredita-se que Pitágoras teria feito marcas na corda que a dividia em doze secções iguais; e que, ao tocar a corda na 6^a marca, na 8^a marca e na 9^a marca encontrou os sons que citamos acima, já que essas marcas são equivalentes às frações $x/2$, $2x/3$ e $3x/4$. E que, ao tocar outras marcas dessa corda encontrou sons dissonantes ou, pelo menos, não tão consonantes como os anteriores.

Os números 12 (comprimento original da corda que foi dividida em 12 partes), 9, 8 e 6, constituíam portanto, um tetracorde muito interessante por suas propriedades aritméticas pois verifica-se que: 9 é a média aritmética entre 12 e 6, e 8 é a média harmônica⁴ entre 12 e 6.

$$9 = \frac{12+6}{2} \quad \text{pois} \quad m = \frac{a+b}{2}$$

(m = média aritmética entre dois números)

⁴ A média harmônica entre números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é definida como sendo o inverso da média aritmética dos seus inversos ou alternativamente é o número de termos dividido pela soma do inverso dos termos. Está relacionada com situações envolvendo grandezas inversamente proporcionais, como por exemplo, na relação entre velocidade e tempo.

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) \quad \text{pois} \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

(h = média harmônica entre dois números)

E ainda, $12.6=9.8$; que é uma propriedade geral da média aritmética e da média harmônica, ou seja $ab = hm$

Bem, portanto chegamos ao seguinte questionamento: esses quatro sons seriam suficientes, ou os únicos conhecidos, capazes de gerar todos os acordes e músicas do planeta? Haveria outras notas musicais consonantes?

A resposta para esses questionamentos seria negativa se observarmos, entre os povos orientais, escalas com mais sons, como cita Abdounur (2002, p. 3-4): “[...] a China desenvolveu desde a Antiguidade as sequências pentatônicas chinesas [...] correspondentes às cinco primeiras notas [...] Já os árabes elaboraram escalas com 17 notas e os hindus com 22”.

Trataremos, a partir de agora, para facilitar a linguagem e a compreensão, esses sons por seus nomes modernos: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si. Vale ressaltar que essa nomenclatura que conhecemos para as sete notas musicais surgem somente na Idade Média, por iniciativa de um monge italiano Guido D'Arezzo (995 – 1050) regente do coro da Catedral de Arezzo (Toscana), conforme citado em Como... (1987)

[...] Os nomes usados para designar as notas musicais tiveram origem nas letras dos diferentes alfabetos, como ainda hoje se usa nos países anglo-saxões, onde o A corresponde ao lá, o B ao si, o C ao dó, o D ao ré, o E ao mi, o F ao fá e o G ao sol. Nos países latinos e eslavos, a denominação das notas musicais deve-se ao monge italiano Guido D'Arezzo, que viveu no século XI. Em seus tratados, ele idealizou um sistema para recordar os tons das sete notas. Para isso, usou as sílabas iniciais de cada verso do Hino a São João Batista: Ut que antlaxis/Resonarefibris/Miragestorum/Famulituorum/Solvep olluit/Labiireatum/SanctiIonnis.

Assim surgiram ut, ré, mi, fá, sol, lá – e o si, formado pelas iniciais do nome do santo. Seis séculos mais tarde, em 1693, o nome ut, que era difícil de pronunciar no solfejo – leitura ou entonação dos nomes das notas de uma peça musical – foi substituído por dó.

Voltemos então às razões entre as frequências $1/1$; $2/1$; $3/2$; $4/3$. Observa-se que essas razões são equivalentes aos seguintes números decimais $1,0 - 2,0 - 1,5$ e $1, \bar{3}$ respectivamente; ou, em ordem crescente $1,0 - 1, \bar{3} - 1,5 - 2,0$. Assim, poderíamos questionar se existem outros números decimais entre 1 e 2 correspondentes a razões entre frequências de notas que simultaneamente produziram consonâncias.

À procura destas outras notas, os pitagóricos realizaram o seguinte procedimento: de uma nota qualquer eles subiam ou desciam uma quinta justa (o que equivale a multiplicar ou dividir a frequência da nota por $3/2$ atingindo uma nova nota). A partir dessa nova nota subiam ou desciam novamente uma quinta justa. Se alguma nota obtida neste procedimento ficasse acima de uma oitava em relação à nota original, eles dividiam-na por 2 e portanto faziam com que essa nota ficasse dentro do intervalo de oitava inicial do processo. Caso uma das notas ficasse abaixo da nota original, multiplicavam-na por 2 para que a mesma ficasse dentro do intervalo de oitava inicial do processo.

Podemos enunciar o processo de forma mais simples, sendo: “Tome uma razão conhecida e multiplique-a ou divida-a por $3/2$. Se o número obtido for maior que 2, tome sua metade. Se for menor, dobre-o”.

Tomemos o seguinte exemplo. Pegamos a nota fá, com frequência em relação a ela mesma como $1/1$ ou em forma decimal $1,0$.

Ao multiplicarmos por $3/2$ atingimos a frequência $1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Assim encontramos a nota do, já pertencente às consonâncias pitagóricas.

Ao multiplicarmos essa frequência por $3/2$ encontramos:

$\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, que na forma decimal é equivalente a 2,25. Esta nova nota estaria fora do intervalo de oitava cujas frequências vão de 1,0 a 2,0. Portanto divide-se por 2 esta frequência, encontrando uma nota equivalente a essa mas que está dentro do intervalo sugerido.

Assim temos $\frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$ que na forma decimal é equivalente a 1,125, equivalente à nota sol.

Dessa maneira, fazendo relação de comprimentos $2/3$ do anterior, como os pitagóricos, (ou pensando em frequência, fazendo $3/2$ da frequência anterior), encontramos a seguinte sequência: fá, do, sol, ré (uma oitava acima do intervalo original), lá, mi (uma oitava acima do intervalo original) e si.

Remanejando todas as notas para a oitava de referência (inicial) teremos: do, ré, mi, fá, sol, lá e si.

Esta sequência, formada de quintas puras⁵ é denominada *gama pitagórica* e o processo utilizado para encontrá-las é denominado *percurso de quintas* – caminhar quintas ascendentes e quartas descendentes de modo a limitar-se somente ao intervalo da oitava de referência sem a repetição de notas.

Assim, obtém-se em notação moderna e utilizando a nota dó, como ponto inicial, a seguinte configuração:

<i>dó</i>	<i>ré</i>	<i>mi</i>	<i>fá</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>dó</i>
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Figura 2 Escala musical natural

Mesmo o mi e o si apresentando razões de números relativamente grandes para o pensamento da escola pitagórica, essa gama foi utilizada por toda a Idade Média, vindo a ser modificada somente a partir do século XVI.

Então, ao fazer o *percurso de quintas*, em algum momento, esse percurso encontrará uma nova nota equivalente à nota inicial do processo, fechando um ciclo, e finalmente, encontrando todas as notas musicais e suas respectivas frequências?

A resposta para essa pergunta é não. Isso não acontece para a escala pitagórica. E matematicamente (algebricamente) é fácil percebermos essa negativa. Os intervalos de quinta pitagóricos associam-se a relações de frequência $3/2$. Portanto, após percorrer n quintas puras, a nota alcançada corresponderá a uma frequência multiplicada por $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Enquanto isso, os intervalos de oitavas naturais associam-se à relações de frequência 2. Portanto após percorrer m oitavas naturais, a nota alcançada corresponderá a uma frequência multiplicada por 2^m . Assim, um número inteiro de quintas puras⁵ nunca equivalerá a um número inteiro de oitavas naturais. Ou seja, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 2^m$, para todo m e n inteiros.

O valor que mais aproxima tal desajuste ocorre após 12 quintas puras e 7 oitavas, como explica Abdounur (2002, p. 12)

[...] pois $2^7 = 128$ é aproximadamente $129,746 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ [...] 7 e 12 apresentam-se respectivamente como pequenos valores inteiros de m e n que tornam a relação $\left(\frac{3}{2}\right)^n : 2^m = 3^n : 2^{m+n}$ mais próxima da unidade.

Assim, conclui-se que, partindo-se da nota dó e utilizando o percurso de quintas (na nomenclatura moderna temos dó, sol, ré, lá, mi, si, fá#, dó#, sol#, ré#, lá#, fá, dó), o ciclo não se fecha, existindo essa pequena diferença entre 12 quintas puras e 7 oitavas naturais, cujo valor é de $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = 1,01364326 \neq 1$. (Ou

⁵ Intervalo assim chamado por separar cinco notas musicais. O intervalo é equivalente ao vibrar de uma corda seguida da vibração de $2/3$ dessa mesma corda.

A partir dessa situação, que dificultava a afinação de instrumentos, na execução de músicas com diversas escalas e até mesmo na construção deles, é que surge a necessidade do temperamento⁶, como cita Abdounur (2002, p. 13)

[...] Uma possível solução para o desajuste entre os ciclos referidos consiste em “diminuir” algumas ou todas as quintas de modo a adequar a superposição de tais intervalos a um número inteiro de oitavas, resultando num tipo de temperamento.

Ou seja, frente a essa limitação da escala pitagórica, que apresenta-se como o temperamento mais antigo utilizado no Ocidente, algumas alternativas foram propostas.

Essas propostas percorreram toda a Idade Média desde os anos 800 d.C. até o início do Renascimento, onde se observam grandes mudanças na música ocidental. Por volta do século IX, começam a surgir as primeiras músicas polifônicas⁷. E com a evolução da música polifônica, o temperamento torna-se cada vez mais necessário conforme explica Abdounur (2002, p. 81-82)

[...] A trajetória trilhada pela música ocidental conduzia a música à liberdade de modulação⁸ não apenas para tonalidades próximas, mas para distintos cenários tonais [...]. [...] fazia-se necessária uma certa simetria [...] sem a qual a mudança de tom poderia resultar numa escala com intervalos demasiadamente impuros.

Uma solução apontava para a utilização de pianos com mais teclas, mas essa tarefa apontava-se como tecnicamente impossibilitada. Ou seja, a música

⁶ Afinação de uma escala em que todos ou quase todos os intervalos resultam ligeiramente imprecisos, porém sem que fiquem distorcidos (SADIE, 1994, p. 938).

⁷ Polifonia – termo derivado do grego, significando “vozes múltiplas”, usado para a música em que duas ou mais linhas melódicas (vozes ou partes) soam simultaneamente (SADIE, 1994, p. 733).

⁸ Na música tonal, o movimento que leva uma tonalidade a outra, num processo musical contínuo (SADIE, 1994, p. 612).

polifônica que expande a tonalidade⁹ desenvolvida por Bach, a dificuldade técnica de construção de pianos com aproximadamente 2400 sons, as *sonatas* – forma musical que estabelece mudanças de tonalidade – e ainda a livre transposição sem a necessidade da reafinação dos instrumentos contribuí fortemente para o Temperamento¹⁰ – temperamento igual – postulado por teóricos do século XVI e recomendado por Rameau (1737) e Carl Philipp Emanuel Bach (1762 – filho de Johannes Sebastian Bach) nos séculos XVIII e XIX.

Assim, a matemática, sob uma ótica a favor da solução do problema e não da discussão do mesmo, aponta para a alternativa de construir uma escala igualmente distribuída em 12 partes no intervalo de oitava, que foi denominada de *escala temperada*.

Cabe ainda perguntar por que dividir em 12 partes iguais se o ouvido humano é capaz de distinguir até 300 sons diferentes dentro de uma oitava?

Segundo Abdounur (2002) provavelmente, a divisão procedeu-se dessa forma por respeito a uma certa continuidade na escala grega que apresentava máxima aproximação da nota inicial, após 12 percursos de quintas, referentes portanto às 12 notas.

Então, o procedimento para encontrarmos essa escala temperada é: inserimos 11 termos geométricos entre o som fundamental e a sua oitava. Como o som fundamental é considerado de frequência 1 e sua oitava de frequência 2, podemos considerar a sequência entre o som fundamental e sua oitava como

⁹ Termo que designa a série de relações entre notas, em que uma em particular, a “tônica”, é central. Também tem implicações mais amplas, especialmente no que diz respeito às relações funcionais de outras notas e acordes com a tônica (SADIE, 1994, p. 953).

¹⁰ Também conhecido como temperamento igual, já era postulado por teóricos do séc.XVI, e passou a prevalecer, cada vez mais, durante os sécs.XVIII e XIX. Esse sistema é baseado na divisão da 8ª em 12 semitons iguais. A uniformidade dos semitons significa que todos os outros intervalos são temperados, em relação com suas razões de frequência. Essa é a afinação padrão da música ocidental hoje.

uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $2^0 = 1$ e o último termo é $2^1 = 2$. Assim, todas as outras notas teriam frequências iguais a 2^m , em quem varia de 0 a 1.

Para se obter a razão dessa progressão pela fórmula do termo geral de uma PG, temos que:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$2 = 1q^{13-1}$$

$$2 = q^{12}$$

$$q = \sqrt[12]{2}$$

Assim, as notas ficam com as seguintes frequências nesse temperamento igual:

$$\text{Do} = 1$$

$$\text{do\#} = \text{réb} = 2^{1/12}$$

$$\text{ré} = 2^{2/12}$$

$$\text{ré\#} = \text{mib} = 2^{3/12}$$

$$\text{mi} = 2^{4/12}$$

$$\text{fá} = 2^{5/12}$$

$$\text{fá\#} = \text{solb} = 2^{6/12}$$

$$\text{sol} = 2^{7/12}$$

$$\text{sol\#} = \text{láb} = 2^{8/12}$$

$$\text{lá} = 2^{9/12}$$

$$\text{lá\#} = \text{sib} = 2^{10/12}$$

$$\text{si} = 2^{11/12}$$

$$\text{dó} = 2^{12/12} = 2$$

E portanto, a escala temperada permitiria um ciclo, conforme a figura abaixo.

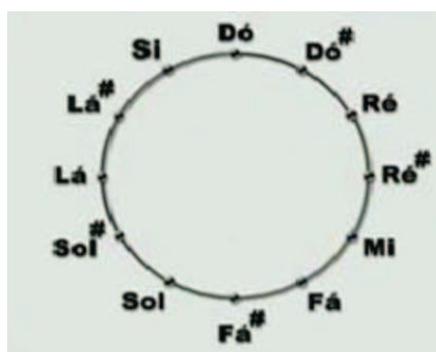


Figura 4 Escala musical temperada

Esta escala temperada resolve os problemas técnicos, em detrimento de uma afinação natural, conforme explica Abdounur (2002, p. 93)

A gama temperada serviu como um meio termo nas afinações de distintas tonalidades no sentido de abdicar de uma afinidade harmônica absoluta em algumas tonalidades em detrimento de uma qualidade bastante insatisfatória dessa propriedade em outras, para assumir uma certa "impureza harmônica", equivalentemente tolerável em todas as tonalidades.

A tabela a seguir mostra a frequência de algumas notas nas escalas pitagórica e temperada

Comparação entre as escalas pitagórica e temperada				
Nota	Relação de frequência (Pitagórica)	Freq (Hz)	Relação de frequência (temperada)	Freq (Hz)
Dó	1,000	132,000	1,000	132,000
Dó #	1,053	139,061	1,059	139,788
Ré _b	1,067	140,958	1,059	139,788
Ré #	1,125	148,500	1,122	148,104
Ré #	1,185	156,444	1,189	156,948
Mi _b	1,200	158,578	1,189	156,948
Mi	1,265	167,062	1,260	166,320
Fá _b	1,265	167,062	1,260	166,320
Mi #	1,332	175,999	1,335	176,220
Fá	1,333	176,000	1,335	176,220
Fá #	1,404	185,415	1,414	186,648
Sol _b	1,423	187,945	1,414	186,648
Sol	1,500	198,000	1,498	197,736
Sol #	1,580	208,592	1,587	209,484
Lá _b	1,601	211,438	1,587	209,484
Lá	1,687	222,750	1,682	222,024
Lá #	1,777	234,666	1,782	235,224
Si _b	1,801	237,867	1,782	235,224
Si	1,898	250,593	1,888	249,216
Dó _b	1,898	250,593	1,888	249,216
Si #	1,999	263,999	2,000	264,000
Dó	2,000	264,000	2,000	264,000

Figura 5 Comparação entre as escalas pitagórica e temperada

Estes valores são facilmente calculados atualmente graças à existência das calculadoras científicas. Mas no século XVI e XVII, encontrar o valor da razão $q = \sqrt[12]{2}$, que definiria a razão de frequência de uma nota para a próxima, não era simples. É aqui que entra o logaritmo para facilitar esse cálculo.

3 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE OS LOGARITMOS

No final do século XVI, com o desenvolvimento da Astronomia da Navegação e do Comércio, que necessitavam de extensos e trabalhosos cálculos aritméticos, vários matemáticos começam a investigar uma maneira que permitisse realizar essas operações com mais agilidade.

Neste período, as operações eram classificadas em três espécies:

1ª espécie: adição e subtração

2ª espécie: multiplicação e divisão

3ª espécie: potenciação e radiciação

Assim, a ideia inicial era transformar operações de 2ª e 3ª espécies em operações de 1ª e 2ª espécie, respectivamente. Ou seja, era necessário encontrar uma função¹¹ que transformasse produto em soma, divisão em subtração, potenciação em multiplicação e radiciação em divisão.

Para efetuar, por exemplo, a multiplicação 1525 x 321, usava-se a seguinte fórmula:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Esta expressão é facilmente demonstrada, pois basta que desenvolvamos os produtos notáveis do 2º membro e teremos:

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} - \frac{x^2 - 2xy+y^2}{4} = \frac{x^2+2xy+y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{4} = x \cdot y$$

¹¹ A invenção dos logaritmos foi anterior à introdução do conceito de função na Matemática.

Assim, para o exemplo dado, efetuava-se o cálculo:

$$1525 \times 321 = \left(\frac{1846}{2}\right)^2 - \left(\frac{1204}{2}\right)^2$$

e depois localizavam-se esses resultados na seguinte tabela:

Tabela 4 Relação entre o número natural N e $(N/2)^2$

N	...	1203	1204	1205	...	1846
$(N/2)^2$...	361802,25	362404	363006,25	...	851929

Logo,

$$1525 \times 321 = \left(\frac{1846}{2}\right)^2 - \left(\frac{1204}{2}\right)^2 = 851929 - 362404 = 489525$$

Outra possibilidade de reduzir uma multiplicação a uma adição foi constatada ao se comparar os termos de uma progressão aritmética aos termos de uma progressão geométrica. Esse método, conhecido como relação de Stifel por conta de seu inventor, Michael Stifel (1487 – 1567), apresenta uma ideia muito simples e foi utilizada por John Napier para definir o conceito de logaritmo, e posteriormente organizado em tábuas logarítmicas por Briggs (conhecidas hoje por logaritmos de base 10).

Tabela 5 Comparação da PA de razão 1, com a PG de razão 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Observemos o exemplo onde comparamos os termos de uma progressão aritmética de razão 1 (linha 1) e os termos de uma progressão geométrica de razão 2 (linha 2), conforme a Tabela 5.

Para multiplicar dois termos da progressão geométrica, (por exemplo, 8×128), basta adicionarmos os seus correspondentes na progressão aritmética, (nesse caso $3+7$) e observar qual termo da progressão geométrica corresponde a essa soma, e portanto encontramos 1024. Assim, $8 \times 128 = 1024$.

Reescrevendo essa ideia na base 2, tem-se:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	(Progressão Geométrica)
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(Progressão Aritmética)

E, portanto: $8 \times 128 = 2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10} = 1024$

Já reescrevendo de uma forma geral, tem-se:

$a, a^2, a^3, a^4, \dots, b$ (Progressão Geométrica de razão a)

$1, 2, 3, 4, \dots, m$ (Progressão Aritmética de razão 1)

Diz-se:

$$a^m = b$$

Reescrevendo na forma de logaritmo

$$\log_a^b = m$$

Assim, diz-se que m é o logaritmo de b na base a , onde a , b e m são números reais que satisfazem as condições $a > 0$, e $a \neq 1$ e $b > 0$

Partindo dessa ideia e tomando uma progressão geométrica de razão 10, vamos encontrar o valor de m , tal que $10^m = 2$.

Assim, temos a seguinte tabela:

Tabela 6 Comparação da PA de razão 1 com a PG de razão 10

1	2	...	10	Progressão aritmética
10^0	10^m	...	10^1	Progressão geométrica

Como, $10^0 < 10^m < 10^1$, então $0 < m < 1$.

Utilizando média geométrica¹² dos extremos para aproximarmos o valor de m , como Brigs fez para criar suas tábuas logarítmicas, temos:

$$\sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} = 3,1622776601.$$

$$\text{Como } \sqrt{10} = 10^{0,5} \text{ então, } 10^{0,5} = 3,1622776601$$

(Vale salientar que estamos utilizando uma aproximação de 10 casas decimais, que é a mesma aproximação que foi utilizada por Briggs na construção das suas tábuas logarítmicas)¹³.

$$\text{Então, } \log 3,1622776601 \approx 0,5$$

E a tabela 7 fica da seguinte forma:

¹² A média geométrica entre números reais não negativos x_1, x_2, \dots, x_n é definida como sendo a raiz n -ésima do produto dos n termos (ou, alternativamente) é o produto dos n termos elevado ao inverso do número de termos.

¹³ Os livros consultados não abordam como Briggs encontrou o resultado das raízes quadradas que ele utilizou nesse procedimento para a construção de sua tábua logarítmica. Existem apontamentos para o fato de que os resultados dessas raízes já eram conhecidos.

Tabela 7 Primeira aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$

1	2	...	3,1623	10
10^0	10^m	...	$10^{0,5}$	10^1

Dessa maneira, percebemos que o valor de m procurado está entre 0 e 0,5.

Repetindo o procedimento, a média geométrica entre os novos extremos, 10^0 e $10^{0,5}$ é dada por:

$$\sqrt{1 \times 3,1622776601} = \sqrt{10^0 \times 10^{0,5}}$$

Como $\sqrt{10^{0,5}} = 10^{0,25}$ então, $10^{0,25} = 1,7782794100$

Então, $\log 1,7782794100 \cong 0,25$

E a Tabela 8 fica da seguinte forma:

Tabela 8 Segunda aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$

1	1,7782794100	2	...	3,1622776601	10
10^0	$10^{0,25}$	10^m	...	$10^{0,5}$	10^1

Assim podemos afirmar que o valor de m procurado está entre 0,25 e 0,5.

Repetindo, mais uma vez o procedimento, a média geométrica entre os novos extremos, $10^{0,25}$ e $10^{0,5}$ é dada por:

$$\sqrt{3,1622776601 \times 1,7782794100} = \sqrt{10^{0,5} \times 10^{0,25}} = \sqrt{10^{0,75}}$$

Como $\sqrt{10^{0,75}} = 10^{0,375}$ então, $10^{0,375} = 2,3713737056$

Então, $\log 2,3713737056 \equiv 0,375$

E a tabela 9 fica da seguinte forma:

Tabela 9 Terceira aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$.

1	1,7782794100	2	2,3713737056	...	3,1622776601	10
10^0	$10^{0,25}$	10^m	$10^{0,375}$...	$10^{0,5}$	10^1

Dessa forma, percebe-se que o valor de m procurado está entre 0,25 e 0,375.

Repetindo, mais uma vez o procedimento, a média geométrica entre os novos extremos, $10^{0,25}$ e $10^{0,375}$ é dada por:

$$\sqrt{1,7782794100 \times 2,3713737056} = \sqrt{10^{0,25} \times 10^{0,375}} = \sqrt{10^{0,625}}$$

Como $\sqrt{10^{0,625}} = 10^{0,3125}$ então, $10^{0,3125} = 2,0535250264$

Então, $\log 2,0535250264 \equiv 0,3125$

E a tabela 10 fica da seguinte forma:

Tabela 10 Quarta aproximação para determinar o valor de m que satisfaz $10^m = 2$.

1	1,77827941002	2,0535250264	2,3713737056	...	3,1622776601	10	
10^0	$10^{0,25}$	10^m	$10^{0,3125}$	$10^{0,375}$...	$10^{0,5}$	10^1

Dessa forma, percebe-se que o valor de m procurado está entre 0,25 e 0,3125.

Também pode-se notar que, quanto mais o valor do expoente se aproxima de 0,3, mais próximo de 2 se torna a potência.

Assim, por aproximação, Briggs chegou a estabelecer que

$$10^{0,31010299956}=2 \text{ ou } \log 2 \equiv 0,31010299956.$$

Baseado nesse método, em 1619, Briggs conseguiu fazer uma tábua dos logaritmos compreendidos entre 1 e 1000.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Inteligência Musical

Beethoven compõe a Sinfonia nº 9 em Ré menor – Opus 125 já num estado clínico de surdez. Para a compreensão vulgar de um leigo, no que tange às habilidades musicais de um determinado músico ou compositor, sobram-lhe dúvidas quanto à possibilidade de tal feito. *Como é possível?* – perguntaria aquele que não detém conhecimento de como se processa a inteligência musical. Quais relações estabelecem no indivíduo a capacidade intelectual que vai da composição à execução musical? Qual a relação da memória tonal recolhida naturalmente nos vários instantes da vida e articulada (também e, sobretudo espontaneamente) em ciclos que vão da variação / contraste dos tons à fixação de um tema musical?

A macieira produzindo seus frutos, por exemplo, remete ao compositor envolvendo os sons que, recolhidos em sua memória, ele os manuseia em torno de uma mesma temática. A vida de ambos gira em torno de suas atividades.

Estudiosos relatam a notoriedade com que o talento musical surge nos indivíduos dotados dessa habilidade. No entanto, tais questionamentos voltam à incerteza inicial quanto ao fato de tal precocidade. Aqui, propomos investigar a ligação dessa forma de conhecimento e habilidade com a formação do intelecto humano. Para isso, analisaremos o desenvolvimento investigativo de Howard Gardner, descrevendo o caminho didático da aquisição das habilidades musicais e suas áreas de competência.

4.2 Os Elementos da Composição Musical e os Componentes da Inteligência Musical

Howard Gardner conduz sua investigação sobre a capacidade intelectual para a música no sujeito, descrevendo uma situação comum: três crianças prodígios, cada qual com sua habilidade notória:

A primeira criança interpreta uma suíte de Bach para violino solo com precisão técnica e considerável sentimento. A segunda canta uma ária completa de uma ópera de Mozart após ouvi-la apenas uma única vez. A terceira criança senta-se ao piano e toca um minueto simples que ela mesma compôs.

Ao compreender as origens de cada uma das mencionadas crianças, certamente traçamos um perfil cognitivo capaz de desenvolver-se nas habilidades a que foram descritas. Uma das crianças poderia ser iniciada por uma tradição familiar japonesa e ser iniciada desde os dois anos de idade em tal atividade, através da Escola Suzuki de Educação de Talentos. Entretanto, a segunda poderia ser vítima de autismo, em que outras instâncias de sua vida e relações interpessoais estejam comprometidas por esse distúrbio, que interfere em sua capacidade comunicativa e afetiva. Por fim, a terceira criança poderia ser iniciada na tradição cultural de sua família e acostumou-se a tirar melodias de ouvido.

Há evidências de que há uma inteligência musical autônoma. Como é essa inteligência e como ela interage com as outras?

Em seu livro Gardner (1994, p. 79) relata que, nos seus estudos, Roger Sessions forneceu importante informação:

[...] Sessions (1970) forneceu um relato revelador de como é compor uma peça musical. Conforme ele explica, um compositor pode ser prontamente identificado pelo fato de ter ‘sons na cabeça’ – ou seja, está sempre em algum lugar de superfície de sua consciência ouvindo sons, ritmos e padrões musicais maiores.

Ao centralizar em ideias as formas de percepção desses sons e elementos musicais, o compositor reelabora, cria e interfere nesses dados, desenvolvendo formas significativas: do mais simples fragmento melódico, rítmico ou harmônico até elaborações mais complexas.

Em que direção a ideia central inicial vai ser levada? Segundo o mesmo Sessions, a ideia inicial abriga muitas implicações – de elaborações mais contrastantes ou complementares – permanecendo, ambas, parte da ideia central.

A partir do relato de alguns compositores que foram fontes preciosas dos relatos que conduziram suas teorias, Gardner (1994) nos leva a crer que a composição musical se dá como técnica do contraste e ditames do ouvido. A memória tonal, sensivelmente captada pelos ouvidos e reelaborada, como fôra dito, em torno de uma ideia central.

Tão naturalmente ocorre tal procedimento que o compositor clássico Wagner chega a comparar sua atividade a “uma vaca produzindo leite” (GARDNER, 1994).

Saint Saens, por sua vez, igualou o processo a uma macieira produzindo maçãs (GARDNER, 1994).

Ainda em relação ao material explorado e ao trabalho de composição formal da música, é relatado pelo autor que há um tratamento diferenciado para cada músico:

A parcela criativa da mente musical... funciona seletivamente e o material tonal que ela oferece foi metamorfoseado e tornou-se identificável a partir do material que foi originalmente assimilado. Na metamorfose ... a memória tonal original foi composta com experiências emocionais lembradas e é este ato criativo que produz mais que uma série de sons acústicos (GARDNER, 1994, p. 80).

De maneira consideravelmente interessante, Howard relata que, em conversa com Robert Craft, o compositor Igor Stravinsky dá um passo adiante no que tange à compreensão do ato da composição musical ao dizer que se trata muito mais de um fazer, não de pensar. Não ocorrendo necessariamente e exclusivamente por pensamentos ou vontade, mas, conforme acima referido, naturalmente.

Enfim, no ato da composição existe o consenso da capacidade natural do compositor em fazer nascer a música de forma sensível à capacidade de interacionar sons, do que elaborações da vontade e da razão.

Mas, o que distingue o compositor dos demais músicos? Quais os elementos componentes da inteligência musical que são fundamentais para a identificação destas habilidades?

Na verdade, há uma pequena variação entre os especialistas acerca da definição precisa de cada aspecto da música, inclusive o que identifica o papel do compositor e suas características peculiares. Gardner (1994, p. 82) menciona: “os mais centrais são o tom (ou a melodia) e o ritmo: sons emitidos em determinadas frequências auditivas e agrupados conforme um sistema prescrito”.

Conforme abordaremos posteriormente, há um acento entre um e outro aspecto desses elementos, de acordo com o padrão cultural de determinados povos.

Outro elemento próximo em importância é o timbre, ou seja, as qualidades características de um som.

Estes elementos centrais remetem à importância da audição na definição da música. Entretanto, há que se considerar que a organização rítmica existe independente de qualquer realização auditiva. Nesse aspecto, Gardner (1994, p. 82) remete-nos a alguns compositores, como Scriabin “que enfatizaram aspecto da música ‘traduzindo’ suas obras em séries rítmicas de forma colorida”. É fato incontestável que, mesmo indivíduos que não usufruem do recurso auditivo, podem apreciar músicas através desse acesso. O autor bem menciona categorias que dispõem de tal recurso rítmico que abrem essa possibilidade, ou seja, os aspectos do movimento no decorrer temporal, ou como dito em Arnold Schoenberg:

Música é a sucessão de sons e combinações de sons organizados de modo a exercer uma impressão à inteligência e ser compreensível. Estas impressões têm o poder de influenciar partes ocultas da nossa alma e das nossas esferas sentimentais (SCHOENBERG, 1965 citado por GARDNER, 1994, p. 82).

Ao aludir à questão do prazer de forma definitiva, abrimos campos de investigação para além dos aspectos puramente físicos da música.

A inegável percepção se dá pela questão evidente em indivíduos compositores ao elaborarem tentativas de comunicar determinadas emoções. “Se a música não transmite em si emoções ou afetos, ela capta formas desse sentimento” determina Gardner (1994, p. 83).

E ainda referindo-se a esta conclusão, o autor menciona novamente Stravinsky que conclui que a música trabalha na corporificação dos sentimentos. Para o psicólogo Paul Vitz, os sons mais agudos conduzem a sentimentos mais positivos nos ouvintes, dando assim elementos concretos para a tomada desse aspecto como ponto de partida nas afirmações anteriores.

Howard relata ainda que, mantendo essas capacidades centrais, psicólogos buscavam determinar possíveis mecanismos pelos quais a música é percebida no sujeito. Duas “escolas” abordaram esse tema de forma original. A

mais predominante é chamada de abordagem “de baixo para cima”, na qual é examinada a maneira pela qual o indivíduo processa “blocos construtores da música” – sons solitários, padrões rítmicos elementares e outras unidades destituídas da informação contextual encontradas nas interpretações musicais, mas que se oferecem aos sujeitos experimentais.

“Pede-se aos sujeitos que indiquem quais entre dois sons são mais altos, se dois padrões rítmicos são iguais, se dois sons são tocados pelo mesmo instrumento” (GARDNER, 1994, p. 83).

A outra abordagem provém da dúvida pendente a esta possibilidade de construir música, a partir das partes componentes. A chamada abordagem “de cima para baixo”, na qual a se apresentam aos sujeitos peças musicais ou segmentos dessas. A intenção é averiguar as reações globais da música e também as caracterizações metafóricas da mesma.

Howard conclui que esta abordagem ganha em validade, mas, no entanto, perde no que tange ao controle experimental e suscetibilidade à análise.

A solução seria aquilo que surge atualmente como uma opção possível

A meta aqui é amostrar entidades musicais que sejam suficientemente grandes para guardar uma semelhança não superficial com unidades musicais genuínas [...] e ainda suscetíveis à análise para permitir manipulações experimentais sistemáticas (GARDNER, 1994, p. 84).

O fato é que é notório que todos os sujeitos reconhecem uma estrutura musical. Há significativa sensibilidade capaz de reconhecer os relacionamentos que prevalecem dentro de uma tonalidade determinada. Os tais indivíduos são também sensíveis ao contorno musical. A expectativa é que, brevemente, a avaliação do talento na esfera musical possa ser baseada ‘em achados dessa abordagem eclética à competência musical. As pesquisas realizadas demonstram que

No nível mais geral, os indivíduos parecem ter ‘esquemas’ ou ‘estruturas’ para ouvir música – expectativas sobre como deveria ser uma frase ou seção bem estruturada de uma peça – bem como pelo menos uma capacidade incipiente de completar um segmento de maneira que faça sentido musical (GARDNER, 1994, p. 84).

Howard faz uma analogia que servirá de parâmetro para evoluirmos na compreensão sintética do que é uma teorização da construção dos elementos da inteligência musical. Para ele, assim como na linguagem, é possível discernir uma série de níveis - a saber, do fonológico básico, através da ordem das palavras e do sentido das mesmas, à capacidade de reconhecer entidades maiores, como histórias -, da mesma forma no que tange às habilidades musicais é possível reconhecer a sensibilidade a sons ou frases individuais, mas também observar como pertencem em estruturas musicais maiores que apresentam suas próprias regras de organização. É dessa forma que deveríamos considerar analogicamente a música, como na observação literária de um poema ou romance, em diferentes tipos de análises e deveriam ser considerados nas vertentes “de baixo para cima” e esquematizações “de cima para baixo” da escola Gestalt. Mesmo porque, não há exclusão entre elas.

Para buscarmos elementos precisos dessa análise, faz-se necessário analisarmos o processo do desenvolvimento da competência musical no indivíduo. E é o que faremos a seguir.

4.3 O desenvolvimento da Competência Musical

Para determinarmos o desenvolvimento da competência musical, devemos identificar geograficamente o foco de interesse por essa área cognitiva. Onde e como temos uma diversidade formativa nos indivíduos acerca do interesse e das habilidades musicais. No começo do século XX, a Europa

despertou por descobrir com se dá a habilidade artística em crianças. Esse fenômeno, no entanto, não alcançou o continente americano, pois tal fato distanciou os estudos dessa ocasião – o que trata a diversidade cultural.

Howard menciona que tais estudos revelam um “retrato incipiente” da competência musical desde os mais remotos princípios da vida humana.

Os bebês já revelam, de acordo com este estudo, habilidades características quando balbuciam ruídos, sons com padrões ondulantes. São capazes até mesmo de repetir, imitando padrões prosódicos e sons cantados por outros.

Caracteres como igualar a altura, volume e o contorno melódico da canção da mãe são possíveis em crianças de dois meses. Os estudiosos Mechthild Papusek e Hanus Papusek alegam que as crianças nesse período estão mais propensas a reconhecer aspectos da música com mais habilidade do que a linguagem.

No segundo ano de vida são capazes, por conta própria, de emitir sons pontilhados que exploram intervalos pequenos – são capazes de inventar músicas espontaneamente.

Assim, acerca das observações dessa formação, as diferenças individuais são notáveis quando em crianças que aprendem a cantar. Mais do que na linguagem:

Algumas conseguem acompanhar grandes seguimentos de canções por volta da idade de dois ou três anos [...], muitas outras conseguem emitir as aproximações mais grosseiras de tons neste momento [...] e podem apresentar dificuldade em produzir contornos melódicos precisos aos cinco ou seis anos (GARDNER, 1994, p. 85).

É comum acreditar que em nossa cultura, na idade escolar, que a criança vai possuir capacidade de produzir razoavelmente bem as canções que ouve. Howard atenta para o fato de que, diferente das crianças com habilidades

excepcionais, pouco desenvolvimento musical ocorre após o início dos anos escolares. Além do aprendizado da leitura da música, de comentar avaliativamente interpretações, nada de profundo acontece, o que decorre a conclusão de que esse pouco investimento em nossa cultura iguala-se a um analfabetismo musical.

Em contrapartida, em muitas partes do mundo, culturas diferem esse trato musical, como é o caso dos ANANG, da Nigéria, onde as crianças com apenas um mês de vida já são introduzidas por suas mães à música e à dança. O autor relata muitos exemplos de culturas onde os hábitos musicais são inseridos desde muito cedo à vida das crianças, buscando proficiência em canto e execução de instrumentos – casos como Hungria, Japão, China.

Outra estudiosa da área, Jeanne Bamberger, musicista e psicóloga, apoiada em suas análises do desenvolvimento musical buscou linhas do pensamento lógico-piagetiano. No entanto, ela insistiu que o pensamento musical envolve nas suas próprias regras e restrições, e, portanto, não é assimilado ao pensamento linguístico e matemático. Dentro dessa abordagem, ela demonstrou formas de conservação que existem na música que não são intercambiáveis com as formas básicas de conservação física. Exemplificou através do fato de uma criança pequena pode reconhecer que nenhuma de duas execuções de uma canção é exatamente idêntica.

Jeanne ainda diferencia duas formas contrastantes de processar a música. Na primeira visão, figurativa, a criança atenta às características globais de um fragmento melódico; por outro lado, na segunda visão, as características “sentidas” de um agrupamento – se um conjunto de sons parece formar um grupo e ser separado no tempo dos seus vizinhos. No entanto, nessa segunda visão, o indivíduo pode conceituar a música de forma mais organizada, ou, como afirma:

Equipado com o conhecimento proposicional sobre a música como um sistema, ele entende o que ocorre numa base medida por medida e pode analisar em termos de divisão de tempo. Assim ele pode apreciar (e notar) uma passagem em termos de número de tempos por compasso e a ocorrência de padrões rítmicos particulares contra esse fundo métrico (GARDNER, 1994, p. 87).

É importante reconhecer que qualquer indivíduo que queira dominar a análise e a representação musical formal, deve perceber que alguns aspectos naturalmente percebidos podem ser obscurecidos quando este tenta classificar tudo agindo de um modo formal.

Esse fato pode determinar que indivíduos que, quando jovens são tratados como prodígios, mas quando progridem num determinado instante, passam a apresentar uma resistência às caracterizações proposicionais (matemática – linguística) de eventos musicais. Como menciona Gardner (1994, p. 87):

A assim chamada crise da meia idade ocorre nas vidas dos prodígios na adolescência, em algum lugar entre as idades de quatorze e dezoito anos. Se a crise não é negociada com sucesso ela pode, enfim, levar a criança a deixar totalmente de participar na vida musical.

Podemos afirmar que, aos nove anos, inicia-se um período de construção de habilidades musicais no indivíduo – isso, se ela praticar com seriedade, abdicando investimentos em outras áreas e atividades. Na adolescência, conforme acenamos anteriormente, pode ocorrer entre as idades de quatorze e dezoito anos, a segunda crise (mais central), além do choque entre as maneiras figurativas e formais, de conhecer, resta ao adolescente definir se é isso o que realmente quer.

Sobre esta constatação, Howard conclui que, em função de sua análise das experiências (sobretudo da comunidade de Suzuki, no Japão), dentre outras

grandes experiências, que a habilidade musical não é estritamente um reflexo de uma habilidade inata, mas é susceptível a estímulos e treinamento cultural.

Por fim, devemos mencionar o fato relativo às potencialidades musicais observadas por compositores que atestam que ambientes familiares pouco acolhedores, até o menor estímulo musical pode cristalizar-se.

A análise elaborada pauta na experiência ocidental, vislumbrando fatores ambientais. No entanto, devemos investigar os âmbitos da evolução neurológica dessa habilidade no sujeito. É o que desenvolveremos a seguir.

4.4 Características da Evolução Neurológica da Habilidade Musical

As origens evolutivas da música no homem ainda são carregadas de certo mistério. Houve, durante muito tempo, a tendência de se acreditar que os campos de atuação linguísticos se confundiam com os da habilidade musical. Assim, alguns pesquisadores suspeitam que o desenvolvimento linguístico e o musical se deem de forma conjunta e acabam por separar-se, há, talvez, milhares de anos da evolução humana.

A música, provavelmente, compôs o ambiente antropológico primitivo na composição organizacional de atividades cotidianas e de festividades, além da caça e da produção, por exemplo.

Há que se considerar, no entanto, que diferentemente da linguagem em que não há possibilidades de entrever relações ontogênicas com outras espécies, pelo menos, com a música, existe a possibilidade de fazer paralelos. É sabido que os estudos sobre a inteligência, no que se refere aos aspectos biológicos dos pássaros muito evoluíram nos últimos anos. As variações de animais diversificam as características do canto: um grande grupo possui a gama de padrões desenvolvimentais de canto, e, alguns outros animais executam apenas um canto aprendido por todos os seus membros. Entretanto, há pássaros com

notável mistura de fatores inatos e ambientais. Impressiona também em pássaros surdos a capacidade intacta de cantar.

Analogicamente, assim como nos pássaros diversificam categorias de cantos (subcantos e “canto plástico”- antecipadores do canto primordial); as pequenas crianças quando balbuciam sons, exploram fragmentos de cantos do seu meio. Obviamente que, nos humanos, as experiências musicais extrapolam e se diversificam. Mesmo assim, as analogias sugestivas no desenvolvimento do canto deveriam estimular a pesquisa capaz de esclarecer aspectos mais gerais da percepção musical.

Porém, estimulantes são as pesquisas que partem da análise do canto dos pássaros na sua representação no sistema nervoso desses animais. Os biólogos e pesquisadores neurológicos identificaram nos pássaros que o canto é uma das raras habilidades lateralizadas entre os animais – a parte esquerda do sistema nervoso das aves. As observações do cérebro dos pássaros revelam aos cientistas claros indícios da natureza e riqueza do canto. Comparável ao sistema de cantos humanos, nos pássaros, o repertório está sensível ao meio, às estações climáticas e ao período biológico (reprodução).

Assim, embora os propósitos do canto dos pássaros sejam muito diferentes dos do canto humano [...], é bem possível que o mecanismo pelo qual, determinados componentes musicais centrais são organizados provem ser análogos aos apresentados por seres humanos (GARDNER, 1994, p. 91).

É improvável fazer uma ligação direta entre humanos e pássaros. Essa ligação filogenética é distante da realidade das espécies em questão. Porém, quanto aos primatas, existem muitos indivíduos que emitem sons expressivos que podem ser entendidos por muitos congêneres. Alguns primatas direcionam suas imitações a alvos vocais, pois,

[...] podem existir em outras formas em outras espécies; enquanto outras (por exemplo: sensibilidade relativa ou absoluta ao tom ou a capacidade de reconhecer vários tipos de transformação musical) são singulares a nossa própria (GARDNER, 1994, p. 91).

A ligação vocal do canto à fala pode sugerir ligações neurológicas entre essas habilidades em relação ao campo ocupado na inteligibilidade humana. A investigação em outras espécies nos leva a algumas conclusões, no entanto, a saber, cientistas observando e analisando tanto humanos normais quanto com humanos lesionados cerebrais que os processos e mecanismos que servem à música e à linguagem humana são distintos.

Uma pesquisa interessante, tanto pela simplicidade e ampla compreensão, como pela evidência dos resultados, utiliza indivíduos que receberam um conjunto de sons para ser lembrados e, a par daí, vários materiais de interferência foram apresentados. Quando estes materiais se tratavam de outros tons, cerca de 40% dos sons originais foram esquecidos ou confundidos. Por outro lado, quando o material se tratava de linhas, imagens ou números, não houve efeitos relevantes na memória e, portanto, uma confusão irrelevante, cerca de 2%. Este estudo, segundo o autor, ganha reforço quando se volta para lesionados cerebrais, em decorrência de derrames cerebrais. Outra observação em acordo com este estudo é que indivíduos que se tornaram afásicos também experimentam diminuição na capacidade musical. No entanto, a grande descoberta dessa pesquisa é que, mesmo dentre indivíduos afásicos, existem aqueles intactos na habilidade musical. Assim como pode haver indivíduos incapacitados musicalmente em oposição à capacidade linguística. Gardner (1994, p. 92) assim observa:

Os fatos são os seguintes: enquanto as capacidades linguísticas são lateralizadas quase exclusivamente para o hemisfério esquerdo em indivíduos destros normais, a maioria das capacidades musicais, inclusive a capacidade central da sensibilidade ao tom, está localizada, na maioria dos indivíduos normais, no hemisfério direito. Assim, danos aos lobos frontal e temporal direitos causam pronunciadas dificuldades nas áreas homólogas no hemisfério esquerdo (que causam dificuldades devastadoras na linguagem natural) geralmente deixem as capacidades musicais relativamente não prejudicadas. A apreciação musical também parece ficar comprometida por doenças no hemisfério direito. (Conforme os nomes pronunciam, a amusia é um transtorno distinto da afasia).

Outro desdobramento foi recentemente revelado: na maioria dos testes com indivíduos normais, as habilidades são identificadas lateralmente no hemisfério direito do cérebro. Conclui-se que, quanto mais treinamento musical o indivíduo possuir, notoriamente tenderá a basear-se nos mecanismos do hemisfério esquerdo e decrescentes no direito.

Importante é que a imagem da competência cruzando o corpo caloso (partindo de um hemisfério para outro) não deve ser considerada profundamente, pois sua ação é limitada a poucas habilidades. Outro fator é que não fica claro porque efeitos crescentes do hemisfério esquerdo são encontrados com treinamento. Certo é a noção dos estudiosos que verificaram aparente domínio do hemisfério esquerdo para a análise musical.

Por fim, resta-nos considerar a surpreendente variedade de representações neurais da capacidade musical encontrada nos seres humanos. A grande variação de atividades desenvolvidas pelas comunidades humanas, dos mais ricos teores ligados à música provém do fato que o sistema nervoso pode oferecer uma pluralidade de mecanismos para efetuar, nos indivíduos, tais desempenhos. Então, há um percurso da habilidade a completar-se no simbolismo cultural e nas práticas do fazer-se humano.

Assim, embora todo indivíduo normal seja exposto à linguagem natural principalmente através de ouvir outros falarem, os humanos podem encontrar-se com a música através de muitos canais: cantar, tocar instrumentos com as mãos, inserir um instrumento na boca, ler notação musical, escutar gravações ou observar danças ou similares (GARDNER, 1994, p. 93).

4.5 A Relação com outras Competências

Este estudo demonstra com precisão que, assim como a linguagem, a música é uma competência intelectual separada, que também não depende de objetos físicos no mundo. E, ainda em comparação com a linguagem, a música tem por característica o fato de poder ser elaborada até um grau considerável simplesmente através da exploração e do aproveitamento do canal oral-auditivo.

Em nosso estudo verificamos que as características pontuadas levam a perceber ligações integrais importantes existentes entre a música e outras esferas da inteligência humana. Dessa forma, Richard Wagner, em sua produção musical, enuncia o fato de a música relacionar-se com uma variedade de modos à gama dos sistemas simbólicos humanos e suas competências intelectuais.

Percebemos, ainda, que as evidências de que a competência musical está em parâmetro de desenvolvimento autônomo, relativo às outras competências. No entanto, é inegável a relação que esta pode traçar com outras áreas cognitivas. Para demonstrar, inicialmente essa relação, citamos o antropólogo Claude Levi-Straus, juntamente com outros estudiosos, que concordam que, na música, está a chave para todo o pensamento humano. Assim, como a relação que Sessions relata existir entre a música e a linguagem corporal ou gestual.

Em alguns casos, sua expressividade gestual é o melhor caminho para compreendê-la. Por sua vez, Stravinsky insistiu que a música deve ser vista para ser (de forma adequada) assimilada. Refere-se, sobretudo em relação ao balé.

Gardner atenta ao fato de como nas crianças é natural esta ligação, de forma que, a expressão corporal é o meio motivador do canto e, por conseguinte, este é o seu motor.

O aspecto das ligações existente entre a música e as inteligências espaciais, de acordo com o autor é profundamente genuíno.

Dessa maneira Gardner (1994, p. 96) afirma que “A localização de capacidades musicais no hemisfério direito sugeriu que determinadas capacidades musicais podem estar intimamente ligadas às capacidades espaciais”.

As considerações aqui expostas se associadas a uma recente analogia relatada pelo autor, de um médico americano, Arthur Lintger, que, adquiriu habilidade de leitura e decodificação de padrões sonoros ao analisar sulcos fonográficos nos indica a possibilidade que, por tais correlações, uma pessoa surda pode apreciar “efeitos” sensoriais diversos da música, assim como um cego pode apreciar sentindo com toques uma escultura.

É perceptiva a conexão também existente entre a música e os sentimentos humanos. É em função disso que muitos compositores buscam motivações. No entanto, a neurologia que permite esta associação jamais foi estudada. Mesmo assim, o autor insiste que especular a competência musical não depende de mecanismos analíticos corticais, tão somente, mas, também destas estruturas subcorticais, consideradas centrais ao sentimento e à motivação. Uma observação interessante em favor disso, menciona o autor:

Indivíduos com danos em áreas subcorticais ou com desconexão entre essas áreas corticais e subcorticais com frequência são descritos como simplórios e desprovidos de afeto, e, embora não se tenha comentado na literatura neurológica, tenho observado que estes indivíduos raramente parecem ter qualquer interesse ou atração pela música (GARDNER, 1994, p. 97).

O padrão dos argumentos desenvolvidos nesse estudo indica com clareza a autonomia da competência musical em relação à linguagem, mas não exclui os argumentos de musicólogos, como Leonard Bernstein, de buscar paralelos entre essas competências. O autor menciona a tentativa de aplicar, pelo menos, parte da análise de Noam Chomsky da estrutura geradora da linguagem para aspectos geradores da percepção e produção musical. Porém, estes estudiosos entendem que nem todos os aspectos da linguagem estão adequados à música. Então, tais paralelos ocorrem tão somente aos modos fundamentais do processamento de informações característicos entre estas competências intelectuais.

Por fim, a esfera que de fato nos interessa: a ligação com a matemática. Para isso Gardner considera:

Datando das descobertas clássicas de Pitágoras, as ligações entre música e matemática atraíram a imaginação de indivíduos reflexivos. Na época medieval (e em muitas culturas não ocidentais) o estudo cuidadoso da música partilhou muitas características com a prática da matemática, tais como um interesse em proporções, proporções especiais, padrões recorrentes e outras séries detectáveis. Até a época de Palestrina e Lasso, no século XVI, aspectos matemáticos da música permaneceram centrais, embora houvesse menos discussão aberta do que anteriormente sobre o substrato numérico ou matemático da música. A medida em que interesses harmônicos ascenderam, os aspectos matemáticos da música tornaram-se menos aparentes. Novamente, contudo, no século XX – primeiramente, na esteira da música dodecafônica, e mais recentemente, devido ao amplamente difundido uso de computadores – o relacionamento entre as competências musical e matemática foi amplamente ponderado (GARDNER, 1994, p. 97-98).

Assim, as análises de que, na matemática os elementos estão ligados intrinsecamente não podem ser minimizados. Para apreciar a função dos

ritmos, há que ter desenvolvido a competência numérica adequadamente, por exemplo.

No que se refere à apreciação de estruturas musicais básicas e como elas podem ser repetidas, transformadas ou permutadas entre si, novamente reconhecemos a matemática subsidiando em uma escala mais elevada.

O autor menciona compositores, como curiosa prova de seus estudos que deram vazão a este tipo de interesse pela sensibilidade e regularidade. Assim é o caso de Mozart que compôs música de acordo com rolar dos dados.

Essa relação, assim como as outras aqui acenadas, não se constitui problema quanto à origem autônoma das inteligências, são, de fato, a exploração múltipla da capacidade humana que qualquer pesquisador se compraz investigar e melhor conhecer.

O que caracteriza essa autonomia da competência musical – apesar de tantos dados levarem a marca do seu paralelo com a matemática – é que as operações centrais da música não apresentam conexão íntima com as operações centrais da matemática ou de qualquer outra área.

Portanto, há que se concluir que a tarefa na qual os músicos se dedicam difere fundamentalmente do que interessa a matemática pura. Ela “se interessa pelas formas em si, por suas próprias implicações, independentemente de qualquer realização em um meio particular ou de qualquer proposta comunicativa particular” (GARDNER, 1994, p. 98).

O matemático pode se interessar pela música, utilizá-la, porém, do ponto de vista matemático, a música é apenas outro padrão.

Resta-nos analisar a competência matemática no seu aspecto cognitivo para melhor compreendermos esse perfil inteligível.

4.6 A Inteligência Lógico-Matemática – A Colaboração de Piaget no Entendimento da Competência Lógico-Matemática

Abordar o desenvolvimento dessa competência exige que tenhamos uma elasticidade teórica, pois, reconhecemos que Piaget, apesar de todas as críticas acenadas à sua teoria, também é aquele que descreve um rumo teórico que orienta a leitura de forma adequada ao nosso propósito.

O estudioso Piaget, pesquisador do conhecimento e do desenvolvimento cognitivo humano, relata uma história simples que dá a dimensionalidade do pensamento lógico matemático na sua gênese: uma criança cresceu e se tornou um excelente matemático. Antes disso, porém, na sua infância, o futuro mestre deparou-se com um conjunto de objetos. Resolveu contar os elementos desse conjunto e descobriu dez deles. Na sua curiosidade mudou a ordem dos elementos, contou-os e, para sua surpresa, descobriu o mesmo número. Repetiu a variação inúmeras vezes e descobriu que o número dez estava longe de ser um resultado casual. O número referia-se ao agregado de elementos. Através desse lúdico exercício para sua tenra idade, o garoto chegou ao que, mais tarde, chamaremos de domínio dos números.

De modo bem característico, diferente das habilidades inteligíveis linguísticas e musicais, o domínio lógico-matemático volta-se para o mundo dos objetos: o indivíduo torna-se mais capaz de apreciar as ações que prevalecem entre essas operações, as conclusões a que se pode chegar (reais ou potenciais) entre as proposições elaboradas.

Ao longo do curso, o caminho do mundo dos objetos direciona-se para a direção à abstração – aquilo que, necessariamente, eleva às exigências científicas. Piaget demonstra já na infância as raízes das regiões mais elevadas dessa inteligibilidade. Caracteriza o pensador, o universo dos objetos: chupetas, chocalhos, móveis e xícaras, enfim, tudo o que cerca o bebê e como estes

estarão relacionados diversamente durante os meses em que ela conhecer o que a cerca. As conexões causais simples que existem entre eles ligam-se completamente à sua experiência cotidiana.

Após os dezoito meses, segundo Piaget, o bebê é capaz de reconhecer os objetos que lhe pertencem, mesmo quando distintos da relação espaço-temporal a foram relacionados originalmente. É capaz de reconhecer as similaridades entre os objetos de mesmo formato, cor, tamanho. De fato, a criança depois de meses, pode estabelecer agrupamentos como evolução desses estímulos.

O teórico chama de “manifestação pública” do conhecimento emergente, o fato de a criança demonstrar habilidades de agrupar objetos. Esta criança em desenvolvimento demonstra reconhecer, classificar cognitivamente uma classe ou conjunto. Porém, durante alguns anos, este reconhecimento é precário por ainda permanecerem, no máximo, aproximados de um maior ou menor, no aspecto da precisão quantitativa. Ele, o reconhecimento em questão, há que precisar:

[...] do entendimento crucial de que há um sistema de números regular, com cada número significando um a mais (+1) do que o anterior e que qualquer conjunto de objetos possui uma quantidade única, não ambígua. Esta incapacidade em conservar números se confirma na fragilidade de ‘contas’ face a indícios que competem entre si (GARDNER, 1994, p. 101).

A criança não faz corretamente a leitura de um conjunto que ocupa, espacialmente, um trecho da mesa. Para ela, esses objetos são em maior quantidade do que os que estão compactados. Mesmo que o número de objetos sejam inferiores.

Assim, até os quatro anos, a capacidade de contar (recitar mecanicamente) permanece afastada de suas simples estimativas de pequenos

conjuntos de objetos e de sua capacidade de avaliar quantidades contidas em um conjunto maior.

A partir daí se dá a capacidade de aprender que a série de números pode ser mapeada em conjuntos de objetos: aprende a contar sequencialmente, indiferentemente ao conjunto em questão e seus conjuntos. Essa é a idade de seis anos, o nível do futuro matemático de Piaget. A probabilidade de contar é grande, indiferente dos conjuntos, e confrontar maior ou menor conjunto.

Estes processos culminam em algo importante, conforme atesta Gardner (1994, p. 102):

Ela então é capaz de comparar-contrastar o número em um conjunto com o número em um outro, mesmo quando os conjuntos não são idênticos em aparência e mesmo (no que tange a isso) se eles não se encontram, ambos, disponíveis para a inspeção.

É esta capacidade de comparar que habilita a criança às operações básicas. Mesmo, operações não equivalentes ela pode acrescentar (sabendo que a não equivalência estará preservada). Em decorrência desta explosão de competências – a saber, as operações básicas – a criança deveria ser capaz de basear-se nestas aquisições ao atuar nas tarefas cotidianas, como comprar doces, fazer trocas, jogar bola, brincar no computador.

Assim é notório perceber que a base dessas ações no campo lógico-matemático parte da observação e do manuseio do mundo físico, dos objetos em questão. Contudo, as operações são realizadas mentalmente e, posteriormente serão internalizadas. Então, não precisará mais tocar os objetos, pois, bastará estabelecer comparações (somas e diminuições) “em sua cabeça”. Piaget acena para o assentamento dessas operações, isto é, o fato de que a criança está lidando com verdades imediatas, não com meras deduções empíricas. É, nesse caso, fundamental afirmar que, mesmo assim, nesse período entre os dez e doze anos,

as operações permanecem restritas ao mundo físico, ou, como chama operações concretas.

O crescimento cognitivo adicional é essencial antes que a criança atinja o estágio seguinte, ou, para Piaget, o estágio final do desenvolvimento mental.

Durante os três primeiros anos da adolescência, ao menos nas culturas ocidentais, desenvolve-se a capacidade de realizar operações mentais formais, a possibilidade de operar para além dos próprios objetos, mas também sobre palavras, símbolos ou equações (sequências de símbolos). Como evolução dessa capacidade, pode atuar sobre um conjunto de hipóteses e inferir as consequências de cada uma. Há um salto cognitivo que denota os primeiros passos dessa habilidade centrada no mundo físico e alcançando operações em níveis simbólicos, abstraindo a realidade. Os símbolos a serem manipulados podem ser palavras, como no caso silogístico, formação de hipóteses científicas e outros procedimentos formais.

Devemos considerar que o uso do raciocínio lógico na esfera verbal distingue-se da linguagem retórica. Mais uma vez, reforçamos nesse trabalho as áreas distintas entre as cognições: linguagem, lógico-matemática e música. “Pode-se, evidentemente, fazer inferências lógicas que sejam consistentes com o senso comum. As mesmas regras de raciocínio podem ser igualmente bem aplicadas, contudo, a afirmativas não relacionadas” (GARDNER, 1994, p. 103).

Quando as afirmações são tratadas como elementos (ou objetos), inferências corretas são extraídas. Assim, observamos que, como já dissemos, as operações anteriormente elaboradas a partir de objetos concretos surgem com relação aos símbolos que, por sua característica, substituem elementos encontrados na realidade.

A distância cognitiva das operações (de primeiro a segundo nível) leva anos, de forma que observamos que o simples fato de pensar uma alavanca e aguardar o que vai acontecer pode ser executado por uma criança de três anos.

Mas, transportando esse evento para o plano especulativo, como dissemos – operações de segundo nível -, levará mais tempo. Passagem de ações sensório-motoras às operações formais concretas.

O trabalho de Piaget, embora criticado por muitos, interessa-nos no entendimento dos números e das operações relacionadas a números, embora seja necessário esclarecer a certeza de que essa teoria atende a uma profusão maior de fatores, não se limitando àquilo que agora nos diz respeito. Para ele, esta sequência desenvolvimental prevalece em todos os domínios cognitivos do indivíduo, mesmo nas categorias kantianas Tempo, Espaço e Causalidade. Estes estágios fundamentais do desenvolvimento abrangem espontaneamente os principais domínios da cognição. E, para Piaget, o pensamento lógico-matemático é a “cola” que torna coesa toda a cognição.

Howard, no entanto, discorda da suposição piagetiana que o pensamento lógico-matemático concerne às outras áreas, variando da inteligência musical ao domínio interpessoal. Ele reconhece que, apesar dessa divergência, por reconhecer a autonomia das competências em suas áreas de atuação, Piaget oferece um caminho pertinente.

Não podemos deixar de mencionar que estudiosos atuais oferecem boa documentação que conclui ser o desenvolvimento do domínio lógico-matemático menos regular e organizado sob forma regular de estágios do que o aqui apresentado através de Piaget. Os estágios são, portanto, mais graduais e heterogêneos. Os teóricos constatam que há um problema referente às idades, pois, crianças em idade anterior àquela proposta por Piaget apresentam traços de inteligência operacional, embora falhem ao apresentar este pensamento formal operacional compreensivo, mesmo no próprio ápice dos seus poderes intelectuais.

Apesar das críticas, devemos então reconhecer o acerto de Piaget em encaminhar fatores no desenvolvimento em questão. O que, por si só já é uma

grande evolução temática. Assim comenta Gardner (1994, p. 104-105) analisando Piaget:

Ele astutamente discerniu as origens da inteligência lógico-matemática nas ações da criança sobre o mundo físico; a importância crucial da descoberta dos números, a transição gradual da manipulação física de objetos para as transformações interiorizadas de ações; o significado das relações entre as próprias ações; e natureza especial de camadas mais elevadas do desenvolvimento, onde o indivíduo começa a trabalhar com afirmativas hipotéticas e a explorar os relacionamentos e implicações que prevalecem entre estas afirmativas.

Não podemos deixar de citar contribuições de outros teóricos que discerniram e enfatizaram ligações entre estes domínios do conhecimento. O autor cita Brian Rotman que indica a matemática contemporânea que parte da noção da contagem na interpretação decorrente dessa sequenciação de números. Leonhard Euler, no século XVIII também demonstrou a importância do número como base para o desenvolvimento matemático:

As propriedades dos números hoje conhecidas foram principalmente descobertas por observação e descobertas muito antes que sua verdade fosse confirmada por demonstrações rígidas... Nós deveríamos utilizar este achado como uma oportunidade para investigar com maior exatidão as propriedades descobertas e prová-las ou desaprová-las; em ambos casos podemos aprender algo proveitoso (GARDNER, 1994, p. 105).

Também devemos citar o mais destacado lógico dos últimos cinquenta anos, Williard Quine que diz que a lógica relaciona-se com afirmativas, enquanto a matemática trabalha com entidades abstratas, não linguísticas, mas em âmbitos maiores, a lógica conduz naturalmente à matemática.

Assim podemos concluir que os números revelam ser uma parcela importante da matemática, mas não única parcela. Porém, uma parcela pequena. Como comprova Gardner (1994, p.105)

[...] os matemáticos estão mais interessados em conceitos gerais do que cálculos específicos, buscando de fato fórmulas, regras que possam aplicar-se ao âmbito mais amplo, possível de programas.

Porém, conforme como Whitehead e Russel tentaram mostrar, até mesmo sob as afirmativas matemáticas mais complexas, pode-se encontrar propriedades lógicas simples – os tipos de intuição que a criança começa a mostrar a medida em que seu pensamento operacional se revela.

Russel afirma-nos que a Matemática e a Lógica tiveram histórias diferentes, mas, que na realidade, aproximaram-se.

A pesquisa nos leva a crer que, seja qual for a concepção, seja quem for o especialista, no aspecto psicológico existe a possibilidade de concluirmos que haja “uma família” de capacidades interconectadas. Nesse aspecto Gardner afirma que, a partir das observações e dos objetos no mundo material é que o sujeito move-se em direção a sistemas formais cada vez mais abstratos, a ponto de as interconexões transformarem-se em questões de lógica ao invés de observações empíricas.

Realmente o trabalho do matemático culmina em um universo de objetos abstraídos da realidade, simbolizando-a, mas que, aparentemente não tem nenhum paralelo direto com a mesma. Mesmo que o interesse dos lógicos incida sobre as relações enunciadas, ao invés de sobre as relações entre estas afirmativas e o mundo do fato empírico.

Mas, como não pretendemos prolongar nesse trabalho a extensão e a riqueza deste tema, para centrarmos nos nossos objetivos, acenamos agora para um aspecto da competência lógico-matemática acenada no começo deste tópico

de forma breve: a relação da matemática e da lógica com o perfil cultural de vários povos.

4.7 A Competência Lógico-Matemática através das Culturas

Na obra “Estruturas da Mente”, Gardner registra a amplitude e o reconhecimento dos diversos sistemas numéricos em diferentes partes do mundo. Desde a elaboração de uma contagem, utilizando as partes do próprio corpo humano, dos “Papuas” de Nova Guiné, até o fato de mercados africanos lançarem mão do uso de conchas para as suas transações, a observação da habilidade cognitiva lógico-matemática também se desenvolve em função dos estímulos locais, entre os vários povos.

Reconhecemos que aquela visão ocidental que desprezava e diminuía substancialmente outras culturas, no que tange ao desenvolvimento matemático, atestando o primitivismo como precário, em função da ausência de uma elaboração científica perdeu forças em nossos dias. De fato, a contribuição de teóricos de várias áreas, sobretudo da antropologia, atestam uma lógica adequada à formação cultural desses povos.

O que houve foi a sistemática transposição dos métodos de pesquisa antropológica ocidental que falharam, por décadas, ao investigar a lógica de outros povos. Os parâmetros sociais e culturais do Ocidente demonstraram-se incapazes de alcançar a riqueza de muitos povos.

Ao contrário, quando evidências foram acumuladas sobre pensamento dentro da própria cultura, particularmente em tarefas que importaram para os habitantes, diferenças alegadas entre mentes primitivas e domesticadas foram diminuídas e, de fato, às vezes os ‘primitivos’ saíram superiores aos investigadores (GARDNER, 1994, p. 124).

Um percurso que se pretende dominar, transdisciplinar por natureza, reconhecendo a originalidade das estruturas culturais (muitas vezes despercebidas pelo olhar colonizador) é reconhecer as outras sociedades (não ocidentais) em termos dos diversos papéis acadêmicos descritos. Aqueles que se ligam aos campos diversos das habilidades cognitivas.

Assim, pouco sucesso nós teríamos ao buscar em outras culturas as figuras explícitas do lógico e do matemático que reconhecemos. O campo de interesse do sujeito refere-se às ações objetivas que traça no mundo em que vive.

Do mundo grego antigo, sobretudo até o salto renascentista em que as ciências emergiram com impacto decisivo nas sociedades ocidentais, gerou-se um sistema abstrato de construir a matemática, como atestamos anteriormente; partir do mundo dos objetos, real, e voltar-se para a abstração dos enunciados.

Ora, essa não é a experiência histórica de muitas sociedades que trataram de forma original a sua demanda lógico-matemática.

Porém, ao mudarmos o foco, buscando sim as operações básicas na qual as ciências se fundamentam, percebemos que, sem restar dúvidas, existe uma universalidade básica do pensamento lógico-matemático. Assim, pode-se avaliar que, onde haja uma economia de mercado, as relações comerciais e econômicas trataram de emergir dessa estrutura comum a todo ser humano: a capacidade lógico-matemática – o sujeito que sabe barganhar em seu próprio interesse; o princípio de validação, troca e simbolização que a moeda revela.

Além disso, onde é importante a capacidade de classificar objetos, os indivíduos demonstraram capacidade de elaborar um sistema hierárquico organizador, aplicando-os à sua realidade.

E assim, atestamos como prova incontestável disso os sistemas matemáticos, astronômicos das civilizações pré-colombianas que, além de cálculos precisos encontrados na engenharia responsável por suas magníficas

edificações, a lógica precisa dos calendários adequados à construção cultural de seu povo e suas crenças.

O autor, em concordância com isso, cita o estudo de Blurton-Jones e Melvin Klonner referente aos Kalahari: assim, embora as propostas científicas desse povo não sejam consideráveis na literatura ocidental, o bosquímano do Kalahari emprega os mesmos tipos de métodos para fazer suas descobertas. Os pesquisadores descrevem que, na caça, eles diferenciam entre os momentos que viram as presas com os próprios olhos; ou quando viram as trilhas, mas não os próprios animais; quando eles ouvirem outros falarem sobre os animais e de quando se deve permanecer incerto porque não se viu. E concluem:

O corpo de conhecimento resultante era detalhado, amplo e preciso... os processos para seguir trilhas, especificamente, envolvem padrões de inferência, testagem de hipóteses e descobertas que acusam as melhores capacidades de inferência e análise da mente humana. Determinar, a partir de rastros, os movimentos de animais, seu ritmo, se eles estão feridos e, caso estejam, como, e prever quão longe eles irão e em que direção e quão rápido, tudo envolveu ativação repetida de hipóteses, testá-las contra novos dados, integrá-los com fatos conhecidos anteriores sobre movimentos animais, rejeitar as que não se sustentam e finalmente obter um ajuste razoável (GARDNER, 1994, p. 125).

É muito interessante observar como a capacidade lógico-matemática foi aculturada para caracterizar alguns dos sistemas aritméticos de grupos não alfabetizados.

Assim, é possível observar a partir das ações dos indivíduos que, em suas culturas, produzem estimativas do número de objetos, indivíduos ou organismos numa determinada área. Os pesquisadores Gay e Cole, conforme atesta Gardner, demonstraram que os adultos Kpelle, na Libéria, foram mais bem sucedidos do que os adultos americanos ao estimar os números de pedras em determinada pesquisa.

Essa pesquisa nos leva a concluir que, em comparação com os algoritmos usados no Ocidente, sistemas fundamentados na estimativa são mais vantajosos por reduzir a margem de erro, no que tange ao aspecto da eficiência do cálculo. O que a pesquisa mostra, em outras palavras é que, usando nossos algoritmos para o cálculo tende-se mais à precisão, no entanto, em contrapartida, é maior a possibilidade de se produzir um total errado por uma margem muito grande.

Gardner menciona, ainda, a precisão numérica encontrada nas sociedades primitivas africanas:

Se, de fato, se está procurando exemplos de capacidade numérica altamente elevada na África, o melhor lugar para procurar é em um jogo como o kala [...], um jogo de covas e pedregulhos considerado ‘o jogo mais aritmético e com uma massa de seguidores em qualquer lugar no mundo’. A ideia básica deste intrincado jogo é derrubar sementes em série em buracos em torno de um tabuleiro e capturar as sementes do oponente colocando a semente final que se tem na mão num buraco do oponente que abrigue uma ou duas sementes. Observando indivíduos jogar este jogo, Cole e colaboradores verificaram que os vencedores usaram conjuntos claros e consistentes de estratégia [...] (GARDNER, 1994, p. 125).

Se acenarmos que o uso da matemática está presente nas transações comerciais, há que se registrar também o seu uso nas práticas religiosas e místicas. Como exemplo, a numerologia e a cabala, assim como os códigos bíblicos numéricos, relacionadas muitas vezes às profecias e à organização social do povo judeu antigo.

Na inquisição espanhola, os matemáticos foram os mais denunciados como os maiores de todos os hereges. Assim como o registro que temos de estudiosos medievais islâmicos e cristãos que acreditavam que quadrados mágicos, onde o conjunto nos quais todas as fileiras e colunas possuem a mesma

somatória total, serviriam para repelir desgraças e curar a esterilidade. Esses exemplos revelam que o inter-relacionamento entre sistemas e símbolos são percebidos entre muitas seitas. O valor numérico para além da quantificação dos elementos, mas, observável na qualificação, demonstra a partir daí que a estrutura lógico-matemática atua na compreensão e domínio das relações humanas com o mundo.

No que se refere a esta valorização das propriedades numéricas, tanto sociedades tradicionais não alfabetizadas quanto as alfabetizadas reconhecem essa habilidade como importante: o centro numérico da inteligência matemática é evidente e universalmente reconhecido.

Diante dessas evocativas, cabe raciocinar que filósofos ou estudiosos lógicos viessem a contestar a associação, aparentemente contraditória, da matemática com questões místicas ou mágicas.

Entretanto, apesar de ser tentadora a proposição crítica, temos que observar as conclusões dos antropólogos modernos que observam a “jogada analítica” em que todas as sociedades agarraram-se, historicamente, a muitas crenças, das quais, muitas não racionais e, até mesmo, irracionais, na construção de sua história. Não obstante essa realidade, o conteúdo religioso é simbólico e amplo a ponto de lidar com todos os campos cognitivos humanos, não excluindo, é claro, a lógica e a matemática. Notamos que, de fato, tais crenças fantásticas não possuem o caráter de interferir negativamente nas decisões cotidianas desses povos, como acena Gardner (1994, p. 126): “[...] elas são vistas como teorias cosmológicas ou metafísicas relacionadas à natureza última da realidade e não como as pessoas grelham um pedaço de carne, se locomovem de um lugar para o outro ou combinam um negócio com um conhecido”.

Assim, a lógica também possui evidências (como o pensamento matemático) entre culturas tradicionais. Como exemplo disso, Edwin Hutchings demonstra num estudo de disputas de terras das Ilhas Trobriand, elaborações

longas e complexas, argumentativas, entre os litigiosos. A transparência do debate, a idoneidade e retidão de intenções são amparadas e respeitadas nas elaborações logicamente compreensíveis. Na opinião do pesquisador, o modelo da lógica popular foi desenvolvido a partir de fontes puramente ocidentais e revela-se fortemente amparado em seu estudo acerca dessa disputa.

Howard Gardner entende que, se houver uma relativização entre as diferentes racionalidades (acerca das culturas tradicionais e a ocidental moderna), os processos regulares de educação escolar e a alfabetização poderão promover importantes mudanças na forma como os indivíduos se autopercebem e se autoconhecem.

[...] aprende-se na escola a lidar com informações fora do contexto, no qual são geralmente encontradas; considerar posições abstratas e explorar relacionamentos entre elas numa base hipotética; extrair sentido de um conjunto de ideias independente de quem as diz ou do tom de voz no qual são ditas; criticar; detectar contradições e tentar resolvê-las (GARDNER, 1994, p. 127).

Isso, associado ao respeito adquirido pelo acúmulo de conteúdos conhecidos conduz à dada importância que se tem no ocidente com a valorização de preocupações abstratas relativas ao domínio da realidade, apenas através de uma longa cadeia de inferências e uma dependência do uso da linguística – escrita, leitura, testagem “objetivas”, - produz uma pessoa cujas opiniões concordam com esses parâmetros de verdade e noção da realidade. O que, por se tratar de cunho histórico, pode referir-se às verdades esotéricas.

Por fim, temos que considerar em muitas sociedades primitivas, há pouca iniciativa para questionamentos críticos acerca da realidade, pois essa responde às exigências de uma sabedoria estabelecida. Em contrapartida, as sociedades cujos estudos promovem a assertiva crítica, a iniciativa promove,

sobretudo, tentar reformular argumentos falhos e até mesmo forjar novas sínteses próprias.

Só nos resta, então, partir para outro campo de análise onde tais pressupostos crítico emirjam da inter-relação dos saberes e competências humanas.

4.8 A Relação da Matemática com outras Competências

Questionamos, ao final desse capítulo, o impulso que a nossa sociedade e, provavelmente, outros povos, têm de crer que a inteligência lógico-matemática possa ser de algum modo, mais básica do que outras possíveis competências cognitivas. Isso ocorre em um sentido conceitual, situada no centro de todo o intelecto humano ou num sentido prático, fundamentando a composição histórica da humanidade, seus interesses e suas questões mais fundamentais. Nesse caso, bem menciona Gardner (1994, p. 130): “Não raro diz-se: há semente de uma lógica e apenas aqueles que desenvolvem inteligências lógico-matemática podem exercê-las”. No entanto, devemos negar esse impulso, no sentido de que, após atestarmos a pesquisa de muitos especialistas e, concordando com o autor Gardner, a inteligência em questão foi de singular importância na história do mundo ocidental sem que haja diminuição de seu papel na leitura da construção cotidiana das relações de outros povos.

Devemos concordar, com Gardner também, em pensar na inteligência lógico-matemática mais como um conjunto de competências – na qual se desenvolvem profundas habilidades de resolver problemas – sem que isso as torne superior ou predominante às outras competências ou áreas cognitivas.

Devemos assinalar que, de fato, existe uma lógica presente em cada uma das competências cognitivas humanas. Essas, porém, atuam de acordo com suas próprias regras e “até a dosagem mais forte lógico-matemática nestas áreas não

mudará as maneiras nas quais suas ‘lógicas’ endógenas operam” (GARDNER, 1994, p. 130).

O que ocorre é a percepção de que existem notórias interações entre essas lógicas de áreas diferentes, afinal de contas, tratam-se das competências de um mesmo indivíduo. O desenvolvimento da reflexão e análise das possibilidades lógicas do indivíduo ao jogar xadrez, por exemplo, assim como na leitura arquitetônica de engenharia revelam interações da lógica matemática com a lógica espacial.

Inferimos questionamentos a partir das pesquisas aqui acenadas. Dúvidas acerca da extensão que pode haver das ligações da lógica-matemática com as capacidades intelectivas espaciais e outras inteligências e, à medida que as ciências e matemáticas continuam a expandir no universo investigativo humano, mais tendemos a crer que possam existir ligações mais fortes e até mais extensivas com outros domínios.

A matemática foi redescoberta antropologicamente em outras culturas, conforme acenamos a partir da percepção de peculiaridades das ações cotidianas desses povos que atuavam de forma criativa no seu mundo. Howard Gardner observa que, à medida que a definição desse campo muda, outra dúvida emerge: faz sentido agrupar toda lógica e matemática juntas, como uma forma única de inteligência e, posteriormente, separá-las, quando observadas noutras competências?

Apenas o tempo pode dizer se o agrupamento que aqui propus apresenta validade duradoura. No presente, permaneço persuadido de que a linha de desenvolvimento descrito por Piaget, que inicia com uma intuição de número e um reconhecimento de causa e efeito simples, pode ser localizada através dos alcances mais elevados da lógica, matemática e ciências contemporâneas (GARDNER, 1994, p. 130).

De modo muito especial ao interesse desse trabalho, perguntamos: e quanto à música?

Não seria somente coincidência que tantos cientistas e matemáticos estivessem atraídos a essa competência cognitiva. E quanto aos notáveis pontos comuns existentes entre as áreas da música, as artes visuais e da matemática, observados nos trabalhos de Douglas Hofstadter?

O campo simbólico e a construção lógica se nutrem mutuamente ampliando, assim, o campo da cognição.

Os pesquisadores e cientistas atestam, mediante isso, que um artista, um poeta, um músico podem desenvolver suas habilidades sem sequer demonstrar, aparentemente, qualquer interesse sobre a regularidade e sistematicidade que formam o núcleo da competência lógico-matemática. Podemos identificar, aplicados a outros domínios de experiência, exemplos dessa inteligência.

Haverá, é claro, padrões ou ordens para onde quer que olhemos – alguns triviais, outros não; e é o gênio (ou maldição) especial dos lógicos e matemáticos discernir estes padrões onde quer que eles por acaso se encontrem (GARDNER, 1994, p. 130).

Talvez estes padrões matemáticos revelados noutras áreas revelem parcelas dos segredos do universo, como acreditavam os filósofos Platão, Leibniz e o físico Einstein. Daí à capacidade de transformar em ações esses mesmos padrões é o que consiste a inteligência lógico-matemática. Isso não reflete as operações centrais de outras competências cognitivas, nem mesmo a que centralmente se refere o intelecto corporal, musical ou linguístico.

Para isso, seria necessário aplicar cálculos e teoremas no trabalho, por exemplo, de um coreógrafo ou bailarino ou sobre a pauta de uma música qualquer. Aí, sim, vemos as áreas inter-relacionadas em suas inteligências.

(GARDNER, 1994, p. 131) encerra dizendo “Cada inteligência possui seus próprios mecanismos de ordenação [...]”.

Nesse instante vale uma compreensão da ação intencional daqueles que lidam com o efetivo da cognição e do aprendizado humano. Cabe saber como as instituições e os profissionais ligados à Educação podem promover a interação das competências cognitivas em formas de potencializar as habilidades humanas. É o que trataremos no capítulo seguinte.

5 A QUESTÃO INTERDISCIPLINAR

No sentido de uma fundamentação teórica para amparar o desenvolvimento deste trabalho, a questão da interdisciplinaridade ocupa um lugar de destaque, que abordaremos agora.

Os pressupostos teóricos que fundamentam ações interdisciplinares evoluem de uma primeira demanda – a questão da formação constante e continuada do professor em busca de “aprofundamento do conceito de ambiguidade da necessidade de recuperação do sentido da ambiguidade clássica, que forma o conhecimento interdisciplinar em educação [...]” (FAZENDA, 2006, p. 11). A superação de uma visão unilateral, aquela em que o professor dotado de seu conteúdo amplifica seu valor em detrimento de uma visão educacional, cujos termos desvelam saberes e horizontes formativos para ambos – a saber, professor e aluno.

Assim, o sentido da referida ambiguidade, abordada por Ivani Fazenda, trata das necessidades de o profissional da educação buscar uma formação continuada. Conduta valorativa que a autora remete:

O sentido da ambiguidade em seu exercício maior impele-nos, ao mesmo tempo, a enfrentar o caos e a buscar matriz de uma ordem, de uma ideia básica de organização. Navegar na ambiguidade exige aceitar a loucura que a atividade interdisciplinar desperta e a lucidez que ela exige (FAZENDA, 2006, p. 13-14).

Nessa perspectiva, adequando ao Ensino da Matemática o conteúdo didático da Música e seus pressupostos lógicos, exploraremos as bases de uma educação interdisciplinar, sem que, necessariamente, defendamos a desconstrução total do atual modelo, visto que, não há existência de

interdisciplinaridade sem a divisão do conhecimento em disciplinas, conforme trataremos posteriormente.

Segundo Pombo (2004 citado por PRADO, 2010, p. 25), o tema ganha destaque, entretanto, quando a história relata a especialização do saber, algo que teria força em meados do século XIX. A partir daí, novos ramos de especializações surgem no bojo do conhecimento acadêmico.

Desenvolver o presente trabalho, por sua especificidade conectada diretamente a essa ideia interdisciplinar, faz-se necessário explorar o caráter formativo e amplificador da educação que esse tema traz.

No entanto, observamos que a pesquisa do tema revela determinada banalidade com que a interdisciplinaridade é tratada em ambientes cuja formação é escassa. A terminologia é usada sem que seu real sentido seja conhecido por seus agentes. Fazenda (2006, p. 119) afirma que:

No Brasil, assim como nos Estados Unidos e na Europa, o número de projetos educacionais com a palavra ‘interdisciplinaridade’ em seus títulos têm crescido dramaticamente. No entanto, muitos surgem como intuição ou modismo, sem regras ou intenções claras.

Mas, é bom abordarmos a questão interdisciplinar no seu âmbito histórico antes de prosseguirmos com sua aplicabilidade.

5.1 A Interdisciplinaridade em seu desenvolvimento histórico

Conforme Fazenda (2002 citado por PRADO, 2010, p. 25), Georges Gusdorf, um dos grandes estudiosos desse tema, apresenta uma evolução da temática desde os filósofos sofistas e os romanos até os nossos dias, com acento especial naqueles instantes históricos em que a temática esteve com determinada evidência, como ocorre no século XVIII, em que a passagem do múltiplo ao uno

foi uma das preocupações dos *enciclopedistas franceses*. Temos que ressaltar que, ainda assim, temos uma falta de precisão terminológica no que concerne à integração do conhecimento. Esse fato não constitui em si um problema estrutural, visto que, num instante posterior historicamente determinado, as partes se recompõem assim como o produto dinâmico desses conteúdos distintos. É possível, então, que tenhamos uma compreensão totalizadora. O fato é que, no início do século XX, alguns cientistas acenaram para um perigo da especialização. Oppenheimer, em um texto de 1955 – *Science and the Common Understanding* – destaca a situação do fazer científico especializado, em que cada vez sabemos mais de cada vez menos (POMBO, 2004 citado por PRADO, 2010, p. 26).

Hoje, não são os nossos reis que não sabem matemática, mas também os nossos filósofos não sabem matemática e, para ir um pouco mais longe, são também os nossos matemáticos que não sabem matemática. Cada um deles conhece apenas um ramo do assunto e escutam-se uns aos outros com um respeito fraternal e honesto. (...) O conhecimento científico hoje não se traduz num enriquecimento da cultura geral. Pelo contrário, é posse de comunidades altamente especializada que se interessam muito por ele, que gostariam de partilhá-lo, que se esforçam por comunicá-lo. Mas não faz parte do entendimento humano comum. O que temos em comum são os simples meios pelos quais aprendemos a viver, a falar, e a trabalhar juntos. Além disso, temos as disciplinas especializadas que se desenvolveram como os dedos da mão: unidos na origem, mas já sem contato.

Os avanços científicos têm proporcionado à humanidade condições indispensáveis à vida, ao conforto e à segurança no modelo civilizacional proveniente da modernidade. Isso é inegável. Resultado do avanço do saber especializado são as tecnologias cujos valores ao desenvolvimento referido são axiomáticos. Entretanto, essa tendência de especializarmos cada vez mais um determinado conhecimento, hoje tem sido reavaliado e questionado. Segundo

Pombo (2004 citado por PRADO, 2010, p. 26), o progresso da investigação se faz hoje e cada vez, mas devido ao cruzamento de suas hipóteses e resultados com as hipóteses e resultados de outras disciplinas. Ele ainda relata que o progresso da ciência, a partir da segunda metade do século XX, em especial, deixou de poder ser pensado como linear, resultante de uma especialização cada vez mais funda, mas, pelo contrário, passou a depender da fecundação recíproca, da fertilização heurística, de umas disciplinas por outras, isso é, da troca de conceitos (transferências), problemas e métodos, ou melhor, o cruzamento interdisciplinar. Segundo Gilbert Durand (1991 citado por POMBO, 2004, p. 11), a ciência moderna necessita de um “salto heurístico” para sua prosperidade. Esse, segundo ele, sempre esteve e continua estando dependente de uma larga informação e cooperação interdisciplinar.

[...] os sábios criadores do fim do século XIX e os dez primeiros anos do século XX (esse período áureo da criação científica, em que se perfilam nomes como os de Gauss, Lobatchevski, Riemann, Poincaré, Hertz, Becquerel, os Curie, Rutherford, Pasteur, Max Plank, Bohr, Einstein), tiveram todos uma formação largamente pluridisciplinar, herdeira do velho trivium (as humanidades) e do quadrivium (os conhecimentos quantificáveis e, portanto, também a música) medievais (DURAND, 1991 citado por POMBO, 2004, p. 11).

No Brasil, segundo afirma Fazenda (1994 citado por BARNABÉ, 2011, p. 45), as discussões sobre o tema começam a eclodir, a partir do final da década de 1960 com sérias distorções, decorrentes dos modismos e da influência de novas tendências sem reflexão prévia. Associado a tais problemas, as reformas educacionais, ocorridas na primeira década posterior à sua chegada ao Brasil, em que o termo servia como motivo pelo qual ocorriam manipulações de interesse governista. Como consequência dessa atitude, durante muitos anos observamos,

na educação brasileira, um saldo negativo para a formação do cidadão e conveniente para os ditadores desta época.

Entretanto, ainda hoje, existe uma falta de precisão terminológica no trato de questões relativas à integração do conhecimento. Apesar de utilizados com certa frequência, os termos: *pluridisciplinaridade*, *multidisciplinaridade*, *interdisciplinaridade* e *transdisciplinaridade*, não casualmente, são utilizados de modo inadequado, uma vez que as fronteiras não são estabelecidas. Sobre isso trataremos a seguir.

5.2 As características da Pluri, Inter, Multi e Transdisciplinaridade

Caracterizar estes ramos de equivalência significa também diferenciá-los nas suas peculiaridades de forma a compreender a importância desses no cerne das relações educacionais. Assim, pluridisciplinaridade, multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade não possuem fronteiras determinadas nem mesmo para aqueles que as usam, ou para os que as estudam e também para aqueles que as procuram definir.

O caminho mais fecundo e, ao mesmo tempo, mais simples para elucidar essa relação conceitual e sua diferenciação passa pelo que propõe Pombo (2005 citado por BARNABÉ, 2011, p. 44)

A minha proposta é muito simples. Passa por reconhecer que, por detrás destas quatro palavras, multi, pluri, inter e transdisciplinaridade, está uma mesma raiz – a palavra disciplina. Ela está sempre presente em cada uma delas. O que nos permite concluir que todas elas tratam de qualquer coisa que tem a ver com as disciplinas. Disciplinas que se pretendem juntar: multi, pluri, a ideia é a mesma: juntar muitas; pô-las ao lado uma das outras. Ou então articular, pô-las inter, em inter-relação, estabelecer entre elas uma ação recíproca. O sufixo trans supõe um ir além, uma ultrapassagem daquilo que é próprio da disciplina. Aceitar

minha proposta como base de trabalho, como hipótese operatória, é aceitar que há qualquer coisa que atravessa a pluridisciplinaridade ou multidisciplinaridade, a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade. Que essa qualquer coisa é, em todos os casos, uma tentativa de romper o caráter estanque das disciplinas.

Tendo como evidente o fato de que os significados da multidisciplinaridade e da pluridisciplinaridade são praticamente os mesmos, isso é, uma abordagem de um tema por diversas disciplinas, sem uma relação direta entre elas. Devemos reconhecer iniciativas que intencionam a interdisciplinaridade sem, ao menos, ultrapassar as limitações dos referidos conceitos. Alguns levantamentos revelam que a confusão significativa dos termos descritos vem acontecendo frequentemente em escolas que propõem um projeto definitivo para todas as disciplinas. O problema consiste exatamente na superficialidade e na ineficiência da fragmentação curricular, que não é sequer percebida. Nessa perspectiva afirma Fazenda (2006, p. 38)

Sem dúvida, o que primeiro impressiona, tal sua visibilidade, é que os conteúdos dos diversos componentes curriculares, bem como atividades didáticas, não se integram. As diversas atividades e contribuições das disciplinas e do trabalho dos professores acontecem apenas se acumulando por justaposição: não se somam por integração, por convergência. É como se a cultura fosse algo puramente múltiplo, sem nenhuma unidade interna. De sua parte, os alunos vivenciam a aprendizagem como se os elementos culturais que dão ao conteúdo a seu saber fossem estanques e oriundos de fontes isoladas entre si.

Além disso, as ações docentes descritas, suas atividades técnicas e possíveis intervenções administrativas, quando ocorrem, desenvolvidas pela diversidade de profissionais da educação, no âmbito interno, são ineficientes na articulação e não alcançam uma unicidade do fim. É notório que a “autonomia” que cada um possui dificulta as ações interdisciplinares por demonstrar

caminhos diversos para cada profissional em sua ação. Ainda, como decorrente dessa prática culturalmente distorcida, observa-se uma:

[...] a hipertrofia do administrativo sobre o pedagógico, com o estranho desenvolvimento de uma postura autoritária e autocrática no exercício do poder. Nossa experiência cotidiana das relações no interior da escola comprova, mais uma vez, que à divisão técnica do trabalho se sobrepõe uma divisão social, fundada na distribuição desigual do poder (FAZENDA, 2006, p. 38).

Há que esclarecer que a transdisciplinaridade seria um contexto mais complexo, em que o cuidado para as ações e posturas convergissem sempre em torno de uma unicidade e não pela fragmentação do conhecimento, ultrapassando as disciplinas, transpondo seus limites, até mesmo ao ponto de alguns autores defenderem o fim da disciplinaridade. Nesse sentido, desenvolveremos a seguir os aspectos necessários para a construção de uma interdisciplinaridade que alcance os benefícios cognitivos da transdisciplinaridade.

5.2.1 A interdisciplinaridade em sua práxis

Em oposição ao uso indiscriminado da terminologia *inter*, *trans*, *pluri* e *multidisciplinaridade*, sem o devido cuidado com as características fundamentais de sua ação, reforçamos o discurso de muitos que entendem a própria interdisciplinaridade como uma ação, mais do que mera conceituação ou terminologia adequada a modismos. Vale aqui destacar o que diz Gusdorf (1977 citado por FAZENDA, 1991, p. 24), em sua carta remetida à professora Ivani Fazenda:

O que designa por interdisciplinaridade é uma atitude epistemológica que ultrapassa os hábitos intelectuais estabelecidos ou mesmo os programas de ensino. Nossos contemporâneos estão sendo formados sob um regime de especialização, cada um em seu pequeno esconderijo, abrigado das interferências dos vizinhos, na segurança e no conforto das mesmas questões estereis. Cada um por si e Deus por todos (...).

Assim, evidentemente a favor da interdisciplinaridade ter como função ampliar a visão de conhecimento para o todo (e não o seu contrário, a fragmentação), entenderemos que ela promove o diálogo entre as partes envolvidas. O que se critica é o isolamento das disciplinas, sedimentadas no conteúdo e, que, como pretende Gusdorf, essa situação apenas reforce a ideia de que o conhecimento visto como um todo não pode ser dividido sem que haja interação entre as partes. Entendendo as partes como disciplinas, podemos então concluir que o conhecimento é assim interdisciplinar.

Entretanto, devemos anotar que, mesmo o tema em questão, traz consigo ainda muita polêmica no âmbito educacional. Alguns defendem a especialização com afinco, atestando ser a interdisciplinaridade ineficiente e inapropriada, justamente por crerem ser o aprendizado válido somente aquele obtido através da concentração de áreas específicas.

Essa relutância frente à interdisciplinaridade ocorre pela tendência usual de adotar uma visão unilateral de um determinado fenômeno, compreendendo-o a partir de um ângulo distinto. Dentro de uma área de domínio restrita e fechada. A iniciativa de buscar outros pontos de vistas, outros ângulos, significa riscos e até mesmo o abandono de uma zona de conforto cognitiva. É certo que a realidade em que muitos docentes dispõem não favorece a uma ampla concepção da interdisciplinaridade; por não contar com tempo suficiente para o desenvolvimento de suas atividades e/ou também por não alcançarem formação coerente e continuada que lhes subsidiem.

É preciso então, um ponto de partida para que as práticas elevem o nível de reflexão, compreensão e, assim, de forma dialética – como numa síntese – retornem às práticas, dessa vez perfilada à exatidão interdisciplinar. Nesse sentido, as atividades interdisciplinares podem ser de vários níveis. Do mais simples texto em que sua abrangência atinge várias disciplinas envolvendo várias áreas do saber com profundidade relevante. Faz-se necessário dizer que, a partir de textos ou trabalhos simples, não significa incorrer no erro da superficialidade ou da artificialidade. Trabalhar interdisciplinarmente requer a busca epistemológica, o trabalho de pesquisa e formação constante para que a interação com outros professores de áreas diversas seja equivalente e produtiva.

Conforme nos alerta Gusdorf (1986 citado por POMBO; GUIMARÃES; LEVY, 2006), a interdisciplinaridade é uma necessidade premente da qual, uma vez constatada a carência em que se encontra o conhecimento científico devido ao seu processo de especialização, necessita de ações a se recorrer. Assim Gusdorf (1986 citado por PRADO, 2010, p. 29) afirma

O saber fragmentado é obra de uma inteligência dispersa que pode ser considerada como tendo perdido a razão. Daqui resulta um desequilíbrio que atinge toda a personalidade humana. Esta alienação científica é, sem dúvida, uma das causas do mal estar da civilização contemporânea.

Para reforçar esse posicionamento e essa demanda, recorreremos ao fato de que vários teóricos desde o século XVII anteviram essa situação. É o caso do pensador checo, pedagogo e teólogo, Comenius (Jan Amos Komensky, 1592-1670) que, em sua obra prima – *Didactica Magna* – propõe uma didática capaz de ensinar tudo a todos. Na obra “*Tratado de Arte Universal de Ensinar Tudo a Todos*” (COMENIUS, 2001 citado por PRADO, 2010, p. 30), ele define aquilo que chama de Pansofia, que vem a ser uma ciência universal com a propriedade de sanar o problema da fragmentação do conhecimento. Em fins do século XVII,

o filósofo, físico e matemático, Leibniz, considerado um gênio universal, concordava com Comenius, no aspecto de uma unificação do saber ser efetivada. Nesse sentido Gusdorf (1986 citado por PRADO, 2010, p. 30) afirma:

O gênero humano, considerado na sua relação com as ciências que servem ao nosso bem-estar, parece-me semelhante a uma multidão que marcha confusamente nas trevas sem ter nem chefe, nem ordem, nem palavra, nem outras marcas para regular a marcha e para se reconhecer. Em lugar de nos darmos as mãos para nos guiarmos mutuamente e assegurarmos os nosso caminho, corremos ao acaso e obliquamente; chocamos e magoamo-nos mesmo uns aos outros em vez de nos entreajudarmos e apoiarmos mutuamente. Atolamo-nos nos pântanos e areias movediças das dúvidas sem fim, onde não há nada de sólido ou de firme, ou então, arrastamo-nos nos princípios de erro mais perigoso. É fácil ver que o que mais nos poderia ajudar seria juntar os nossos trabalhos, partilhá-los com vantagem e regulá-los com ordem; mas, precisamente, o que é que ninguém se arrisca ao que é difícil, ao que não foi ainda desbravado, e todos acorrem ao que os outros já fizeram, ou copiando-se entre si, ou combatendo-se eternamente.

Segundo Gusdorf (1986 citado por PRADO, 2010, p. 30) a questão do conhecimento interdisciplinar é tão antiga que, apesar das tentativas de recuperar a unidade do conhecimento, o processo de desintegração do saber continua através da contínua especialização das disciplinas. Ele menciona, ainda, que o pensamento grego promoveu no Ocidente um processo racional que adquiriu âmbito geral de um modelo epistemológico que garantiu a coerência de um saber global harmonioso do universo. Esse saber refere-se a uma pedagogia unitária. Assim, o *Enkuklios Paideia* – assim denominado programa educacional helênico, a “enciclopédia” trata da invenção da cultura geral. O autor conclui que esse é o caminho do conhecimento epistemológico – o retorno ao tema do *Enkuklios Paideia*, salvaguardando a complexidade maior hoje exigida.

É chegada a hora de uma reunificação do espaço mental. Um reagrupamento dos saberes deve restituir ao ser humano o seu lugar privilegiado de ponto de partida e de ponto de chegada de todas as formas de conhecimento (GUSDORF, 1986 citado por PRADO, 2010, p. 31).

Assim, a questão interdisciplinar revela um movimento, um fluxo constante de ideias, debatendo constantemente papéis e ações. E, existem, todavia a esse cenário amplo de discussões, obstáculos a serem superados para que a prática interdisciplinar aconteça. O ponto que demanda maior atenção é, sem dúvida, o preparo e o investimento na formação do professor, pois, esse é de vital importância para a interdisciplinaridade.

5.2.2 A Formação Docente

Dos problemas e desafios acenados, o primeiro que nos chama a atenção é o da formação docente e, conseqüentemente, a predisposição desses a desenvolver uma ação interdisciplinar. É evidente que essa predisposição requer conhecimento, que, por sua vez, é fruto da formação adequada. Nesse sentido, Fazenda afirma:

Entendemos por atitude interdisciplinar, uma atitude diante de alternativas para conhecer mais e melhor; atitude de espera ante os atos consumados, atitude e reciprocidade que impele à troca, que impele ao diálogo – ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo – atitude de humildade diante da limitação do próprio saber, atitude de perplexidade ante a possibilidade de desvendar novos saberes, atitude de desafio – desafio perante o novo, desafio em redimensionar o velho – atitude de envolvimento e comprometimento com o projeto e as pessoas neles envolvidas, atitude, pois, de compromisso em construir sempre da melhor forma possível, atitude de responsabilidade, mas, sobretudo de alegria, de revelação, de encontro, enfim, de vida (FAZENDA, 1994 citado por BARNABÉ, 2011, p. 47-48).

No que tange às interações entre os conceitos, temas e disciplinas estudadas no âmbito escolar, existe uma deficiência evidente para que isso aconteça de fato. A formação escolar tem sido falha e omissa nessa reflexão, e até mesmo no ensino superior, criando um abismo intransponível para alguns docentes, naquilo que é pressuposto para a ação interdisciplinar.

Em consonância com esse problema da formação do docente, um fator agravante são as instituições que não se abrem ao novo, impedindo mudanças de possíveis profissionais comprometidos e idealizadores de uma interdisciplinaridade efetiva no meio didático. O diálogo entre os docentes fica comprometido. Além disso, a infraestrutura minimamente adequada para as ações interdisciplinar é um problema encontrado em espaços educacionais. Não basta transferir para o corpo docente as responsabilidades da interdisciplinaridade, muito mais, deve-se perceber o conjunto de adequações que subsidiam a sua existência no processo cognitivo dos alunos. É fundamental esclarecer que, como infraestrutura, concebemos não somente o espaço físico, materializado no prédio escolar, mas também a aquisição de material didático diversificado e conveniente ao processo do planejamento interdisciplinar.

Segundo Fazenda (2002 citado por BARNABÉ, 2011, p. 48), vencer a atitude cômoda de se trabalhar com o ensino isolado em disciplinas é um desafio a ser enfrentado. É mais fácil parcelar totalmente, sem amarras, o conhecimento do que promover debates de ideias de outros campos do saber. Para concluirmos esse aspecto, vale salientar que:

[...] uma última palavra para dizer que a interdisciplinaridade se deixa pensar, não apenas na sua faceta cognitiva – sensibilidade à complexidade, capacidade para procurar mecanismos comuns, atenção a estruturas profundas que possam articular o que aparentemente não é articulável – mas, também em termos de atitude – curiosidade, abertura de espírito, gosto pela colaboração, pelo trabalho em comum. Sem interesse real por aquilo que

o outro tem para dizer não se faz interdisciplinaridade. Só há interdisciplinaridade se somos capazes de partilhar o nosso pequeno domínio do saber, se temos a coragem necessária para abandonar o conforto da nossa linguagem técnica e para nos aventurarmos num domínio que é de todos e de que ninguém é proprietário exclusivo (POMBO, 2005 citado por BARNABÉ, 2011, p. 49).

5.3 Razões para a Interdisciplinaridade

Elaborar uma aula que relacione os conceitos matemáticos, em especial o Logaritmo, com a escala musical pitagórica e a escala musical temperada tem por característica a contextualização de atividades propostas que levem o aluno a desejar o aprendizado desse conteúdo específico e, como tudo que fora dito aqui, ampliar seu universo de compreensão rompendo as fronteiras matemáticas e alcançando voos artísticos. Razão fundamental de o enfoque interdisciplinar subsidiar o olhar didático e justificar as propostas com o apelo epistemológico dessas ações.

A prática interdisciplinar investiga e explora rumos com mais propriedade do que o conteúdo integrador das disciplinas em questão, apresentando objetivos junto aos alunos, quando esta é proposta. Assim, podemos anotar que seus objetivos permitem um melhor desenvolvimento das atividades, assegurando sua orientação, no sentido de definir o papel a ser desempenhado por esses na sociedade; desenvolver o senso crítico e a compreensão das informações recebidas e, por fim, despertar o encantamento e o interesse relativo aos conteúdos e suas formas de apresentação.

Nesse sentido, os autores aqui apresentados, têm um comum acordo que a questão interdisciplinar é complexa. Observam que há uma tendência premente de se adotar uma visão interdisciplinar na educação e que frequentemente isso é feito de modo artificial ou mesmo equivocado. A questão interdisciplinar

demanda estudo, como acenamos anteriormente, e maior conhecimento de como aplicá-la e adotá-la eficientemente. Vaideanu atenta para a necessidade de associar a interdisciplinaridade a outras novas ideias. Assim, os educadores, investigadores e responsáveis pelo planejamento de currículos devem estar cada vez mais preocupados com a articulação e a integração que seja aquela que consiga relacionar os princípios fundamentais dessa ação e os novos resultados das ciências da Educação e de evitar a ruptura entre os componentes de um mesmo sistema.

Para Delattre (1973 citado por PRADO, 2010, p. 35), a própria história do pensamento “[...] evidencia uma forte oscilação entre as sínteses filosóficas insuficientemente justificadas e as análises fragmentadoras que apenas conduzem a uma poeira de constelações empíricas não relacionadas entre si”. A interdisciplinaridade responde a essa necessidade sintetizadora em oposição às dificuldades que deparamos para a construção de comportamentos globais.

Dentro das ações didáticas que configuram situações caracterizadoras que justificam a prática interdisciplinar é o trabalho em grupo, promovendo socialização das ideias. Quando um conjunto de alunos tem a oportunidade de auxiliarem-se mutuamente, pensar nas possíveis soluções, indo além do conteúdo matemático e musical, desenvolvem características de interação social. Conforme Cândido (2001 citado por BARNABÉ, 2011, p. 50):

Podemos até mesmo afirmar que, sem a interação social, a lógica da criança não se desenvolve plenamente, porque é nas situações interpessoais que ela sente-se obrigada a ser coerente. Sozinha, a criança poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer do momento, mas em grupo, diante de outras pessoas, sentirá a necessidade de pensar naquilo que irá dizer e fazer para que possa ser compreendida [...]. Em um grupo há possibilidades de se descobrir preferências, negociar soluções, diluir dificuldades. Nesse processo, são evidenciados diferentes modos de pensamento sobre as ideias sugeridas nas discussões, o que permite o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, como investigação, inferência, reflexão e argumentação.

Com base nestes pontos cruciais da justificativa interdisciplinar, desenvolveremos através das oficinas e práticas em sala de aula as ações que relacionem os conceitos matemáticos ao significativo aprendido em comunicação ampla e curiosa com a escala musical pitagórica e a escala musical temperada. Objetivou-se que o enfoque interdisciplinar esteja diretamente dado na prática interdisciplinar, a qual ficam evidentemente caracterizada os pressupostos teóricos aqui descritos. Para tanto, o aluno desenvolve competências importantes à sua formação escolar e social, valorizando a aquisição cultural e o gosto pela arte musical. Assim, percorreremos os embasamentos fundamentais das áreas cognitivas da matemática e da música no capítulo a seguir.

6 ATIVIDADES (OFICINAS)

As atividades que se seguem, têm como principal objetivo apresentar ao aluno, através de práticas instigantes e desafiadoras, além de lúdicas, as relações existentes entre a Matemática e a Música.

Os conceitos formais serão construídos de maneira prática; o que torna o aprendizado mais interessante.

Sugere-se ainda, que o professor que possuir conhecimentos musicais e/ou conhecimentos sobre História da Arte, possa realizar uma atividade inicial de apreciação musical (2 horas-aula), com a finalidade de familiarizar o estudante com a música erudita além de proporcionar a possibilidade de discutir os diversos gêneros, ritmos e períodos apresentados. No anexo B deste trabalho, apresento ao professor uma lista de músicas que podem ser utilizadas nesta atividade de apreciação musical.

1ª atividade – A média aritmética e a média harmônica

Objetivos:

- relacionar o comprimento de uma corda com sua frequência;
- identificar a média aritmética e a média harmônica utilizando o monocórdio;
- relacionar as médias encontradas a sons consonantes;
- relacionar média aritmética e média harmônica.

Público-alvo:

Para estudantes do ensino médio. Vale salientar que essa primeira atividade pode ser adaptada para o ensino de frações no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos:

Compreender média aritmética. Compreender operações com números racionais.

Carga horária sugerida:

4 horas-aula.

Materiais e tecnologia:

1- Monocórdios (instrumento composto de uma única corda). Neste trabalho, para que os alunos comparem as frequências das notas, construímos um “quadricórdio” (instrumento com quatro cordas).

2- Medidor de frequência (digital ou software que meça frequência).

Descrição geral:

Os estudantes deverão localizar no monocórdio, (que será feito com uma corda de 1,2 m de comprimento), frações da corda inteira e relacionar sua frequência (medida pelo afinador) com a frequência do som da corda inteira.

1º passo: Permita aos alunos que manuseiem o aparelho (monocórdio), identificando suas partes e familiarizando-se com a sonoridade. Espera-se que se sintam à vontade para realizar a atividade.

2º passo: Peça aos alunos que dividam a corda do monocórdio em 12 partes iguais (Caso queiram construir um monocórdio com 12 trastes já marcados, conforme a figura abaixo. Isso facilitaria o trabalho com as frações e proporcionaria uma medição mais precisa).

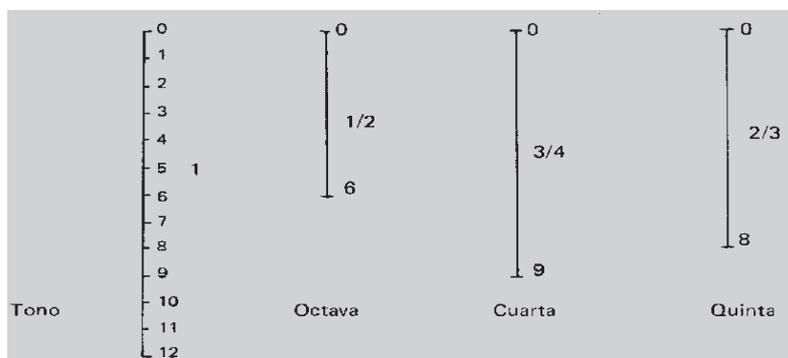


Figura 6 Divisões da corda do monocórdio – relação entre o tom, a oitava, a quarta e a quinta.

3º passo: Os alunos devem medir as frequências dos seguintes tamanhos da corda: inteira, metade, $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{4}$.

Estas medições acima terão, respectivamente, os seguintes comprimentos: 1,2 m; 0,6 m; 0,8 m; 0,9 m.

4º passo: Ao anotar as frequências referentes a essas frações os alunos serão orientados a observar que essas, ao serem vibradas, combinem com a corda inteira, ou seja, produzam poucos “batimentos”, indicando, portanto, que podemos construir “acordes musicais consonantes” com essas medidas.

5º passo: Os alunos deverão anotar as frequências desses sons e relacionar o comprimento da corda com sua frequência. Como sugestão, esses dados podem ser colocados em uma tabela, conforme a Tabela 11, abaixo:

Tabela 11 Relação entre o comprimento e a frequência de uma corda – sons consonantes

Comprimento da corda (em fração)	Comprimento da corda (em metros)	Frequência da corda (em Hz)
inteira	1,20	
metade	0,6	
2/3	0,8	
3/4	0,9	

Pretende-se com esta parte da atividade que os alunos determinem que o comprimento de uma corda e a frequência do som ao vibrá-la são inversamente proporcionais. Ou seja, ao dividir uma corda pela metade, por exemplo, o som produzido por sua vibração tem frequência dobrada em relação à frequência da corda inteira. Ou ao dividir uma corda em $2/3$ de seu comprimento original e vibrá-la, o som produzido tem frequência igual a $3/2$ da frequência da corda inteira. E assim sucessivamente.

6º passo: Peça aos alunos que observem os comprimentos dessa corda e tentem identificar entre eles a média aritmética e a média harmônica.

Nesse momento, cabe uma revisão sobre a média aritmética (caso seja necessário) mas principalmente sobre a média harmônica.

Historicamente, vale a pena citar que a média harmônica é conhecida desde a Grécia antiga, conforme citam Boyer e Merzbach (2012, p. 61), em História da Matemática:

Conta-se que Pitágoras soube, na Mesopotâmia, das três médias, aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) – e da “proporção áurea” [...]. Em algum momento, porém, os pitagóricos generalizaram esse trabalho acrescentando sete novas médias para perfazer dez ao todo. Se b é a média de a e c , onde $a < c$, então as três quantidades estão relacionadas por uma das equações seguintes:

1) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}$

2) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$

3) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$

4) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$

5) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

6) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$

7) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$

8) $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$

9) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$

10) $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

As três primeiras equações são, naturalmente, as equações para as médias aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente.

E ainda, sobre Filolau de Tarento e Arquitas de Tarento, temos: “Escreveu (Arquitas) sobre a aplicação das médias aritmética, geométrica e subcontrária à música, e provavelmente foi Filolaus ou Arquitas o responsável pela mudança do nome da última para "média harmônica"” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 69).

Assim, vale a pena definir com os alunos

Um número é a média aritmética de dois outros, quando o excesso do primeiro para o segundo é igual ao excesso do segundo para o terceiro, e a média harmônica quando a quantidade que o primeiro excede o segundo, em relação ao primeiro é igual à quantidade que o segundo excede o terceiro, em relação ao terceiro. Em notação moderna, sendo o primeiro x , o segundo m e o terceiro y ($x > m > y > 0$):

$$x - m = m - y \text{ (média aritmética)}$$

$$\frac{x-m}{x} = \frac{m-y}{y} \text{ (média harmônica)}$$

E que, após transformações, chegam às fórmulas:

$$m = \frac{x+y}{2} \text{ (média aritmética)}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \text{ (média harmônica)}$$

Ou ainda melhor, que a média harmônica equivale ao inverso da média aritmética dos inversos de n valores.

Como exemplo, temos:

Calcule a média harmônica entre 2, 6 e 8.

Primeiramente é necessário calcular a média aritmética dos inversos dos valores dados:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}}{3} = \frac{\frac{12+4+3}{24}}{3} = \frac{19}{24} = \frac{19}{24} \times 3 = \frac{19}{8}$$

Depois, faz-se o inverso do resultado, tendo finalmente a média harmônica de 2, 6 e 8:

$$\frac{1}{\frac{19}{8}} = \frac{8}{19} \cong 3,7894$$

E ainda vale citar que a média harmônica está relacionada ao cálculo matemático das situações envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Como exemplo contextualizado (aplicado), temos:

Um veículo realizou o trajeto de ida e volta entre as cidades A e B. Na ida ele desenvolveu uma velocidade média de 80 km/h, na volta a velocidade média desenvolvida foi de 120 km/h. Qual a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta?

Embora não tenha sido dito no enunciado, estamos considerando que os trajetos de ida e volta têm a mesma medida.

É fácil entender que a média aritmética das velocidades seria de 100 km/h:

$$\frac{80+120}{2}=100$$

Porém a pergunta não foi qual a média das velocidades, mas sim qual a velocidade média para realizar todo o percurso.

A resposta para esta pergunta seria a média harmônica de 96 km/h:

$$\frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{3+2}{240}} = \frac{2}{\frac{5}{240}} = \frac{2 \times 240}{5} = 96 \text{ Km/h}$$

Mas por que 96 km/h? Em que se baseia esse resultado?

Vamos fazer o seguinte, já que independentemente da distância entre as cidades as velocidades médias foram de 80 km/h na ida e de 120 km/h na volta. Para facilitar a explicação vamos considerar arbitrariamente que a distância entre as cidades A e B seja de 120 km.

Com base nessas informações, podemos concluir que o tempo gasto na ida seria de uma hora e meia, que é a distância entre as cidades dividida pela velocidade média da ida:

$$\frac{120}{80}=1,5$$

Analogamente, na volta, o tempo gasto seria de uma hora:

$$\frac{120}{120}=1$$

Então para realizar o percurso total de 240 km/h se gastaria 2,5 h, donde concluímos que a velocidade média foi de 96 km/h:

$$\frac{240}{2,5}=96$$

7º passo: Os alunos deverão encontrar uma relação algébrica entre as médias aritmética e harmônica.

Assim, pretende-se que o aluno trabalhe com procedimentos algébricos, utilizando:

$$m = \frac{a+b}{2}, \text{ onde } m \text{ é a média aritmética entre dois números } a \text{ e } b$$

e,

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \text{ onde } h \text{ é a média harmônica entre dois números. Assim,}$$

é fácil ver que:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{b+a}{ab} \right) \quad (I)$$

e como $2m = a + b$, substituindo em (I) temos:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{ab} \right) = \frac{m}{ab}$$

Logo, $hm = ab$

8º passo: Os alunos devem medir agora as seguintes frequências da corda: inteira, metade, 15/16, 5/6, 13/24.

Estas medições acima terão, respectivamente, os seguintes comprimentos: 1,2 m; 0,6 m; 1,125 m; 1,0 m; 0,65 m.

Tabela 12 Relação entre o comprimento e a frequência de uma corda - sons dissonantes

Comprimento da corda (em fração)	Comprimento da corda (em metros)	Frequência da corda (em Hz)
inteira	1,20	
metade	0,6	
15/16	1,125	
5/6	1,0	
13/24	0,65	

Ao anotar as frequências referentes a essas frações, os alunos serão orientados a observar que as frações da corda, ao serem vibradas, combinam menos com a corda inteira, ou seja, produzem bastantes “batimentos”; e que também não existem médias aritméticas e harmônicas envolvendo esses valores.

Reflexão sobre a atividade

Após estas medições, espera-se que os alunos sejam capazes de observar que as frações “pequenas” produzem menos batimentos, ou seja, combinam mais com a vibração da corda inteira.

1- Isso seria um fator para Pitágoras concluir que esses sons deveriam pertencer a uma escala musical natural?

2- Pesquise mais sobre a Tetraktys e relacione com os sons consonantes encontrados por você e por Pitágoras.

3- Também pode-se aproveitar essa atividade para desenvolver um trabalho interdisciplinar com a Física, explorando mais a ideia de frequência, comprimento de onda, timbre, amplitude, etc.

Vale salientar que diferenciar conceitos como intensidade sonora, timbre e altura e relacioná-los respectivamente à amplitude, comprimento de onda e a forma da onda sonora pode facilitar o entendimento do aluno.

2ª atividade – Construindo a escala pitagórica

Objetivos:

- encontrar a escala pitagórica utilizando o *percurso de quintas*, (identificar as notas e suas respectivas frequências);
- compreender a escala pitagórica como uma espiral, e não como um ciclo fechado;
- compreender a necessidade do temperamento igual.

Público-alvo:

Estudantes do ensino médio.

Pré-requisitos:

Compreender operações com números racionais.

Carga horária sugerida:

2 horas-aula.

Materiais e tecnologia:

1- Monocórdios (instrumento composto de uma única corda).

Obs: Caso não seja possível construir um monocórdio, veja em anexo uma alternativa para realizar essa atividade utilizando um violão.

2- Medidor de frequência (digital ou software que meça a frequência).

Descrição geral:

Os estudantes deverão localizar no monocórdio, (que será feito com uma corda de 1,2 m de comprimento), frações da corda inteira seguindo um percurso de quintas, conforme Pitágoras realizou seu experimento.

1º passo: Peça os alunos que dividam a corda do monocórdio em 12 partes iguais.

2º passo: Meçam a frequência da corda inteira, afinando-a até encontrar 132,000 Hz. Consideraremos essa frequência como sendo a frequência 1.

3º passo: Meçam a frequência da metade da corda. Espera-se que os mesmos encontrem o dobro da frequência da corda inteira, portanto, 264,000 Hz. Consideraremos essa frequência como sendo a frequência 2. Como já apresentado anteriormente, essas notas equivalem-se. Assim, quando uma mulher ou criança acompanha um homem cantando, isso ocorre por uma diferença de oitava, o que nos leva a considerar como equivalentes notas que difiram por um número de oitavas.

4º passo: Assim, supomos que as outras notas procuradas para formar nossa escala estejam entre essas frequências. Assim, pediremos aos alunos que meçam $\frac{2}{3}$ da corda e anotem essa frequência. Ela será equivalente a 198,000 Hz, pois a frequência de $\frac{2}{3}$ da corda é igual a $\frac{3}{2}$ do valor da frequência 1.

5º passo: Os alunos deverão anotar as frequências desses sons e relacionar o comprimento da corda com sua frequência. Assim, encontramos a 1ª

nota existente entre as duas notas básicas que consideramos (a de frequência 132,000 Hz e a de frequência 264,000 Hz).

6º passo: Peça aos alunos que meçam agora uma sequência de $\frac{2}{3}$ da corda anteriormente medida. Caso encontrem um valor superior a 264, 000 Hz, esses devem dividir o valor por 2 (dois) para que encontre uma nota equivalente a essa dentro do intervalo pesquisado.

Dessa forma, deverão encontrar as seguintes medidas:

Tabela 13 Encontrando as notas musicais pelo percurso de quintas

Comprimento da corda (em fração)	Comprimento da corda (em metros)	Frequência da corda (em Hz)	Organização das notas?
inteira	1	132,000	do
metade	2	264,000	do
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	176,000	fá
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	198,000	sol
$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{297}{2} =$ 148,500	re
$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{8}$	222,75	la
$\frac{16}{81}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{668,25}{4} =$ 167,0625	mi
$\frac{32}{243}$	$\frac{243}{32}$	250,59375	si
$\frac{64}{729}$	$\frac{729}{64}$	187,94	Sol b
$\frac{128}{2187}$	$\frac{2187}{128}$	140,95	réb
$\frac{256}{6561}$	$\frac{6561}{256}$	211,43	láb
$\frac{512}{19683}$	$\frac{19683}{512}$	158,5788	Mib
$\frac{1024}{59049}$	$\frac{59049}{1024}$	237,86	sib

6º passo: A partir da construção da tabela 13, os alunos serão levados a observarem que essa sequência não fecha em um ciclo, ou seja, é uma espiral.

Essa observação deve ser confirmada pelos alunos a partir da análise de que o percurso de quintas gera notas com frequência $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ e a oitava pura gera notas com frequência de 2^m . Ou seja, $\left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 2^m$.

Assim os alunos devem ser questionados em que valores de n e m esta diferença mais se aproxima de uma igualdade. E isto deverá ser percebido para

$n = 12$ e $m = 7$ e portanto $\left(\frac{3}{2}\right)^n / 2^m$ se aproxima mais da unidade. A partir dessa

observação, espera-se que os alunos percebam que 12 notas geradas pelo percurso de quintas são uma boa aproximação para a criação de uma escala musical.

Dessa maneira a necessidade de uma formatação para essa escala levou à ideia do temperamento, ou seja, construir uma escala em que os intervalos entre as notas fossem todos iguais.

Reflexão sobre a atividade

Os estudantes serão instigados a procurar por outras formas de encontrar estas notas e pesquisar sobre outros ciclos: ciclos de terças, ciclos de quartas, etc.

Também vale pesquisar sobre as escalas orientais e como elas são organizadas.

Outra possibilidade ainda é pesquisar sobre outros teóricos matemáticos que escreveram sobre a música e em específico sobre as escalas musicais e como eles desenvolveram suas ideias.

3ª atividade – Construindo a escala temperada

- Encontrar as frequências das 12 notas musicais, utilizando o termo geral

de uma progressão geométrica.

- Construir uma tabela comparando as frequências das notas da escala pitagórica com a escala temperada.

Público-alvo:

Estudantes do ensino médio.

Pré-requisitos:

Compreender operações com números racionais, compreender progressões geométricas e o uso do seu termo geral.

Carga horária sugerida:

2 horas-aula.

Materiais e tecnologia:

Lápis, papel e calculadora.

Descrição geral:

1º passo: De acordo com as conclusões tomadas na atividade anterior, os alunos deverão encontrar uma razão que iguale todos os “espaços” entre as notas musicais escolhidas para compor a escala musical.

Assim, como o primeiro termo é o dó, com frequência 1 e o último termo é outro dó com frequência 2 e sabendo que uma progressão geométrica tem relação direta com uma função exponencial, os estudantes devem calcular a razão, (que será o valor da frequência), calculado a partir da fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

Então, como já dito anteriormente, temos que:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$2 = 1q^{13-1}$$

$$2 = q^{12}$$

$$q = \sqrt[12]{2} = 1,05946$$

2º passo: Dessa forma, com a definição desta razão os alunos deverão construir a tabela 14, que apresenta as frequências calculadas por ele para cada nota utilizando o procedimento pitagórico e utilizando a frequência que iguala os intervalos entre as notas musicais (o temperamento igual).

Esses cálculos deverão ser feitos utilizando uma calculadora científica e o valor de q deve ser aproximado de 5 casas decimais.

Esta tabela consta nesse trabalho na página 22.

Tabela 14 Relação entre a frequência das notas musicais da escala Pitagórica e da escala temperada

Nota	Relação de frequência (Pitagórica)	Frequência (Hz)	Relação de frequência (temperada)	Frequência (Hz)
Dó				
Réb				
Ré				
Mib				
Mi				
Fá				
Solb				
Sol				
Láb				
Lá				
Sib				
Si				
Dó				

3º passo: Os alunos deverão observar que o temperamento igual resolve o problema da espiral, transformando a escala musical em um ciclo, mas que

essa mudança difere das frequências das notas originais (naturais) encontradas pelos pitagóricos, o que, para alguns especialistas, representa uma deformação do som original, ou seja, as melodias “perderiam” em emoção.

Reflexão sobre a atividade

Após estas medições, espera-se que os alunos sejam capazes de observar que a razão encontrada por eles para a frequência da escala temperada foi calculada de maneira fácil por conta do uso de uma calculadora científica. E que o mesmo cálculo foi feito “manualmente” quando esse recurso não existia.

1- Então como foi feito o cálculo de $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$? Que recurso foi usado?

Os alunos também podem ser instigados a pesquisar sobre os afetos musicais para melhor compreensão das vantagens e desvantagens do temperamento igual.

4ª atividade – Entendendo o logaritmo

- Compreender o logaritmo como operação inversa da exponencial.
- Encontrar o logaritmo de diversos números na base 10, utilizando o procedimento de Briggs (média geométrica).

Público-alvo:

Estudantes do ensino médio.

Pré-requisitos:

Compreender equação exponencial e função exponencial.

Compreender média geométrica e sua relação com a equação exponencial.

Compreender o logaritmo como uma ferramenta para facilitar cálculos.

Carga horária sugerida:

3 horas-aula.

Materiais e tecnologia:

Lápis, papel e calculadora.

Descrição geral:

1º passo: Pedir aos alunos que resolvam diversas equações exponenciais, apresentadas através de problemas contextualizados; (por exemplo, crescimento de bactérias, decaimento radioativo, etc.). Procure colocar situações-problemas em que a equação exponencial é possível de se resolver sem a utilização de logaritmos, ou seja, apenas pela igualdade das bases.

2º passo: Sugira um problema que não seja possível resolver por esse procedimento. Como exemplo, $10^x = 2$.

A partir da observação desta equação os alunos perceberão que o resultado de x está entre 0 e 1, já que $10^0 = 1$ e que $10^1 = 10$.

3º passo: Dessa forma, como a sequência exponencial é uma progressão geométrica, sugira aos alunos que construam uma tabela e utilizem a média geométrica para fazer uma aproximação do valor de x . Essa tabela deve ser construída conforme a tabela da página 25.

4º passo: O aluno deverá também resolver as seguintes equações, utilizando o mesmo método:

a) $10^x = 3$

b) $10^x = 5$

5º passo: A partir desse resultado, pedir aos alunos que calculem os logaritmos de 2, 3 e 5 na base 10, utilizando a calculadora. Pedir que comparem estes resultados com os encontrados por eles nas tabelas que construíram anteriormente. Diante dessa observação, os alunos chegarão à definição do logaritmo:

$$a^m = b$$

Reescrevendo na forma de logaritmo

$$\log_a^b = m$$

6º passo: Com a definição do logaritmo, os alunos serão instigados a calcular, utilizando a calculadora, os seguintes logaritmos decimais:

Logaritmo de 6 na base 10, e mostrar que $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3$.

Logaritmo de 10 na base 10 e mostrar que $\log 10 = \log(2 \times 5) = \log 2 + \log 5 = 1$.

Logaritmo de 5 na base 10 e mostrar que $\log 5 = \log(10 \div 2) = \log 10 - \log 2$.

Logaritmo de 4 na base 10 e mostrar que $\log 4 = \log(2^2) = 2 \times \log 2$

Dessa maneira, as principais propriedades dos logaritmos decimais ficam:

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$$c) \log_a x^m = m \log_a x$$

OBS: Vale salientar que os cálculos feitos acima não demonstram as propriedades, mas exemplifica-las e pode facilitar o entendimento dos alunos. Cabe ao professor discutir com os alunos que mostrar uma propriedade para alguns números reais, não significa demonstrá-las.

7º passo: Com a definição do logaritmo, os alunos deverão calcular a razão do temperamento igual musical, ou seja, encontrar o valor da razão $2^{\frac{1}{12}}$. Deixar que os alunos decidam como encontrarão o resultado. Pode lhes sugerir encontrar pela média geométrica ou utilizando logaritmos.

Reflexão sobre a atividade

Após esta atividade os alunos serão instigados a refletir sobre a facilidade que o logaritmo proporciona para esse tipo de cálculos.

Também podem-se mostrar outras aplicações do logaritmo, como nos juros compostos, na escala de magnitude (escala Richter), no decaimento radioativo, etc.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As transformações visíveis no ensino da matemática nos levam a concluir que atividades que contemplem apenas a manipulação algébrica ou o cálculo direto não são mais adequadas. O conhecimento matemático, frente ao mundo moderno e sua nova dinâmica, deve ser sólido e contextualizado, de maneira que o estudante se torne uma pessoa capaz de tomar decisões assertivas e positivas. Ao lecionarmos, percebemos que o logaritmo é um tema que desperta no aluno uma aversão ao seu aprendizado e ao professor uma dificuldade em torná-lo mais desafiador e interessante.

Como a música abrange conceitos matemáticos desde os mais simples, como frações nas divisões de compasso, até os mais complexos, como os logaritmos na construção de sua escala moderna, essa área foi utilizada neste trabalho como o foco para a elaboração das atividades.

Neste trabalho, procuramos elaborar uma sequência didática, apoiada em conceitos musicais e na resolução de problemas, que pode ser aplicada por professores em turmas de 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio. Também são atividades que envolvem outros conceitos mais simples, como por exemplo, médias, e que portanto, com poucas adaptações, algumas atividades podem ser feitas em turmas de Ensino Fundamental. E assim, espera-se que este trabalho possa fazer com que o estudante compreenda os logaritmos, sua necessidade e suas propriedades e aplicações. Também se espera que, este trabalho conquiste não só o estudante, mas que desperte no docente o desejo pela investigação de novas possibilidades para o ensino do logaritmo e de outros conceitos matemáticos, apontando para um ensino diferenciado, atualizado e contextualizado.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: pensamentos analógicos na construção de significados. 4. ed. São Paulo: Escrituras, 2002. (Coleção Ensaio transversais).

BARNABÉ, F. M. **A melodia das razões e proporções**: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática. 2011. 68 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação, São Paulo, 2011.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **Historia da matemática**. São Paulo: E. Blucher, 2012.

COMO surgiram os nomes das notas musicais? **Super Interessante**, São Paulo, n. 000, set. 1987. Disponível em: <<http://super.abril.com.br/cultura/como-surgiram-nomes-notas-musicais-512432.shtml>>. Acesso em: 05 ago. 2013.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: um projeto em parceria. São Paulo: Loyola, 1991.

FAZENDA, I. C. A. (Org.). **Didática e interdisciplinaridade**. 11. ed. Campinas: Papirus, 2006. (Coleção Práxis).

GARDNER, H. **Estruturas da mente**: a teoria das inteligências múltiplas. Porto Alegre: Artmed, 1994.

INSTRUMENTOS musicales: 1. Pitagoras y el monocordio. 2006. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/dopolesei/instrumentos-musicales/1-pitagoras-y-el-monocordio>>. Acesso em: 01 jun. 2013.

POMBO, O.; GUIMARÃES, H. M.; LEVY, T. (Org.).
Interdisciplinaridade, antologia. Porto: Campo das Letras, 2006.

POMBO, O. Interdisciplinaridade e a integração dos saberes. In: CONGRESSO LUSO-BRASILEIRO SOBRE EPISTEMOLOGIA E INTERDISCIPLINARIDADE NA POS-GRADUAÇÃO, 1., 2004, Porto Alegre. **Conferência ...** [S.l.: s.n.], 2004.

PRADO, L. A. G. **Matemática, física e música no renascimento**: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar. 2010. 110 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação, 2010.

SADIE, S. **Dicionário Grove de Música**: edição concisa. Rio de Janeiro: Zahar, 1994.

ANEXOS

ANEXO A – Faixas musicais para aula de apreciação musical

Abaixo seguem faixas musicais como sugestão para que os alunos possam fazer uma apreciação musical que proporcione uma ampliação nas possibilidades auditivas dos mesmos.

Faixa1: Haendel, De torrente in via bibet – Dixit dominus. Duo para vozes femininas (soprano e contralto). Obra densa e com diversos momentos de tensão musical (acordes dissonantes) seguidos de momentos de relaxamento musical (acordes consonantes). Texto em latim: *De torrente in via bibet, propterea exaltabit caput. (tradução: Ele vai beber da corrente no caminho, e então ele vai manter a cabeça erguida).*

Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=t9ByTPF6KE0>

Faixa2: Phillippe Jaroussky, Philippe Jaroussky . "Cum Dederit " and "Tecum Principium" by A. Vivaldi. – Contratenor francês com voz muito próxima à dos “castrati”. Mostra a preocupação dos compositores clássicos (Vivaldi) em valorizar a performance. –

Faixa 3: Haendel - Venti, turbini, prestate.

Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=XptvT2-7NYI>

Faixa 4: J.S.Bach -Toccatà e Fuga BWV 565 – Peça para órgão de tubos. Evidencia a polifonia.

Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=Zd_oIFy1mxM

Faixa 5: Stasa Mirkovic Grujic - Claude Debussy - Clair de lune

Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=evI-sCxYM3Y>

As faixas abaixo foram sugeridas no trabalho de Mestrado do professor Luiz Antônio Gagliardi Prado: Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar, apresentado à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo - 2010

Faixa 6: *Lhahi dha Juk*, 1989 - Cantos sagrados de cura tibetanos, executados por monges tibetanos do Gaden Shartse Monastery localizado na colônia tibetana do sul da Índia. Estes cânticos são um exemplo de utilização de notas cujas alturas tonais não são bem definidas, apresentando sons de variação de frequência contínuos.

Faixa 7: Abdelli - *JSK New Moon*, 1995. Abdelli nasceu no norte da África e faz parte de um grupo indígena que ocupava o norte do continente antes da chegada dos Árabes. Música gravada no Real World Records Ltd e faz parte de uma coletânea de World Music publicada em 1996 na Itália sem uso comercial por *La Repubblica*, respeitado jornal Italiano embora esta música apresente pequenos trechos em que os sons não são discretos, a grande maioria dos intervalos utilizados são discretos e de uma escala bem definida mas oriental, não representando nenhuma das escalas utilizadas no ocidente. É interessantes perceber que alguns intervalos não são familiares e portanto não fazem parte da música ocidental em geral.

Faixa 8: Sheila Chandra - *Speaking in tongues III*, 1994 Real World Records Ltd. Faz parte de uma coletânea de World Music publicada em 1996 na Itália sem uso comercial por *La Repubblica*, respeitado jornal Italiano. Sheila nasceu no sul da Inglaterra e é filha de imigrantes vindos do sul da Índia. Esta música é realizada exclusivamente com uma única voz feminina. Mostra uma enorme

riqueza rítmica e domínio vocal para pronúncia e produção de sons discretos e também com uma certa variação contínua de frequência em algumas notas.

Faixa 9: Baaba Maal, *Call to prayer*, 1989 - Virgin Records Ltd. Faz parte de uma coletânea de World Music publicada em 1996 na Itália sem uso comercial por *La Repubblica*, respeitado jornal Italiano □ Baaba Maal nasceu na África em uma pequena vila do Senegal. Sua música tem muita influência da música ocidental, mas ele utiliza uma maneira de cantar que não se limita a sons musicais bem definidos. Sua melodia passeia pelo espectro contínuo de frequências sonoras de maneira harmoniosa. Este é um exemplo de música cuja melodia não está estritamente cerceada em uma dada escala.

Faixa 10: Peter Gabriel, *Zaar*, 1990 - Peter Gabriel LTd. O famoso compositor inglês faz uso extenso de recursos que lhe dão oportunidade de não ficar preso em escalas ou alturas tonais bem definidas. Esta música é uma contem uma estrutura harmônica ocidental, mas está repleta de sons que não estão presentes em escalas ocidentais. Peter Gabriel faz um uso rico de sons, às vezes não definidos em altura, e de outras escalas exóticas que enriquecem-na e a caracterizam um pouco fora do âmbito baseado estritamente nas escalas ocidentais.

Faixa 11: L.Subramaniam, *Lost Love!*, Erato Disques Paris, 1999. L. Subramaniam é violinista indiano e considerado o "Paganini da música clássica indiana". Por ser um instrumento não temperado, Subramaniam utiliza o violino realizando melodias que estão dentro de escalas indianas (diferentes das escalas ocidentais) e faz grande uso de notas que apresentam variações de frequência contínua. Este é mais um exemplo de música que não está exclusivamente compreendida dentro dos limites de escala. Segundo o próprio autor, esta composição tem estrutura micro-tonal (contendo intervalos tonais bem menores

do que um semi-tom) onde o koto (instrumento tradicional japonês) se mescla eloquentemente com o violino indiano. Podemos perceber um certo "choro" que o violino dá em algumas notas justamente com a variação de frequência.

Faixa 12: Subramaniam, *Gipsy Trail!*, Erato Disques Paris, 1999. - Também de L. Subramaniam nesta música há um diálogo entre o violino e uma voz feminina. Ambos fazem uso extensivo de melodias com notas não discretas. É bem visível o uso da variação contínua de frequência tonal. Mais adiante um violão espanhol e uma densa percussão indiana se juntam formando uma base harmônica seguindo a escala temperada ocidental enquanto a voz e o violino continuam se expressando através de suas escalas exóticas cheias de micro-tons.

Faixa 13: *Purupuruweny / Puupu Iuen*, Paxinã Poty Apalai et Sarina Apalai, arranjado por Marlui Miranda - Música indígena, tocada por índios brasileiros Kayapó Xikrin, de Macapá -. Esta faixa mostra várias melodias sendo tocadas simultaneamente por flautas Turékoka e outros instrumentos mais adiante. Este exemplo mostra que mesmo os índios têm aparentemente uma escala, dada que as notas são as mesmas que se repetem ao longo da música, entretanto é interessante notar que os intervalos utilizados são bastante incomuns comparados com aqueles presentes na escala ocidental temperada.

Faixa 14: Sons de pássaros - Aves Brasileiras I, John Dlagas Frisch. Alguns sons de pássaros brasileiros foram gravados entre 1958 e 1964. Aqui podemos observar que os pássaros utilizam algumas notas discretas com frequências definidas mas com algumas notas indefinidas, produzindo um som contínuo que varia com a frequências. O primeiro pássaro é o **Corruíra-do-brejo**: percebemos que a terceira "nota" não é discreta e sim contínua. O segundo é o **Sabiá coleira** - Faixa 15: percebemos que várias de suas notas não são discretas. O pássaro

Tovaca - Faixa 16: executa uma nota repetidas vezes que vai aumentando a altura tonal lenta e gradativamente. **O Pixarro** - Faixa 17 e o **Tipio** - Faixa 18 assobiam notas com variação de frequência contínua descendente. O **Jaó** - Faixa 19: assobia um intervalo que é menor que o intervalo de um semitom.

Faixa 20: Shankar, *Morning Love*, EMI Records, 1976. Ravi Shankar, toca uma musica baseada em uma Raga clássica. Esta música é um ótimo exemplo para perceber as escalas utilizadas que são distintas daquelas que estamos acostumados no ocidente.

Faixa 21: Matt Turner and Jeff Song, *Reclusive Prayer*, O.O. Discs, INC. 1992. Esta faixa mostra um dialogo sonoro entre dois músicos. De uma lado Matt Turner tocando violoncelo e voz e de outro Jeff Song tocando kayagum e também voz. A concepção melódica que eles utilizam foge à estética comum e às escalas usuais. É um exemplo em que os intervalos não são bem definidos e em algumas situações eles produzem dissonâncias através da reprodução de duas notas vocais com frequências muito próximas.

ANEXO B - Usando o violão como monocórdio.

Primeiramente, definem-se e mostram-se as partes do violão.



Figura 1- Partes do violão

Fonte: Monteiro Jr., Medeiros e Medeiros (2003, p. 113)

1 - **Caixa de Ressonância** - Corresponde ao corpo do violão. Onde a sonoridade varia de acordo com o tamanho, formato ou madeira usada na confecção do instrumento. É composta pelo tampo (parte superior e principal responsável pela amplificação do som), fundo (parte inferior) e faixas (parte lateral).

2 - **Rasteiro** - Haste de marfim ou acrílico onde começa a parte útil da corda.

3 - **Cavalete** - Peça de madeira que prende cordas e rasteiro.

4 - **Boca** - Orifício localizado no corpo do violão por onde o som se propaga.

5 - **Cordas** - Parte fundamental onde são produzidas as notas musicais. O som é formado a partir da casa pressionada no braço do instrumento ou pela corda solta.

6 - **Braço e trastes** - O **braço** é a parte do instrumento onde se localizam as casas e os trastes. Os **trastes** (ou trastos) dividem o braço do instrumento em casas de maneira a alcançar a altura correta das notas (comprimento efetivo da corda). São hastes de metal, fixadas transversalmente ao comprimento do braço.

7 - **Casas** – Espaços entre os trastes.

8 - **Pestana** - Tem a função de servir como apoio para as cordas direcionando-as para as tarrachas.

9 - **Tarrachas** - Têm a finalidade de alcançar a afinação correta, esticar ou distender as cordas.

10 - **Cabeça** - Encontrada na parte superior do braço. Serve de suporte para o mecanismo das Tarrachas.

Nas atividades pode-se substituir o monocórdio por um violão. A intenção é facilitar a realização da atividade, pois é bem mais fácil ter acesso a um violão do que um monocórdio.



Foto 1: Medindo as notas no violão.

- Como achar as notas da escala pitagórica no monocórdio (violão).

Medir (com uma régua) o comprimento da sexta corda do violão a partir de seus pontos extremos (cavelete e ponte). Depois disso, achar as relações de cada nota da escala pitagórica, marcando (com pincel atômico) o tamanho encontrado.

Para tocar a nota encontrada delimite a corda através de um traste móvel colocado sob a corda nos locais marcados.

Uma dúvida que pode ocorrer no momento das medições no violão: onde seria o ponto inicial de medição dos valores, pois para cada valor conseguido, dividia-se a corda em dois pedaços. Escolhe-se o cavelete (que fica perto da boca do violão) para ser nosso ponto de origem, pois se ouve os intervalos de maneira mais satisfatória pela a caixa de ressonância do violão.

As marcações feitas na corda do violão (escala pitagórica) não coincidirão com os trastes da escala do violão. As notas da escala pitagórica estarão pouco antes (ou pouco depois) desses trastes e pode-se debater a respeito da escala temperada igual (assunto que será abordado nas próximas atividades).

Deve-se chegar ao entendimento de que a escala do violão ficou um pouco "desafinada" em relação à escala de Pitágoras (ou vice-versa). Somente o intervalo de oitava (a metade da corda) coincidiu com o traste, porque essa nota também é a metade tanto na escala temperada (usada no violão) quanto na escala pitagórica.