



ADRIELE GIARETTA BIASE

**PROPOSIÇÃO DE TESTES
COMPUTACIONALMENTE INTENSIVOS DE
NORMALIDADE MULTIVARIADA**

**LAVRAS – MG
2011**

ADRIELE GIARETTA BIASE

**PROPOSIÇÃO DE TESTES COMPUTACIONALMENTE INTENSIVOS
DE NORMALIDADE MULTIVARIADA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

LAVRAS - MG
2011

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Biase, Adriele Giaretta.

**Proposição de testes computacionalmente intensivos de
normalidade multivariada**

Adriele Giaretta Biase. – Lavras : UFLA, 2011.

124 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2011.

Orientador: Daniel Furtado Ferreira.

Bibliografia.

**1. Monte Carlo. 2. Bootstrap paramétrico. 3. Algoritmo. 4. R. 5.
Poder. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.**

CDD – 519.535

ADRIELE GIARETTA BIASE

**PROPOSIÇÃO DE TESTES COMPUTACIONALMENTE INTENSIVOS
DE NORMALIDADE MULTIVARIADA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 21 de dezembro de 2011.

Dr. José Airton Rodrigues Nunes

UFLA

Dr. Marcelo Tavares

UFU

Dr. Renato Ribeiro de Lima

UFLA



Dr. Daniel Furtado Ferreira
Orientador

LAVRAS - MG

2011

AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar e iluminar o meu caminho.

Ao meu orientador, Daniel Furtado Ferreira, fonte de inspiração, saberes e paciência. Obrigada pelas críticas, orientações e elogios que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus pais, que me ensinaram a engatinhar, andar e, acima de tudo, amor e suporte. Saibam que com todo este esforço foi com que me deste sustentabilidade para seguir adiante e a traçar o meu caminho.

À minha irmã Érica, que não seguiu a área das exatas, mas sempre se colocou à disposição em ouvir e sugerir opiniões. Ao meu cunhado Edivânio, que, por diversas vezes, foi tão prestativo, a ele minhas considerações. Ao meu sobrinho Davi, pelo sorriso inocente.

À minha irmã Nádia, que me apoiou nas decisões difíceis dos caminhos a serem tomados, por ter um horizonte mais amplo e abrangedor.

Ao Fernando, pelo amor, apoio, atenção, carinho e compreensão dado em todos os momentos.

Aos membros da banca examinadora, José Airton Rodrigues Nunes, Marcelo Tavares e Renato Ribeiro de Lima, pelas sugestões e contribuições para o aprimoramento desse trabalho.

A todos os funcionários do DEX, em especial à Josi, secretária da Pós-graduação do Departamento de Ciências Exatas, pela atenção e os serviços prestados.

A todos os meus colegas do mestrado que compartilharam alegrias e trocas de experiências. Além desses, fica uma homenagem à Carolina (Tica), Danilo, Ênio e a Siomara pela amizade.

Aos alunos do DINTER, em especial ao Nelson, pelas considerações, brincadeiras e amizade.

Ao CNPQ, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio nos estudos e na pesquisa.

A todos aqueles que contribuíram diretamente e indiretamente na realização desse trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Os testes de normalidade multivariada influenciam diretamente na qualidade e confiabilidade das pesquisas científicas. Os objetivos desse trabalho foram: proposição de dois novos testes de normalidade multivariada ilimitados quanto ao tamanho da amostra denominados de teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias e o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico. Esse último teste contempla também as circunstâncias em que o número de variáveis ultrapassa o tamanho amostral; avaliação do desempenho dos testes propostos, comparando-o com o do teste de normalidade de Royston. Foi usada simulação Monte Carlo para avaliar o desempenho dos novos testes de normalidade multivariada propostos e do teste de normalidade multivariada de Royston, mensurando-se as taxas de erro tipo I e o poder. Todos os procedimentos foram implementados no *software* R. Os dois testes de normalidade multivariada foram propostos com sucesso; não houve um teste uniformemente mais poderoso em todos os casos considerados; o teste de normalidade multivariada Monte Carlo baseado em distância teve grande sucesso no controle das taxas de erro tipo I e poder praticamente equivalente ao teste de normalidade multivariada de Royston para grandes amostras. O teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico obteve um excelente controle do erro tipo I e um ótimo desempenho de poder, sendo considerado ideal para testar a normalidade multivariada. Ademais esse teste apresenta as vantagens de ser ilimitado quanto ao tamanho da amostra e possibilita que o número de variáveis ultrapasse o tamanho da amostra. O tempo computacional para execução dos novos testes é praticamente o mesmo em comparação com os testes atuais de normalidade multivariada existentes no *software* R.

Palavras-chave: Tamanho da amostra. Monte Carlo. *Bootstrap* paramétrico. R.

Erro tipo I. Poder.

ABSTRACT

The multivariate normality tests directly influence the quality and reliability of scientific research. The aims of this work were: the proposal of two new tests of multivariate normality unlimited with respect to the sample sizes denoted Monte Carlo test of multivariate normality based on distances and multivariate normality test based on parametric bootstrap. This last test also includes the circumstances in which the number of variables exceed the sample size; evaluation of the new tests performance, comparing it with the performance of Royston's multivariate normality test. Monte Carlo simulation was used to evaluate the performance of the new tests and Royston's test for multivariate normality, evaluating the type I error rates and power. All procedures were implemented in the software R. Both multivariate normality tests have been successfully proposed; there was not a uniformly most powerful test in all cases, the multivariate normality test based on Monte Carlo distance controlled the type I error rates and had power roughly equivalent to the multivariate normality test of Royston for large samples. The multivariate normality test based on parametric bootstrap has excellent control of the type I error and high power and is considered ideal for testing multivariate normality. Also this test shows the advantages of having no limitations concerning to the sample size and allows the number of variables exceeds the sample size. The computational time to perform the new tests is almost the same of the current tests for multivariate normality in the software R.

Keywords: Sample size. Monte Carlo. Parametric bootstrap. Type I error rate. R. Power.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 Histograma da distribuição nula dos coeficientes de determinação gerados sob a hipótese nula de distribuição bivariada (a) e Q-Q plot obtido entre os quantis observados e esperados da distribuição beta para os dados dos pintores de carros. 109

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----------|---|----|
| Tabela 1 | Outros testes disponíveis no <i>software</i> R de normalidade multivariada. | 38 |
| Tabela 2 | Os testes de normalidade multivariados usados nas comparações, com os tamanhos amostrais n e número de variáveis p usados nas construções das matrizes de dados $X_{n \times p}$, situação $n > p$ | 59 |
| Tabela 3 | Tamanhos amostrais n e número de variáveis p usados nas construções das matrizes de dados $X_{n \times p}$, para avaliação do TNMBP na situação $n \leq p$ | 60 |
| Tabela 4 | Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$ | 69 |
| Tabela 5 | Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$ | 71 |
| Tabela 6 | Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$ | 72 |
| Tabela 7 | Erro tipo I do TNMBP considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ | 75 |
| Tabela 8 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 10\%$ | 78 |
| Tabela 9 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$ | 79 |
| Tabela 10 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 1\%$ | 81 |
| Tabela 11 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 10\%$ | 83 |
| Tabela 12 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$ | 86 |
| Tabela 13 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 1\%$ | 87 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| Tabela 14 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$ | 88 |
| Tabela 15 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$ | 91 |
| Tabela 16 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$ | 92 |
| Tabela 17 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$ | 93 |
| Tabela 18 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$ | 95 |
| Tabela 19 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$ | 96 |
| Tabela 20 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$ | 97 |
| Tabela 21 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$ | 98 |
| Tabela 22 | Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$ | 100 |
| Tabela 23 | Poder do TNMBP considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ | 102 |
| Tabela 24 | Poder do TNMBP considerando a distribuição <i>t-Student</i> multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ | 103 |
| Tabela 25 | Poder do TNMBP considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ | 104 |
| Tabela 26 | Poder do TNMBP considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ | 105 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| Tabela 27 | Poder do TNMBP considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ | 107 |
| Tabela 28 | Valores ordenados das distâncias de Mahalanobis $D_{(j)}^2$ de cada observação para a média amostral, estatísticas de ordem observadas relativos a transformação para uma beta $b_{(j)}$ e valores esperados da beta correspondentes a cada estatística de ordem b_j^* | 109 |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 14 |
| 2 | REFERENCIAL TEÓRICO | 17 |
| 2.1 | Formas quadráticas | 17 |
| 2.1.1 | Classificação das formas quadráticas | 17 |
| 2.2 | Erros tipo <i>I</i> e <i>II</i> | 18 |
| 2.3 | Simulação Monte Carlo | 20 |
| 2.4 | <i>Bootstrap</i> | 22 |
| 2.4.1 | <i>Bootstrap</i> não-paramétrico | 23 |
| 2.4.2 | <i>Bootstrap</i> paramétrico | 24 |
| 2.5 | <i>Software R</i> | 25 |
| 2.5.1 | Testes de normalidade multivariada do <i>software R</i> | 26 |
| 2.6 | Testes de normalidade multivariada | 39 |
| 3 | MÉTODOS | 46 |
| 3.1 | Testes de normalidade multivariada propostos | 46 |
| 3.1.1 | Teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias | 46 |
| 3.1.2 | Teste de normalidade multivariada baseado em <i>bootstrap</i> paramétrico | 51 |
| 3.2 | Teste Shapiro-Wilk de normalidade multivariado | 53 |
| 3.2.1 | Algoritmo para o teste Shapiro-Wilk de normalidade multivariado | 54 |
| 3.3 | Validação do desempenho | 58 |
| 3.3.1 | Primeira Etapa: Erro Tipo <i>I</i> | 58 |
| 3.3.2 | Segunda etapa: poder do teste | 61 |
| 3.4 | Exemplo | 63 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO | 65 |
| 4.1 | Erro tipo <i>I</i> | 65 |
| 4.1.1 | Erro tipo <i>I</i> dos testes de normalidade multivariados, $n > p$, para o TMCNM, o TNMBP e o TSWNM | 66 |
| 4.1.2 | Erro tipo <i>I</i> do novo teste de normalidade multivariado, TNMBP, avaliado nas situações em que $(n \leq p)$ | 73 |
| 4.2 | Poder dos testes | 76 |

| | | |
|--------------|--|------------|
| 4.2.1 | Poder dos testes TMCNM, TNMBP e TSWNM de normalidade multivariados para $(n > p)$ | 76 |
| 4.2.2 | Poder do novo teste de normalidade multivariado, TNMBP, avaliado nas situações em que $(n \leq p)$ | 101 |
| 4.3 | Exemplo | 108 |
| 5 | CONCLUSÕES | 111 |
| | REFERÊNCIAS | 112 |
| | APÊNDICE A | 117 |
| | APÊNDICE A | 117 |

1 INTRODUÇÃO

As análises de dados podem ser realizadas tanto sob a ótica da estatística univariada quanto da multivariada. Nos casos multivariados, a fundamentação da estatística inferencial é calcada na suposição de normalidade multivariada e/ou na extensão do teorema central do limite univariado em sua maioria. Dessa forma, a maior parte das análises de dados é feita por meio de métodos inferenciais da estatística multivariada os quais são baseados na suposição de normalidade multivariada. Destaca-se então a importância dos testes de normalidade multivariada que influenciam diretamente na qualidade e confiabilidade das pesquisas científicas, uma vez que a não checagem dessa pressuposição pode conduzir a resultados e conclusões incorretas.

Uma forma de verificação da normalidade multivariada é feita mediante o uso dos coeficientes de assimetria e curtose. A não rejeição da hipótese de distribuição simétrica e mesocúrtica não garante normalidade multivariada, pois uma condição necessária e suficiente para que duas distribuições sejam as mesmas é que todos seus momentos sejam idênticos e não apenas os quatro primeiros momentos. Além disso, esses testes caracterizam-se pelas propriedades assintóticas, isto é, requerem amostras muito grandes para conseguirem tanto o controle das taxas de erro tipo I quanto o alto desempenho de poder.

Existem outros testes de normalidade multivariada na literatura especializada, no entanto, apresentam limitações nas aplicações, isto é, são restritos quanto às dimensões das amostras multivariadas. Para esses testes, o número de variáveis não deve ser maior que o tamanho da amostra. Além disso, a amostra não deve ultrapassar 5.000 dados. Isso tem restringido a validade das inferências realizadas, uma vez que os testes de normalidade multivariadas não podem ser aplicados, é o caso do teste de Alva e Estrada (2009).

Alguns testes não possuem limitações quanto ao tamanho da amostra é o caso do teste McNeil, Frey e Embrechts (2005), o teste quiquadrado de Pearson multivariado e o teste de Szekely e Rizzo (2005). O teste de McNeil, Frey e Embrechts (2005) é fundamentado no teste de Kolmogorov-Smirnov, que possui baixo desempenho, refletindo diretamente no seu desempenho, tornando um teste inapropriado. Da mesma forma, o teste quiquadrado de Pearson multivariado possui baixo desempenho de poder. O teste de Szekely e Rizzo (2005) não pode ser aplicado para situação em que o número de variáveis é superior ao tamanho da amostra, assim como também, os testes de teste de McNeil, Frey e Embrechts (2005) e o quiquadrado de Pearson multivariado.

Para testar a normalidade multivariada para os casos em que o número de variáveis é maior que o tamanho amostral, existe o teste de Liang, Tang e Chan (2009). Esse teste, além de possuir baixo poder é limitado para amostras até 2.000, pois, para o cálculo da estatística do teste usa os procedimentos de Royston (1983).

Tendo em vista os problemas evidenciados nos testes de normalidade multivariada, conforme salientado anteriormente, foi realizado esse trabalho para tentar contorná-los, com os objetivos apresentados a seguir

1. propor dois novos testes de normalidade multivariada, ilimitados quanto ao tamanho da amostra n , sendo dados por:
 - (a) teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias (TMCNMD);
 - (b) teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico (TNMBP).

sendo que o segundo teste, TNMBP, além de ser ilimitado quanto ao tamanho da amostra, também pode ser usando para testar a normalidade multi-

variada para casos em que o número de variáveis é maior do que o tamanho da amostra.

2. avaliar o desempenho dos testes de normalidade multivariada, TMCNMD e TNMBP, e compará-los com o teste de normalidade multivariada de Royston (1983, 1993), que é a extensão do teste de Shapiro-Wilk de normalidade univariado para o caso multivariado, o qual denominou-se de TSWNM. Essa validação consistiu na mensuração do desempenho quanto às taxas de erro tipo I e valores de poder dos testes usando simulação Monte Carlo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Formas quadráticas

Como as distâncias são sempre positivas ou nulas, ressalta a importância de conhecer algumas propriedades das formas quadráticas para que não se viole as pressuposições de distâncias com a escolha da métrica adequada Ψ . Pode-se definir uma forma quadrática a partir de uma matriz simétrica $A(n \times n)$ por (FERREIRA, 2008):

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (1)$$

em que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ é um vetor definido em \mathbb{R}^n .

A expressão (1) é chamada de forma quadrática por apresentar apenas termos quadráticos ou duplos produtos dos elementos do vetor \mathbf{x} . Como os elementos de A são conhecidos, $Q(\mathbf{x})$ representa uma função do vetor \mathbf{x} .

Assim toda distância quadrática é uma forma quadrática, que pode ser vista como

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \Psi (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2)$$

em que \mathbf{x} e \mathbf{y} são vetores pertencentes \mathbb{R}^p e Ψ é uma matriz positiva definida, denominada de métrica.

2.1.1 Classificação das formas quadráticas

Se $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ é uma forma quadrática, então:

i) $Q(\mathbf{x})$ é positiva definida, se e somente se, $Q(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$: vetor nulo);

- ii) $Q(\mathbf{x})$ é positiva semi-definida, se e somente se, $Q(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x}$, e existe pelo menos um $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, tal que $Q(\mathbf{x}_0) = 0$;
- iii) $Q(\mathbf{x})$ é negativa definida, se e somente se, $Q(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- iv) $Q(\mathbf{x})$ é negativa semi-definida, se e somente se, $Q(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x}$, e existe pelo menos um $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, tal que $Q(\mathbf{x}_0) = 0$;
- v) $Q(\mathbf{x})$ é não definida se não se enquadra em nenhum dos casos anteriores.

A matriz A correspondente a cada caso anterior de $Q(\mathbf{x})$, recebe a mesma classificação da forma quadrática segundo Giri (1995).

No caso em que a métrica na expressão (2) é definida por $\Psi = S^{-1}$, em que S é a matriz de variância e covariância amostral, então, a distância quadrática é chamada de *Distância de Mahalanobis*, e é dada por:

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top S^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3)$$

Ao empregar essa definição de distância, iguala-se às condições das escalas e considera-se o efeito das correlações, pois cada variável é padronizada pelas respectivas variabilidades e a correlação entre diferentes variáveis é contemplada (FERREIRA, 2008).

2.2 Erros tipo I e II

Ao realizar um teste de hipótese, o interesse maior do pesquisador está na tomada de decisão quanto a não rejeição ou rejeição da hipótese referente ao parâmetro populacional (STEEL, TORRIE e DICKEY, 1997). Desse modo, ao testar uma hipótese de nulidade, ele deve levar em consideração o risco global

de tomar decisões erradas, e está sujeito a incorrer nos possíveis erros (MOOD, GRAYBILL e BOES, 1974; STEEL, TORRIE e DICKEY, 1997; BARON, 2006; HOGG e TANIS, 2010):

1. Erro tipo *I*: erro cometido ao se rejeitar a hipótese nula verdadeira, quando deveria ser aceita. Esse erro é controlado diretamente pelo pesquisador e a probabilidade de se cometê-lo é dada pelo nível de significância α , ou seja, $P[\text{Erro Tipo } I] = P[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}] = \alpha$;
2. Erro tipo *II*: erro cometido ao não se rejeitar a hipótese nula falsa. Esse erro não é controlado diretamente pelo pesquisador e a probabilidade de se cometer esse erro, denotada por β , é dada por $P[\text{Erro Tipo } II] = P[\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}] = \beta$.

Deve-se aplicar os testes, limitando a probabilidade de erro tipo *I* em um valor pré-atribuído, α , em geral entre 1% e 10%. Sob estas condições, espera-se minimizar a probabilidade de erro tipo *II* (BARON, 2006). O poder do teste é a probabilidade de se rejeitar a hipótese nula H_0 , quando ela é realmente falsa e é dada por $1 - \beta$ (MOOD, GRAYBILL e BOES, 1974).

As probabilidades de se cometerem os erros do tipo *I* e *II* são inversamente proporcionais, ou seja, a baixa probabilidade de se incorrer no erro tipo *I* está associada à alta probabilidade de se cometer o erro tipo *II* (FERREIRA, 2005). Portanto, é necessário tomar algumas precauções para não se aplicar um teste a um nível muito baixo de probabilidade, para não aumentar exageradamente a probabilidade de ocorrência do outro.

Segundo Ferreira (2005), existem algumas medidas que podem ser tomadas para minimizar o erro tipo *II*. Uma que pode ser destacada consiste na escolha apropriada do teste e a avaliação cautelosa das pressuposições a serem atendidas. Se essas condições são satisfeitas, é provável que o poder do teste seja maior.

Outra medida que pode permitir que um teste tenha o maior poder possível é a determinação do tamanho da amostra, desde que o custo da pesquisa a ser realizada não aumente excessivamente. Finalmente, a fixação do nível de significância α entre 0,10 e 0,01 é outra alternativa recomendável, por causa da relação inversa entre as taxas de erro tipo *I* e do erro tipo *II*.

Assim, o desempenho de um teste pode ser avaliado mensurando, por exemplo, as taxas de erro tipo *I*, em diferentes condições da hipótese nula de normalidade, e o poder do teste, simulando amostras sob a hipótese alternativa de não-normalidade. Apesar de não existir, um teste ideal seria aquele que não rejeitasse para nenhuma amostra observada a hipótese nula verdadeira e rejeitasse 100% das vezes as hipóteses nulas falsas. Como em situações reais isso não acontece, busca-se um teste que mantenha as taxas de erro tipo *I* menores ou iguais ao valor nominal de significância escolhido, α , e que tenha o maior poder possível (CANTELMO e FERREIRA, 2007b).

2.3 Simulação Monte Carlo

Desde os séculos passados o uso de simulações tornou-se imperativo, pois é uma maneira de experimentar planos e projetos antes que sejam postos em operação. Não obstante, seu estudo ainda é extremamente ativo nos dias atuais, principalmente com o uso de recursos computacionais e muita pesquisa desenvolvida por estudiosos.

Por diversas épocas, o homem tem usado processamentos de realizações de variáveis ao acaso, mas a teoria de probabilidade só se formalizou no século XVII, devido ao desenvolvimento matemático que surgiu de pesquisas em jogos de azar. O nome Monte Carlo está relacionado com a cidade de mesmo nome, localizada no Principado de Mônaco, onde se jogavam jogos de azar (BUSSAB e

MORETTIN, 2010).

Outro grande impulso para o desenvolvimento de simulações ocorreu no século XX, na década de 40, durante trabalhos bélicos sobre a bomba atômica. Os cientistas não conseguiam, por meio de análise, resolver alguns problemas matemáticos não-probabilísticos complexos. Segundo Bussab e Morettin (2010) as pesquisas relacionadas à difusão aleatória de neutrons na construção de material radioativo foram desenvolvidas nessa mesma época.

Os métodos de Monte Carlo têm suas raízes na década de 1940, quando Ferni, Ulam, von Neumann e Metropolis começaram a considerar o uso de números aleatórios para analisar diferentes problemas em Física a partir de uma perspectiva estocástica (LANDAU e BINDER, 2009; BUSSAB e MORETTIN, 2010).

Landau e Binder (2009) certificam que, com o avanço da capacidade de processamento dos computadores atuais e a queda constante dos preços desses equipamentos, as simulações de computador serão capazes de aumentar rapidamente em sofisticação para permitir comparações mais perspicazes.

Landau e Binder (2009) afirmam que métodos simples de simulação Monte Carlo foram criados a fim de fornecer meios para estimar respostas para os problemas analiticamente intratáveis. Muitas dessas técnicas mantêm a sua importância devido ao fato de os computadores estarem mais acessíveis e com grande capacidade de processamento. Consequentemente, os métodos Monte Carlo podem ser aplicados a inúmeros problemas interessantes.

Na área de Estatística, mais especificamente nos testes de normalidade, tanto para os casos univariados como para os casos multivariados, o método Monte Carlo tem sido aplicado para a validação desses testes quanto ao desempenho de poder e controle das taxas de erro tipo I . Para isso, simulações de realizações de variáveis normais e não-normais são feitas. Alguns estudos utilizando esse mé-

todo foram realizados por Cirillo e Ferreira (2003), Cantelmo e Ferreira (2007a), Cantelmo e Ferreira (2007b), Farrell, Barrera e Naczk (2007), Oliveira e Ferreira (2009) e Silva (2009).

No entanto, vale ressaltar que o uso de simulação só é justificável se o procedimento for adequado por substituir um sistema real por meio de uma amostra representativa de uma população. Conseqüentemente, isso ostenta inúmeros benefícios, como economia de custo e tempo.

2.4 *Bootstrap*

O *bootstrap* foi introduzido por Efron no final da década de 1970 e consiste em um método computacional para se obter estimativas de parâmetros e realizar testes de hipóteses, não se fazendo muitas suposições sobre a natureza da distribuição dos dados (EFRON e TIBSHIRANI, 1993).

Em Estatística, as características retiradas de uma população são obtidas a partir de observações de amostras. Uma vez que a amostra representa a população, e suas características análogas deverão fornecer informações sobre as características da população. Segundo Casella e Berger (2010) o *bootstrap* ajuda a aprender sobre as características da amostra pela obtenção de reamostras, isto é, é feita a reamostragem a partir da amostra original e utiliza-se essas informações para inferir a respeito de parâmetros da população.

O *bootstrap* é um método de reamostragem baseado na construção de subamostras a partir de uma amostra inicial, conforme salientado por Hair et al. (1998). O método é bastante útil quando se deseja avaliar, para um certo estimador, o seu erro padrão, o seu viés, ou ainda quando se quer estimar a distribuição de probabilidade do estimador. O método *bootstrap* pode ser construído de modo paramétrico ou não-paramétrico.

2.4.1 *Bootstrap* não-paramétrico

No *bootstrap* não-paramétrico, o processo de reamostragem se dá a partir da função de distribuição empírica dos dados, ou dos resíduos, no caso em que há uma estrutura de regressão (GIVENS e HOETING, 2005). Segundo esses autores, cada elemento da amostra tem a mesma probabilidade $1/n$ de ser selecionado, pois considera-se que a amostra original é independente e identicamente distribuída com uma função de distribuição desconhecida, sendo n o tamanho da amostra.

Para uma amostra $X = (X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n)$ e um estimador $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \hat{\theta}$, seleciona-se B reamostras, ou amostras *bootstrap*. Em cada uma delas estima-se o parâmetro de interesse pela mesma função usada na amostra original, assim, na i -ésima amostra *bootstrap* tem-se o i -ésimo estimador *bootstrap* dado por $\hat{\theta}_i^*(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = \hat{\theta}_i^*$, em que X_j^* é o j -ésimo elemento da amostra *bootstrap* obtido por um processo de amostragem por reposição da amostra original. As B reamostragens irão fornecer B estimativas, cuja média é denotada por $\bar{\hat{\theta}}^*$. A variância do estimador $\hat{\theta}$ é obtida por

$$Var_B^*(\hat{\theta}) = \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_i^* - \bar{\hat{\theta}}^*)^2. \quad (4)$$

Essa distribuição, contendo B estimativas, é denominada distribuição *bootstrap* do estimador $\hat{\theta}$. Ela pode ser usada, além da obtenção da variância do estimador ou do seu erro padrão, também para a construção de intervalos de confiança e para testes de hipóteses. No caso particular de construção de intervalos de confiança, pelo menos cinco diferentes métodos de estimação por intervalo existem (EFRON e TIBSHIRANI, 1993). O mais importante é conhecido por intervalo de confiança com correção acelerada de viés. Nos testes de hipóteses, a hipótese nula é imposta de alguma forma, antes de se obter a distribuição *bootstrap*, que

deverá ser usada para a tomada de decisão a respeito da rejeição ou não de H_0 .

O *bootstrap* considerado até agora foi o não-paramétrico, uma vez que não se assume forma funcional alguma para a função densidade de probabilidade ou função distribuição acumulada da população (CASELLA e BERGER, 2010). Por outro lado, existe ainda o método conhecido por *bootstrap* paramétrico, que será detalhado na próxima subseção.

2.4.2 *Bootstrap* paramétrico

No *bootstrap* paramétrico são feitas suposições a respeito da forma funcional da distribuição da variável aleatória que se está amostrando. Nesse caso, reamostra-se observações da distribuição postulada, usando os valores das estimativas dos parâmetros, obtidas na amostra original, como parâmetros dessa distribuição no processo de geração de pseudo-amostras (DAVISON e HINKLEY, 2008).

Considere que $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$ seja uma amostra obtida de uma distribuição com função densidade probabilidade $f(x|\theta)$, em que θ pode ser um vetor de parâmetros. Sendo $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ , obter amostras aleatórias de tamanho n de $f(x|\hat{\theta})$ sendo que

$$X_1^*, X_2^*, \dots, X_j^*, \dots, X_n^* \sim f(x|\hat{\theta}).$$

Se forem consideradas B dessas amostras, pode-se estimar a variância de $\hat{\theta}$ utilizando (4). Essa distribuição pode ser utilizada para obtenção de intervalos de confiança e, com algumas pequenas modificações, também pode ser utilizada para se realizar testes de hipóteses. Essas amostras não são reamostras dos dados, mas amostras aleatórias reais, obtidas a partir de $f(x|\hat{\theta})$, que, algumas vezes, é

chamada de distribuição plugada (CASELLA e BERGER, 2010).

2.5 *Software R*

O *software R* (R Development Core Team, 2011) foi criado em 1996, por professores estatísticos da Universidade de Auckland, na Nova Zelândia. A ideia era implementar um novo programa para analisar dados e produzir modelos gráficos com objetivo de atender às necessidades dos próprios alunos de estatística da universidade, com o uso de uma linguagem mais simples, comparado com os *softwares* criados por cientistas da computação, nos quais a linguagem é mais complexa (VENABLES e RIPLEY, 2002). Esses autores destacam algumas vantagens do programa R:

1. é eficaz na manipulação e no armazenamento dos dados;
2. tem um conjunto de operadores para cálculos de matrizes;
3. é uma ferramenta rápida integrada para análise de dados, com facilidades gráficas moderadamente flexíveis;
4. apresenta uma linguagem de programação bem desenvolvida, simples e eficaz que inclui condicionais, loops, funções recursivas definidas pelo usuário e facilidades de entrada e saída.

O *software R* para análises estatísticas destaca-se como um instrumento de grande utilidade nessa área e que tem pacotes (*library*), escritos por pesquisadores das mais diferentes áreas do conhecimento e profissionais da área de estatística, os quais servem como sistema de auxílio. No entanto, a implementação do programa é mais eficiente quando as funções não dependem de *loops*, pois o tempo computacional para as realizações de variáveis aleatórias é menor.

2.5.1 Testes de normalidade multivariada do *software R*

Para fins de desenvolvimento deste trabalho, na sequência será realizada uma descrição de alguns testes de normalidade multivariada existentes na literatura, para os quais implementações no R foram realizadas pelos respectivos autores que os propuseram.

i) Teste normalidade multivariado de Szekely e Rizzo (2005) do pacote energy

O teste de Szekely e Rizzo (2005) é uma nova classe de testes consistentes para a comparação de distribuições multivariadas baseada na distância euclidiana entre os elementos da amostra. O teste se aplica a qualquer distribuição multivariada com segundo momento finito. Os dados são padronizados para ter média nula, $\mu = \mathbf{0}$, e matriz de covariâncias uma identidade, $\Sigma = \mathbf{I}$, usando a média e matriz de covariâncias da amostra para realizar tal padronização. Caso a dimensão da matriz \mathbf{X} seja $(n \times 1)$, uma versão do teste de normalidade univariada é aplicada. A aplicação deste teste não é possível quando existem dados faltantes (não balanceados) ou quando a matriz de covariâncias da amostra é singular, o que limita a sua utilização.

Para entender melhor a construção deste teste, suponha que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$, é uma amostra aleatória de uma população p -variada com distribuição G e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n$ são valores observados da amostra aleatória. A proposta da estatística para testar $H_0 : G = G_0$ versus $H_1 : G \neq G_0$ é

$$\varepsilon_{n,p} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n E \|\mathbf{x}_j - \mathbf{X}\| - E \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| \right), \quad (5)$$

em que X e X' são independentes e identicamente distribuídos (iid) com distribuição G_0 e $\|\bullet\|$ denota a norma euclidiana.

Se a distribuição da hipótese é a normal multivariada com vetor de média μ e matriz de covariâncias não singular Σ , denotado por $N_p(\mu, \Sigma)$, considere a transformação da amostra dada por

$$z_j = \Sigma^{-1/2}(x_j - \mu), \quad (6)$$

$j = 1, \dots, n$. A estatística do teste de normalidade para o caso multivariado (Szekely e Rizzo, 2005) é

$$\varepsilon_{n,p} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n E\|z_j - Z\| - E\|Z - Z'\| - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \|z_j - z_k\| \right), \quad (7)$$

em que Z e Z' são variáveis aleatórias, iid, com distribuição normal padrão multivariada, $N_p(0, I)$ e I é a matriz identidade de dimensão $(p \times p)$. A primeira componente da estatística do teste envolve o cálculo $E\|a - Z\|$, em que $a \in \mathbb{R}^p$ é fixo. No caso univariado $E\|a - Z\| = 2a\Phi(a) + 2\phi(a) - a$, em que $\Phi(x)$ e $\phi(x)$ são a distribuição acumulada e a função densidade da normal, $N(0, 1)$. Para $p \geq 1$, tem-se

$$E\|a - Z\| - E\|Z\| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!2^k} \frac{\|a\|^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{p}{2} + 1\right)} \quad (8)$$

e desde que

$$E\|Z - Z'\| = \sqrt{2}E\|Z\| = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (9)$$

o cálculo da estatística para o teste de normalidade multivariada, Szekely e Rizzo (2005), é dada por

$$\varepsilon_{n,p} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n E \|z_j - Z\| - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \|z_j - z_k\| \right), \quad (10)$$

em que

$$E \|a - Z\| = \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \frac{\|a\|^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{p}{2} + 1\right)}. \quad (11)$$

O teste rejeita a hipótese de normalidade multivariada para grandes valores de $\varepsilon_{n,p}$. Esse teste está disponível no pacote *energy* pela função *mnorm.etest(X, R_b)*, em que X é a matriz da amostra multivariada de dimensão $(n \times p)$, sendo $p < n$ e R_b representa o número de replicações por meio de *bootstrap* paramétrico. Nas situações reais, μ e Σ são desconhecidos, então \bar{X} e $\hat{\Sigma}$ são utilizados para estimá-los. A distribuição de $\varepsilon_{n,p}$ também não é conhecida. Por essa razão, utiliza-se *bootstrap* paramétrico na obtenção do valor- p e substitui-se $\varepsilon_{n,p}$ por $\hat{\varepsilon}_{n,p}$, em que os parâmetros são substituídos pelos estimadores em (10).

O teste de Szekely e Rizzo (2005) merece destaque, uma vez que a avaliação feita por esses autores com diversas distribuições normais contaminadas (misturas de normais) considerando $\alpha = 5\%$, apresentou-se melhor em muitas situações, em comparação aos testes de normalidade multivariada de simetria, de curtose e o teste de Henze e Zirkler (1990). Vale ressaltar que nos estudos realizados por Farrell, Barrera e Naczki (2007), o teste de Henze e Zirkler (1990) foi

destacado como sendo o melhor da categoria dos testes consistentes. Por sua vez, o teste de Szekely e Rizzo (2005) supera este teste em várias situações, como por exemplo, no caso bivariado em que $n = 25, 50$ e 100 para quinze distribuições normais contaminadas diferenciadas.

De forma geral o teste de Szekely e Rizzo (2005) é aconselhável para amostras superiores ou iguais a 50. Destacam-se os casos em que esse teste foi superior em poder para $n = 25, 50$ e 100 com $p = 5$, considerando as distribuições $0,9N_5(\mathbf{0}, I) + 0,1N_5(\mathbf{2}, I)$, $0,7887N_5(\mathbf{0}, I) + 0,2113N_5(\mathbf{2}, I)$ e $0,5N_5(\mathbf{0}, \Sigma) + 0,5N_5(\mathbf{2}, I)$, em que $\mathbf{0}$ e $\mathbf{2}$ são os vetores de médias compostos, respectivamente, por 0 's e 1 's.

ii) Generalização do teste de Shapiro-Wilk para o caso multivariado do pacote mvShapiroTest

Mais recentemente, foi proposta uma generalização do teste de Shapiro-Wilk para o caso multivariado por Alva e Estrada (2009), disposto no pacote *mvShapiroTest* pela função *mvShapiro.Test* (\mathbf{X}), em que \mathbf{X} é a matriz de dados multivariados de dimensão $(n \times p)$. Esta função calcula a estatística do teste e o valor- p do teste de Shapiro-Wilk para normalidade multivariada. Porém, uma grande desvantagem deste teste é que ele possui limitações quanto ao tamanho da amostra ($12 < n < 5000$).

A construção do teste multivariado parte da estatística univariada de Shapiro-Wilk. Admite-se que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$, são vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos em \mathbb{R}^p , $p \geq 1$. Seja $N_p(\mu, \Sigma)$ a densidade normal p -variada com vetor de média μ e matriz de covariância Σ . Seja $\mathbf{0}$, o vetor nulo de dimensão $(p \times 1)$ e I a matriz identidade de ordem $(p \times p)$. A proposição

2.3.1 caracteriza a distribuição do teste de normalidade multivariado, citada em Alva e Estrada (2009).

Proposição 2.3.1. $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, se e somente se $Z = \Sigma^{-1/2}(X - \mu) \sim N_p(0, I)$.

Conhecidos \bar{X} e $\hat{\Sigma}$ a média e a matriz de covariâncias amostral, dados respectivamente por

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma} = \frac{(X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})^T}{n}. \quad (12)$$

Seja $\hat{\Sigma}^{-1/2}$ a matriz raiz quadrada positiva definida e $\hat{\Sigma}^{-1}$ a inversa da matriz de covariâncias de $\hat{\Sigma}$, obtida a partir da amostra. Quando $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$ tiverem distribuição $N_p(\mu, \Sigma)$, os vetores aleatórios

$$Z_j^* = \hat{\Sigma}^{-1/2}(X_j - \bar{X}) \quad (13)$$

têm distribuição aproximada $N_p(0, I)$, $j = 1, 2, \dots, n$, o que significa que as coordenadas de Z_j^* , denotadas por Z_{j1}, \dots, Z_{jp} , são aproximadamente independentes com uma distribuição normal padrão univariada.

Para testar a hipótese nula $H_0: X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$ é uma amostra da $N_p(\mu, \Sigma)$, em que μ e Σ são desconhecidos, a estatística do teste para o caso multivariado de Shapiro-Wilk, proposto por Alva e Estrada (2009) é

$$W^* = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p W_{Z_i}, \quad (14)$$

em que W_{Z_i} é a estatística do teste de Shapiro-Wilk avaliada na i -ésima coordenada das observações transformadas Z_{1i}, \dots, Z_{ni} , $i = 1, 2, \dots, p$. Sob H_0 , espera-se que W^* seja próximo de 1, uma vez que para cada W_{Z_i} espera-se também um valor próximo de 1.

O teste baseado na estatística W^* rejeita a hipótese H_0 , para um nível de significância α , se $W^* < c_{\alpha;n,p}$, em que $c_{\alpha;n,p}$ satisfaz a equação

$$\alpha = P\{W^* < c_{\alpha;n,p} \mid H_0 \text{ verdadeira}\}. \quad (15)$$

Para obter os percentis $c_{\alpha;n,p}$, Alva e Estrada (2009) usaram simulação Monte Carlo.

Alva e Estrada (2009) avaliaram o poder do teste proposto por eles com cinco testes de normalidade multivariada da literatura, sendo eles o teste de simetria e o teste de curtose de Mardia (1970), o teste de Henze e Zirkler (1990), o teste de Mudholkar, Srivastava e Lin (1995) e o teste de Srivastava e Hui (1987). Para a avaliação de poder desses testes foram usadas uma ampla quantidade de distribuições não normais (mais de 30 distribuições) e como resultados Alva e Estrada (2009) concluíram que o teste que propuseram é mais poderoso que os testes de Mardia (1970), Henze e Zirkler (1990) e Srivastava e Hui (1987).

Embora Alva e Estrada (2009) estudaram o poder dos testes com uma grande quantidade de distribuições não normais, eles não avaliaram com uma grande quantidade de dados com tamanhos de amostras diferenciados, restringido o estudo para quatro situações, $n = 20$ e $n = 50$ combinados com $p = 2$ e $p = 5$. De forma geral, o poder do teste de Alva e Estrada (2009) foi melhor para amostras de tamanho $n = 50$.

iii) Teste de normalidade multivariada de Shapiro-Francia do pacote mvstf

É uma adaptação do teste de normalidade Shapiro-Wilk multivariado implementado por Slawomir Jarek, em 2009, a partir da função *mshapiro.test* para o teste de normalidade Shapiro-Francia. O tamanho da amostra continua restrito à condição ($5 < n < 5000$). Esse teste está disponível no pacote *mvsf* pela função *mvsf*, em que X é a matriz de dimensão $n \times p$, sendo n o tamanho da amostra entre 5 e 5.000 e p , o número de variáveis menor que n . Não existem detalhes do teste na literatura.

iv) Teste de normalidade multivariada de Doornik-Hansen do pacote asbio

O teste Doornik-Hansen de normalidade multivariada (Doornik e Hansen (2008)) é baseado na assimetria e curtose dos dados multivariados. Para efetuar a normalidade multivariada pelo *software* R, é necessário carregar o pacote *asbio* e usar a função *DH.test(X)*, em que X representa a matriz de dados multivariados de dimensão ($n \times p$).

Como saída, este teste retorna uma lista com dois resultados: um relacionado ao da normalidade multivariada (*multi*), e o outro relacionado aos casos univariados (*univ*) de cada variável p da matrix X . Em cada um desses resultados é possível obter as estatísticas do teste, os graus de liberdades e os valores- p relacionados em cada caso.

Para construção do teste, Doornik e Hansen (2008) consideraram que $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$, são vetores aleatórios em \mathbb{R}^p , que forma uma matriz X com dimensões ($n \times p$), com média e matriz de covariâncias amostrais dados em (12).

Doornik e Hansen (2008) definiram V , a matriz que tem as variâncias na diagonal: $V = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_p^2)$, e a matriz de correlação $C = V^{-1/2} \hat{\Sigma} V^{-1/2}$.

Doornik e Hansen (2008), definiram também os vetores $Y_1, Y_2, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^p$ com as transformações nas observações dada por

$$Y_j = H\Lambda^{-1/2}H^\top V^{-1/2}(X_j - \bar{X}), \quad (16)$$

em que $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ é a matriz diagonal com os autovalores de C na diagonal. As colunas de H são correspondentes aos autovetores associados aos respectivos autovalores de C , desde que $H^\top H = I$ e $\Lambda = H^\top C H$, em que I é a matriz identidade. Considerando $Y_{n \times p}$ a matriz formada pelos vetores Y_j 's, então $n^{-1}Y^\top Y = I$. Usando valores populacionais para C e V , a normal multivariada pode, nesse caso, ser transformada em variáveis normais padrões independentes. Usando valores amostrais, isso é somente uma aproximação.

Pode-se assim, calcular a estatística do teste de assimetria e curtose univariada para cada p variável transformada, de tamanho amostral n . Definindo

$$B_1^\top = (\sqrt{b_{11}}, \dots, \sqrt{b_{1i}}, \dots, \sqrt{b_{1p}}) \text{ e } B_2^\top = (b_{21}, \dots, b_{2i}, \dots, b_{2p}). \quad (17)$$

em que

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}} \text{ e } b_2 = \frac{m_4}{m_2^2}, \quad (18)$$

sendo m_r o momento central amostral de ordem r . Seja $\mathbf{1}$ um vetor de dimensão $(p \times 1)$ de 1's. A estatística do teste de Doornik e Hansen (2008) é calculada por

$$E_p^a = \frac{nB_1^\top B_1}{6} + \frac{n(B_2 - \mathbf{1})^\top (B_2 - \mathbf{1})}{24} \sim \chi_{(2p)}^2, \quad (19)$$

sendo apenas assintoticamente uma quiquadrado com $2p$ graus de liberdade.

No lugar de utilizar diretamente os coeficientes de assimetria e curtose,

os autores propuseram realizar as transformações de $\sqrt{b_{1i}}$ e b_{2i} em variáveis normais padrão, propostos por D' Agostino (1970), associado ainda, no segundo caso, por uma transformação de Wilson-Hilferty. A estatística do teste multivariada de Doornik e Hansen (2008), é obtida dessa forma,

$$E_p = Z_1^\top Z_1 + Z_2^\top Z_2 \sim \chi_{(2p)}^2, \quad (20)$$

em que $Z_1^\top = (z_{11}, \dots, z_{1p})$ e $Z_2^\top = (z_{21}, \dots, z_{2p})$ são determinados pelas equações (21) e (22).

As transformações para assimetria $\sqrt{b_1}$ em z_1 foram propostas por D' Agostino (1970) citado por Doornik e Hansen (2008):

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n + 1)(n + 3)}{(n - 2)(n + 5)(n + 7)(n + 9)}, \\ \omega^2 &= -1 + [2(\beta - 1)]^{\frac{1}{2}}, \\ \delta &= \frac{1}{[\log(\sqrt{\omega^2})]^{\frac{1}{2}}}, \\ y &= \sqrt{b_1} \left[\frac{\omega - 1}{2} \frac{(n + 1)(n + 3)}{6(n - 2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ z_1 &= \delta \log \left[y + (y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

A curtose b_2 transforma uma distribuição gama em quiquadrado, que é então transladada em normal padrão z_2 usando a transformação raiz cúbica de Wilson-Hilferty (DOORNIK e HANSEN, 2008):

$$\delta = (n - 3)(n + 1)(n^2 + 15n - 4),$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(n-2)(n+5)(n+7)(n^2+27n-70)}{6\delta}, \\
 c &= \frac{(n-7)(n+5)(n+7)(n^2+2n-5)}{6\delta}, \\
 \kappa &= \frac{(n+5)(n+7)(n^3+37n^2+11n-313)}{12\delta}, \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = a + b_1 c,$$

$$\chi = (b_2 - 1 - b_1) 2\kappa,$$

$$z_2 = \left[\left(\frac{\chi}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{9\alpha} \right] (9\alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

A avaliação feita por Doornik e Hansen (2008), para o caso bivariado e tamanho amostral 50, o poder desse teste apresentou-se semelhante ao teste conjunto de simetria e curtose de Mardia (1970). Pelo fato da desprovida avaliação feita por Doornik e Hansen (2008) para avaliar o poder, não se sabe de fato se este teste é apropriado para testar a normalidade multivariada.

v) Teste de normalidade multivariada de Anderson-Darling do pacote rob-Compositions

É uma extensão do teste de normalidade univariado de Anderson e Darling (1952) para o caso multivariado. A estatística do teste é definida por Paulson, Roohan e Sullo (1987), dada por

$$\begin{aligned}
 A_{n,p}^2 &= n \int_0^{\infty} \frac{F_n(D^2) - F_p(D^2)}{F_p(D^2)(1 - F_p(D^2))} dF_p(D^2) \\
 &= - \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{j=1}^n (2j-1) \{ \log F_p(D_{(j)}^2) + \log [1 - F_p(D_{(n+1-j)}^2)] \} - n, \tag{23}
 \end{aligned}$$

em que $F_n(D^2)$ é a função da distribuição empírica com correção de continuidade

k/n , $F_p(\bullet)$ representa a função de distribuição acumulada empírica da distribuição $\chi^2_{(p)}$ e D_j^2 é a distância de Mahalanobis, dada pela expressão:

$$D_j^2 = (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})^\top \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}),$$

para $j = 1, 2, \dots, n$, em que \mathbf{X}_j é o vetor relativo à j -ésima observação p -variada, $\bar{\mathbf{X}}$ é o vetor de médias das n observações e \mathbf{S} é a matriz de variância e covariância amostral. Essa estatística para testar normalidade multivariada é baseada na soma das distâncias de uma observação multivariada dos focos relacionados da elipse teórica, elipsoide ou hiperelipsoide definidos pela forma quadrática da distribuição normal multivariada considerada (PAULSON, ROOHAN e SULLO, 1987). Esse teste está disponível no pacote *robCompositions* pela função *adtest*(\mathbf{X} , R_{mc}), em que \mathbf{X} é a matriz multivariada de dimensão $(n \times p)$, sendo $p < n$ e R_{mc} representa o número de simulações Monte Carlo para obter o valor- p .

Concernente a uma avaliação do desempenho de poder para amostras de tamanho 20 e 50 com dimensões 2 e 5, Paulson, Roohan e Sullo (1987) mostraram que essencialmente não existem diferenças entre o teste de Anderson-Darling e o teste Cramer-von Misses baseado na estimativa da distribuição χ^2 dos quadrados dos resíduos (a descrição desse último teste pode ser encontrada em Thode (2002)), quando usado as distribuições não-normais: lognormal, quiquadrado, *t-Student* e distribuições de Dirichlet.

vi) *Teste de normalidade multivariada McNeil, Frey e Embrechts (2005) do pacote QRMLib*

Para testar a normalidade multivariada, segundo McNeil, Frey e Embrechts (2005), não é suficiente testar as distribuições marginais univariadas, pois

marginais não-normais são indicativos de não-normalidade p -variada, mas marginais univariadas normais não garantem normalidade conjunta. Como alternativa para testar a normalidade multivariada eles propõem usar a forma quadrática

$$D_j^2 = (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})^\top \hat{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}), \quad (24)$$

que tem distribuição aproximadamente quiquadrado, em que $\bar{\mathbf{X}}$ e $\hat{\Sigma}$ são obtidos por (12). Como as estimativas do vetor médio e da matriz de covariância são utilizados na construção de cada D_j^2 , estes dados não são independentes, mesmo se os dados originais \mathbf{X}_j são. Além disso, a distribuição marginal de D_j^2 sob a hipótese nula não é precisamente a quiquadrado para valores pequenos de n . Assim, é realizada a transformação de Gnanadesikan e Kettenring (1972)

$$b_{(j)} = \frac{nD_{(j)}^2}{(n-1)^2}, \quad (25)$$

que se distribui de forma exata, sob normalidade multivariada, como uma variável beta com parâmetros

$$\alpha = \frac{p}{2} \quad e \quad \beta = \frac{n-p-1}{2}. \quad (26)$$

Espera-se, então, que $D_{(1)}^2, \dots, D_{(n)}^2$ se comporte de forma aproximada como uma amostra iid χ_p^2 . Como forma de visualização, constrói-se os QQplots confrontando os quantis de $D_{(j)}^2$ vs χ_p^2 , em que $D_{(j)}^2$ são as estatísticas de ordem da distância de Mahalanobis (24). Ou, então, ao invés de usar os QQplots da distribuição quiquadrado, pode realizar os QQplots da distribuição beta confrontando $b_{(j)}$ vs b_j^* , em que $b_{(j)}$ são as estatísticas de ordem da transformação dada em (25) e b_j^* são os quantis teóricos da distribuição beta com os parâmetros α e β dados

em (26). Para consolidar o teste formalmente no cálculo do valor- p , McNeil, Frey e Embrechts (2005) baseou-se na estrutura do teste de normalidade univariado de Kolmogorov-Smirnov, que pode ser encontrado em Hogg e Tanis (2010) e Press et al. (1992). O teste de McNeil, Frey e Embrechts (2005) está disponível no pacote *QRMLib* pela função *jointnormalTest(X)*, em que X é a matriz multivariada de dimensão $(n \times p)$.

Não foi encontrada uma avaliação que descrevesse o desempenho desse teste na literatura. Porém, existe um indicativo que esse teste não seja apropriado, pois, uma avaliação feita por Thode (2002) levou a conclusão de que o teste univariado de Kolmogorov-Smirnov deveria ser evitado por possuir pequeno poder e, portanto, isso reflete diretamente no teste de McNeil, Frey e Embrechts (2005), uma vez que os autores fundamentaram a estatística do teste de normalidade na estatística de Kolmogorov-Smirnov.

Muitos outros testes de normalidade multivariada do *software* R, bem como o pacote e a função necessária estão resumidos na Tabela 1. No entanto, a escolha de um teste que possui melhor controle da taxa de erro tipo I e um ótimo desempenho de poder é o que deve ser almejado.

Tabela 1 Outros testes disponíveis no *software* R de normalidade multivariada.

| | Teste de normalidade multivariada (TNM) | Pacote | Função |
|----|---|--------------|----------------------|
| 1 | TNM de Mardia | dprep | mardia |
| 2 | TNM (Três momentos) | dprep | mo3 |
| 3 | TNM (Quatro momentos) | dprep | mo4 |
| 4 | TNM baseado em curtose | ICS | mvnorm.kur.test |
| 5 | TNM baseada em simetria | ICS | mvnorm.skew.test |
| 6 | TNM ruído branco | normwhn.test | normwhn.test-package |
| 7 | TNM conjunta com independência ¹ | normwhn.test | normality.test1 |
| 8 | TNM conjunta sob fraca dependência | normwhn.test | normality.test2 |
| 9 | TNM baseado em simetria e curtose | vars | normality |
| 10 | TNM Shapiro-Wilk ² | mvnormttest | mshapiro.test |
| 11 | TNM “mvnormttest” ou “energy” | fAssets | assetsTest |
| 12 | TNM conjunta sob independência ¹ | normwn.test | normality.test1 |
| 13 | TNM conjunta sob fraca dependência | normwn.test | normality.test2 |

¹ proposto por Doornik e Hansen (1994)

² proposto por Domanski (1998)

2.6 Testes de normalidade multivariada

Thode (2002) verificou nos seus estudos que a pressuposição de normalidade não tem sofrido falta de atenção. E uma ampla revisão de literatura considera mais de quarenta procedimentos de testes formais que foram propostos para testar especificamente a normalidade univariada e multivariada. No entanto, uma vez que existem muitos tipos de testes de normalidade multivariada, um teste único e melhor ainda não existe.

Com o objetivo de resumir a vasta literatura sobre os testes de normalidade, Thode (2002) descreveu quais desses testes são mais eficazes e quais não são. Parte de suas conclusões refere-se ao teste popular de Kolmogorov-Smirnov univariado que possui um baixo poder e, portanto, não deveria ser considerado um teste para testar a normalidade.

Thode (2002) comenta sobre quatro estratégias gerais que podem ser usadas para avaliar a normalidade multivariada. A primeira delas é referente à análise gráfica. Thode (2002) diz que, como no caso univariado, esses testes são subjetivos para a avaliação dos desvios de normalidade. A segunda estratégia consiste em avaliar objetivamente a normalidade marginal usando testes univariados, embora necessária não é uma condição suficiente. A terceira estratégia é a redução de dados para as dimensões $p' < p$, de tal forma que a distribuição dos dados reduzida tenha alguma estrutura conhecida ou simples. E uma quarta estratégia que é a avaliação direta da normalidade multivariada das observações multivariadas.

Já em um outro estudo realizado por Farrell, Barrera e Nacz (2007), existe um vasto número de métodos propostos para a construção de testes de normalidade multivariada. Segundo esses autores, uma revisão levantada por Mecklin e Mundfrom (2005), mais de 50 procedimentos diferentes para os testes de normalidade multivariada são enumerados. No entanto, para a escolha de um bom teste deve-se

levar em consideração o desempenho de poder, o controle da taxa de erro tipo I e, de preferência, um algoritmo simples para realização de tal tarefa.

Em estudos que avaliam os testes de normalidade multivariada observou-se que pouca atenção é dada para o desempenho do poder dos testes, isto é, pelas reduzidas situações de casos em que esses testes foram avaliados. Sobre a avaliação dos testes, Thode (2002) também comenta que a introdução de um novo teste quase invariavelmente inclui uma comparação de poder com outros testes. No caso multivariado, distribuições alternativas não são tão bem definidas, e os testes são muito mais complexos. Portanto, as comparações de poder têm sido limitados em escopo e em tamanho.

Farrell, Barrera e Naczki (2007) verificaram que os testes decorrentes de procedimentos correlacionais apresentaram uma performance pobre em relação ao poder. Assim, focaram seus estudos em três principais categorias de testes de normalidade multivariada: técnica da falta de ajuste, procedimentos baseados em assimetria e curtose e testes consistentes e invariantes, optando por escolher o teste mais poderoso de cada categoria. Os testes comparados foram o de Henze e Zirkler (1990), o teste de Royston (1992) e o teste de Doornik e Hansen (1994).

O teste proposto por Henze e Zirkler (1990) para a distribuição *t-Student* multivariada apresentou alto poder. Esse teste se classifica entre os testes consistentes e invariantes. O teste de Royston (1992), baseado na técnica da falta de ajuste, foi o que apresentou bom desempenho de poder, em todas as distribuições alternativas usadas nas simulações.

Farrell, Barrera e Naczki (2007) concluíram, pelos resultados de suas simulações, que o teste de Doornik e Hansen (1994), da classe de procedimentos baseados em assimetria e curtose, possui bom desempenho de poder, principalmente, nos casos em que as amostras são maiores ou iguais a 75. Esse teste também se

apresentou pouco conservador para pequenos valores de n , o que justifica o fato de não possuir alto desempenho nessa situação.

Cirillo e Ferreira (2003) propuseram a extensão do teste para normalidade univariada no coeficiente de correlação Quantil-Quantil para o caso multivariado e verificaram que o teste apresentou algumas deficiências em relação ao poder. Por exemplo, o aumento do número de variáveis ocasionou uma redução no poder independentemente do tamanho amostral. Já quanto ao erro tipo I , o teste mostrou-se com as mesmas características relacionadas ao caso univariado, sendo eficaz para o controle do erro tipo I .

Sendo assim, julgou-se o teste de coeficiente de correlação Quantil-Quantil para o caso multivariado apropriado devido a essas propriedades no controle da taxa de erro tipo I e também por ser invariante ao número de variáveis. Isso é, o teste apresenta uma alternativa para amostras pequenas, pois, nesse caso, os testes de simetria e curtose são inviáveis.

Dois trabalhos de validação da performance quanto ao poder e ao controle das taxas de erro tipo I de testes de normalidade multivariados foram realizados por Cantelmo e Ferreira (2007a) e Cantelmo e Ferreira (2007b). No primeiro artigo, os autores avaliaram o desempenho do teste multivariado de normalidade de Shapiro-Wilk generalizado por Royston (1983) e compararam com o teste de normalidade implementado no programa R (R Development Core Team, 2004), proposto por Domanski (1998), dado pela função *mshapiro.test* do pacote *mvnormtest*.

Foram realizadas simulações Monte Carlo para avaliar o desempenho do teste de Royston (1983) com o teste de Domanski (1998). Os resultados obtidos permitiram as seguintes conclusões pelos autores: o teste de normalidade implementado no programa R possui baixo desempenho, principalmente em relação ao

controle do erro tipo I , e seu uso não foi aconselhado nas situações reais. O teste de Royston (1983) apresentou excelente desempenho no controle do erro tipo I e alto poder, sendo assim recomendado como um teste padrão para avaliar a normalidade multivariada.

No segundo artigo, Cantelmo e Ferreira (2007b) avaliaram os testes de assimetria e curtose de Mardia (1970, 1975) com o mesmo teste de normalidade multivariado de Shapiro-Wilk implementado no R, dado pela função *mshapiro.test* do pacote *mvnrmtest*. O teste de normalidade multivariado de Shapiro-Wilk implementado no R novamente apresentou fraco desempenho, e os autores não aconselharam o seu uso rotineiro. Por outro lado, o teste de normalidade multivariado baseado em desvios de assimetria é recomendado para situações em que $n \geq 50$ e o teste baseado por curtose é recomendado para situações em que $n \geq 100$.

O teste de Domanski (1998) não é a extensão multivariada de Royston (1983). Cantelmo e Ferreira (2007b) esclareceram que o teste de Domanski se baseia em buscar uma combinação linear das p variáveis originais e aplicar o teste de Shapiro-Wilk nessa nova variável. E o teste de normalidade multivariada de Royston (1983) prevê a estimação da estatística W de Shapiro-Wilk para cada uma das variáveis, sendo a estatística final do teste baseada na soma dos seus valores.

Oliveira e Ferreira (2009) propuseram um novo teste de normalidade baseado na extensão multivariada do teste de normalidade quiquadrado de Pearson e compararam com dois testes: o teste conjunto de assimetria e curtose e a extensão do teste de normalidade univariado de Shapiro-Wilk para o caso multivariado, proposto por Royston (1983, 1993). A extensão do teste de normalidade quiquadrado de Pearson para o caso multivariado foi desenvolvido com sucesso e esse teste permitiu um melhor controle do erro tipo I em todas as circunstâncias simuladas.

Nas situações em que o número de variáveis p era próximo do tamanho

da amostra n , o poder do teste de normalidade quiquadrado de Pearson multivariado apresentou-se melhor do que o teste conjunto de assimetria e curtose. A performance do poder do teste de normalidade quiquadrado de Pearson multivariado melhorou com o aumento do tamanho da amostra e, portanto, foi considerado satisfatório para n maior ou igual a 50 (OLIVEIRA e FERREIRA, 2009).

Para distribuições semelhantes à normal multivariada, o teste de normalidade quiquadrado de Pearson multivariado teve desempenho melhor do que o teste de Royston (1983, 1993). Não houve um teste uniformemente superior em todos os casos. O teste de normalidade quiquadrado de Pearson multivariado foi recomendado nas situações em que p é próximo de n (OLIVEIRA e FERREIRA, 2009).

Silva (2009) propôs a extensão multivariada do teste de normalidade univariado de Shapiro e Francia (1972). A extensão do teste multivariado pode ser encontrada em Ferreira (2008) e difere essencialmente do teste de Shapiro-Wilk multivariado na definição dos coeficientes necessários para o cálculo da estatística do teste.

Silva (2009) comparou o teste proposto com a extensão do teste de normalidade de Shapiro-Wilk univariada para o caso multivariado proposto por Royston (1983, 1993). O desempenho dos testes foi avaliado pelas taxas de erro tipo I e poder, por meio de simulação Monte Carlo. Sob H_1 foram consideradas as distribuições alternativas t multivariada com $\nu = 1$ e $\nu = 30$ graus de liberdade, lognormal e normal contaminada com grau de contaminação $\delta = 0, 30$. Em todos os casos foram simuladas situações com $p = 2$ e com $p = 10$ variáveis. Diferentes valores de tamanho de amostra e de correlação entre as variáveis foram considerados, da mesma forma que foi simulada para o erro tipo I . Os resultados apresentados foram restritos à situação de $\alpha = 5\%$, uma vez que o padrão de

resposta para $\alpha = 1\%$ foi similar.

O teste proposto por Silva (2009) foi estendido para o caso multivariado com sucesso e controlou o erro tipo I , sendo equivalente ao teste Shapiro-Wilk multivariado. O poder do teste de Shapiro-Francia multivariado foi, em geral, igual ou superior ao do teste Shapiro-Wilk multivariado. Não houve um teste, entre os dois, uniformemente superior, em todos os casos. O teste de Shapiro-Francia multivariado foi recomendado para uso rotineiro nas aplicações multivariadas que requerem testes de normalidade.

Liang, Tang e Chan (2009) propuseram uma generalização da estatística do teste de Shapiro-Wilk univariado para testar normalidade em situações de alta-dimensão, ou seja, quando $n \leq p$, embora a proposta possa ser aplicada também às situações regulares em que $p < n$. A justificativa dos autores para a construção dessa proposta de teste se baseou na premissa de que as poucas generalizações existentes na literatura do teste de Shapiro-Wilk para o caso multivariado eram apropriadas para grandes tamanhos de amostra. Logo o foco do trabalho deles consistiu em generalizar a estatística de Shapiro-Wilk para testes de normalidade de alta dimensão com tamanho reduzido da amostra, limitado para amostras de tamanho $n < 2000$, concentrando sobre os casos em que o tamanho amostral, n , é pequeno e $n \leq p$, em que estudos para esses casos ainda não tinham sido abordados na literatura.

Para comparações das taxas de erro tipo I , Liang, Tang e Chan (2009) compararam a sua proposta de teste baseada na generalização do Shapiro-Wilk com o teste de normalidade Srivastava e Hui (1987) que é baseado na ideia de componentes principais. Para realizar as comparações foi usado o método Monte Carlo. Como resultado, verificaram que o teste proposto controlou as taxas de erro tipo I adequadamente quando os valores observados foram comparados com

os níveis nominais de significância adotados por eles. Enquanto que o teste de Srivastava e Hui (1987) mostrou-se liberal nos mesmos casos.

Uma das desvantagens do teste de Liang, Tang e Chan (2009) refere-se ao desempenho do poder. Os autores compararam o teste proposto com os testes de assimetria e curtose de Mardia (1970) e com o teste de Liang et al. (2000) verificando que o teste de Liang, Tang e Chan (2009) é menos poderoso.

Os testes baseados nos procedimentos de assimetria e curtose são limitados para amostras de tamanho grandes, devido às características assintóticas. Além disso, não garantem resultados referentes à normalidade, pois estes apresentam problemas, para os quais não são realizadas comparações após o quarto momento (CIRILLO e FERREIRA, 2003).

Outro ponto que se pode destacar é a abordagem gráfica “Q-Qplot”, que é bastante poderosa para verificar desvios de normalidade. Entretanto, não é um teste formal e, além disso, a simples constatação via gráficos não é suficiente, principalmente no caso multivariado, especificamente nas situações de muitas variáveis. Esse procedimento serve apenas como uma análise exploratória dos dados e na identificação de outliers, segundo Cirillo e Ferreira (2003).

Diante das revisões feitas em relação aos testes de normalidade multivariada existentes na literatura, verificou-se que a maioria é restrita ao tamanho das amostras ou, ainda, apresenta deficiências quanto ao controle da taxa de erro tipo I e ao desempenho do poder. No entanto, a busca de um teste de normalidade multivariada que supra todas essas condições e também seja baseado em um algoritmo simples é algo que ainda continua.

3 MÉTODOS

3.1 Testes de normalidade multivariada propostos

Foi considerada uma amostra aleatória dada por $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$, sendo $X_j \in \mathbb{R}^p$, de uma população com média μ com dimensão $(p \times 1)$ e covariância Σ de dimensão $(p \times p)$. A hipótese nula de interesse é dada por

H_0 : Os dados amostrais seguem uma distribuição normal multivariada $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$,

em que

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}, \quad (27)$$

com média $\mu \in \mathbb{R}^p$ e covariância $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ positiva definida.

Foi estendido os testes univariados de normalidade no espaço p -dimensional, ou seja, foram apresentados dois procedimentos para testar a normalidade multivariada: um deles, baseado em distâncias, e o outro em *bootstrap* paramétrico. Todos os procedimentos descritos foram implementados no R e os scripts estão apresentados no Apêndice.

3.1.1 Teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias

Como as estatísticas de ordem, no caso multivariado, são complicadas de obter em virtude da correlação entre as variáveis, foi utilizado um procedimento baseado em distâncias. As observações multivariadas foram transformadas em distâncias, que são observações univariadas e, em seguida, quantis esperados da distribuição relativa a essas distâncias foram obtidos. Finalmente a estatística do

teste foi computada utilizando o coeficiente de determinação entre as estatísticas de ordem observadas relativas às distâncias e às estatísticas de ordem esperadas. A distribuição nula foi obtida por simulação Monte Carlo e o valor observado na amostra original foi confrontado com os valores da distribuição nula Monte Carlo, para obtenção do valor- p e tomada de decisão.

Diferentemente do caso univariado, o teste atual foi construído com base em distâncias estatísticas, mais especificamente, baseado na distância de Mahalanobis. Os demais passos seguiram a mesma lógica do teste de normalidade univariado, exceto pelo fato de que as estatísticas de ordem referem-se às distâncias.

Algoritmo para o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias

Os passos para obtenção do teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em distâncias são:

1. considerar uma matriz de dados $\mathbf{X}_{n \times p}$ e N_{SM} o número de simulações Monte Carlo para realizar o teste;
2. calcular as distâncias de Mahalanobis

$$D_j^2 = (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})^\top \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}), \text{ para } j = 1, 2, \dots, n,$$

em que \mathbf{X}_j é o vetor relativo a j -ésima observação p -variada, $\bar{\mathbf{X}}$ é o vetor de médias das n observações e \mathbf{S} a matriz de variância e covariância relativa a matriz de dados $\mathbf{X}_{n \times p}$;

3. ordenar as distâncias da amostra original obtendo-se as estatísticas de ordem:

$$D_{(1)}^2, D_{(2)}^2, \dots, D_{(j)}^2, \dots, D_{(n)}^2;$$

4. realizar a seguinte transformação

$$b_{(j)} = \frac{nD_{(j)}^2}{(n-1)^2}, \quad (28)$$

que se distribui de forma exata, sob normalidade multivariada, como uma variável beta com parâmetros

$$\alpha = \frac{p}{2} \quad e \quad \beta = \frac{n-p-1}{2}, \quad (29)$$

(GNANADESIKAN e KETTENRING, 1972);

5. estimar os valores esperados das estatística de ordem da distribuição beta por

$$b_j^* = F^{-1} \left[\frac{(j-a)}{(n-a-b+1)}; \alpha, \beta \right], \quad (30)$$

relativos a estatística de ordem $b_{(j)}$, que é j -ésimo menor valor da amostra aleatória, para $j = 1, 2, \dots, n$, sendo: F^{-1} a inversa da função de distribuição beta,

$$a = \frac{p-2}{2p} \quad e \quad b = \frac{n-p-3}{2(n-p-1)} \quad (31)$$

(GNANADESIKAN e KETTENRING, 1972);

6. calcular o coeficiente de determinação amostral, considerando a amostra ori-

ginal, r_c^2 , entre $b_{(j)}$ e b_j^* , pela expressão:

$$r_c^2 = \frac{\left(\sum_{j=1}^n b_{(j)} b_j^* - \frac{\sum_{j=1}^n b_{(j)} \sum_{j=1}^n b_j^*}{n} \right)^2}{\left[\sum_{j=1}^n b_{(j)}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n b_{(j)} \right)^2}{n} \right] \left[\sum_{j=1}^n (b_j^*)^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n b_j^* \right)^2}{n} \right]} \quad (32)$$

7. gerar uma amostra aleatória Z_1, Z_2, \dots, Z_n , de tamanho n da distribuição normal multivariada, com média $\mu = 0$ e covariância $\Sigma = I$. A escolha desses parâmetros não interfere nos resultados do teste, uma vez que as distâncias são invariantes às transformações de escalas;
8. calcular as distâncias para a média amostral e ordenar os valores, obtendo-se as estatísticas de ordem:

$$b_{(1)}, b_{(2)}, \dots, b_{(n)};$$

considerando que \bar{Z} e S_Z são o vetor de médias e a matriz de covariâncias da amostra gerada no passo 7, então as distâncias são calculadas por

$$D_j^2 = (Z_j - \bar{Z})^\top S_Z^{-1} (Z_j - \bar{Z}), \text{ para } j = 1, 2, \dots, n,$$

e as estatísticas de ordem da beta, pela transformação (28), após as distâncias terem sido ordenadas;

9. calcular o coeficiente de determinação amostral r_i^2 entre $b_{(j)}$ e b_j^* , no i -ésimo passo da iteração Monte Carlo.

10. armazenar r_i^2 , juntamente com o valor original e os demais valores obtidos na iteração anterior, se houver ocorrido alguma iteração anterior;
11. se o número de valores armazenados, incluindo o valor original, for menor que $N_{SM} + 1$, então vá para o passo 7, senão vá para o passo 12;
12. calcular o valor- p por:

$$\text{valor} - p = \frac{\sum_{i=1}^{N_{SM}+1} I(r_i^2 \leq r_c^2)}{N_{SM} + 1}, \quad (33)$$

em que:

- i*) $I(\bullet)$ é uma função indicadora;
 - ii*) r_i^2 é o coeficiente de determinação da i -ésima unidade amostral da simulação Monte Carlo;
 - iii*) r_c^2 é o coeficiente de determinação calculado a partir da amostra original;
13. construir o QQplot dos quantis da distribuição beta confrontando $b_{(j)}$ vs b_j^* .
 14. retornar o valor- p , o valor da estatística na amostra original r_c^2 e o gráfico referente ao QQplot.

Usou-se distâncias de cada observação para a média, devido ao fato de não ser possível ordenar um vetor, informando a ordem das observações no espaço p -dimensional, pois existem p componentes e o conceito de ordenação não se aplicaria. Quanto mais próximo de 1 estiver o valor do coeficiente de determinação estimado na amostra original, maior será a evidência de normalidade multivariada. Isso ocorre, em virtude de que sob normalidade multivariada, a distribuição marginal de b_j é uma beta.

Assim, as estatísticas de ordem observadas em uma amostra aleatória, se a hipótese de normalidade multivariada for verdadeira, devem se correlacionar fortemente com as estatísticas de ordem esperadas da distribuição beta. Os valores esperados foram obtidos de forma aproximada pela inversa da função de distribuição beta. A inversa depende das quantidades a e b , apresentadas anteriormente, que servem para realizar correções de continuidade, sendo que para as suas definições foram considerados os aspectos de maior eficiência para os resultados dos valores esperados das estatísticas de ordem da distribuição beta.

3.1.2 Teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico

O segundo teste proposto foi baseado em um método de *bootstrap* paramétrico. Como visto no início da seção (3.1), X_j possui distribuição p -variada com média μ e com covariância Σ , ambos desconhecidos. Sob H_0 , X_j será considerado como uma variável aleatória normal com média μ e covariância Σ . Para a aplicação do teste proposto, verificou-se que o parâmetro μ poderia ser considerado como 0, sem perda de generalidade. O parâmetro Σ , por sua vez, não pôde ser ignorado e, portanto, adotou-se a estimativa S , da amostra original, como valor paramétrico Σ . Isso foi feito, com o intuito de se reamostrar a distribuição nula da estatística do teste. Os detalhes da construção da estatística, da sua distribuição nula e da obtenção do p -valor foram descritos na sequência.

Algoritmo para o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico

Os passos para obtenção do teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico são:

1. considerar uma matriz de dados $X_{n \times p}$ e N_B o número de reamostragens

para realizar o teste;

2. ordenar as realizações das variáveis aleatórias dispostas em cada coluna da matriz X de forma independente;
3. o estimador do valor esperado m_j de cada estatística de ordem $X_{(j)i}$, supondo normalidade, da i -ésima variável disposta na i -ésima coluna de X , \bar{m}_j é dado por:

$$\int_{-\infty}^{\bar{m}_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = p_j, \quad (34)$$

$j = 1, 2, \dots, n$, em que

$$p_j = \frac{j - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}}; \quad (35)$$

4. calcular o coeficiente de determinação amostral, considerando a amostra original, r_i^2 , $i = 1, 2, 3, \dots, p$ entre as realizações ordenadas da i -ésima variável aleatória, da i -ésima coluna da matriz X e os valores de \bar{m}_j ;
5. obter a média dos coeficientes de determinação obtidos no passo 4, a qual denotada de H_c :

$$H_c = \frac{\sum_{i=1}^p r_i^2}{p}; \quad (36)$$

6. gerar realizações de uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição normal multivariada Y_1, Y_2, \dots, Y_n , com média $\mu = 0$ e covariância $\Sigma = S$, em que S é a covariância amostral obtida na amostra original;
7. ordenar as realizações de variáveis aleatórias para cada coluna da matriz Y ;

8. calcular o coeficiente de determinação amostral r_i^2 entre as realizações ordenadas das variáveis aleatórias de cada coluna da matriz Y e os valores de \tilde{m}_j ;
9. obter a média de r_i^2 e denotá-la por H_b , no b -ésimo estágio de reamostragem *bootstrap*. Armazenar o valor H_b juntamente com o valor original H_c e os demais valores obtidos na iteração anterior, se houver ocorrido alguma iteração anterior;
10. se o número de valores armazenados, incluindo o valor original, for menor que $N_B + 1$, então vá para o passo 6, senão vá para o passo 11;
11. calcular o valor- p por:

$$\text{valor} - p = \frac{\sum_{b=1}^{N_B+1} I(H_b \leq H_c)}{N_B + 1}, \quad (37)$$

em que:

- i) $I(\bullet)$ é uma função indicadora;
 - ii) H_b é o valor da estatística no b -ésimo estágio de reamostragem *bootstrap*;
 - iii) H_c é o valor da estatística calculada a partir da amostra original;
12. retornar o valor- p e o valor da estatística na amostra original H_c .

3.2 Teste Shapiro-Wilk de normalidade multivariado

A descrição mais detalhada deste teste pode ser encontrada em Ferreira (2008) e em Royston (1983, 1993). Para fins de desenvolvimento desse trabalho, optou-se pormenorizar este teste em forma de um algoritmo:

3.2.1 Algoritmo para o teste Shapiro-Wilk de normalidade multivariado

Os passos para obtenção do teste Shapiro-Wilk de normalidade multivariado são:

1. considerar uma matriz de dados $\mathbf{X}_{n \times p}$
2. estimar o valor esperado m_j , equivalentemente ao procedimento do passo 3 do algoritmo do teste de normalidade multivariado baseado em *bootstrap* paramétrico;
3. calcular o vetor $\mathbf{c} = (\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}})^{-1/2} \tilde{\mathbf{m}}$ e $u = 1/\sqrt{n}$;
4. calcular a estimativa do vetor de coeficientes α :

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{\tilde{m}_j}{\sqrt{\phi}} \text{ para } \begin{cases} j = 2, \dots, n-1 & \text{se } (n \leq 5) \\ j = 3, 4, \dots, n-2 & \text{se } (n > 5) \end{cases} \quad (38)$$

em que $\tilde{\alpha}_n$ e $\tilde{\alpha}_{n-1}$ são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n &= c_n + 0,221157u - 0,14798u^2 - 2,071190u^3 + 4,434685u^4 - 2,706056u^5 \\ \tilde{\alpha}_{n-1} &= c_{n-1} + 0,042981u - 0,293762u^2 - 1,752461u^3 + 5,682633u^4 - 3,582633u^5 \end{aligned}$$

e a quantidade normalizadora (ϕ) por:

$$\phi = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2)/(1 - 2\tilde{\alpha}_n^2) & \text{se } n \leq 5 \\ (\tilde{\mathbf{m}}^\top \tilde{\mathbf{m}} - 2\tilde{m}_n^2 - 2\tilde{m}_{n-1}^2)/(1 - 2\tilde{\alpha}_n^2 - 2\tilde{\alpha}_{n-1}^2) & \text{se } n > 5 \end{cases} ; \quad (39)$$

5. calcular para cada variável a estatística W_k do teste de Shapiro-Wilk univa-

riado:

$$W_k = \frac{\left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_j X_{(j)k} \right)^2}{\sum_{j=1}^n (X_{jk} - \bar{X}_{.k})^2} \quad (40)$$

em que

$$\bar{X}_{.k} = \sum_{j=1}^n \frac{X_{jk}}{n};$$

6. obter Y_k (valor transformado de W_k) por:

$$Y_k = \begin{cases} -\ln[\gamma - \ln(1 - W_k)] & \text{se } 4 \leq n \leq 11 \\ \ln(1 - W_k) & \text{se } 12 \leq n \leq 5.000 \end{cases} \quad (41)$$

em que $\gamma = -2,273 + 0,459n$.

OBS: A estatística W não segue uma distribuição normal. Por esta razão, Royston (1993), propôs a utilização de uma transformação (Y_k) da família Box-Cox. A variável Y_k possui média dada por:

$$\mu_Y = \begin{cases} 0,5440 - 0,39978n + 0,025054n^2 - 0,0006714n^3 & \text{se } 4 \leq n \leq 11 \\ -1,5861 - 0,31082u - 0,083751u^2 + 0,0038915u^3 & \text{se } 12 \leq n \leq 5.000 \end{cases}$$

em que $u = \ln(n)$. O desvio padrão de Y_k é dado por:

$$\sigma_Y = \begin{cases} \exp\{1,3822 - 0,77857n + 0,062767n^2 - 0,0020322n^3\} & \text{se } 4 \leq n \leq 11 \\ \exp\{-0,4803 - 0,082676u + 0,0030302u^2\} & \text{se } 12 \leq n \leq 5.000 \end{cases}$$

7. obter Z_k :

$$Z_k = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \quad (42)$$

que sob a hipótese nula de normalidade Z_k possui aproximadamente distribuição normal-padrão.

OBS: No caso particular $n = 3$, o vetor $\tilde{\alpha}$ é dado por $\tilde{\alpha} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T$;

8. calcular

$$\kappa_k = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-Z_k) \right] \right\}^2, \quad (43)$$

em que

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

9. calcular

$$G = \frac{\sum_{k=1}^p \kappa_k}{p}; \quad (44)$$

10. calcular o valor de ν , igualando os momentos de G com os momentos χ_{ν}^2/ν dado por:

$$\nu = \frac{p}{1 + (p-1)\bar{c}} \quad (45)$$

em que

$$\bar{c} = \frac{\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{k'=k+1}^p c_{kk'}}{p^2 - p}.$$

O valor de ν depende de $c_{kk'}$, correlação entre κ_k e $\kappa_{k'}$. Royston (1983) propôs estimar $c_{kk'}$ a partir de $r_{kk'}$, pois assumiu que $c_{kk'}$ era função de $\rho_{kk'}$. Assim, se $R = [r_{kk'}]$ é a matriz de correlação amostral de dimensões $(p \times p)$, a função $g(r_{kk'}, n)$ é usada como um estimador de $c_{kk'}$:

$$\hat{c}_{kk'} = \begin{cases} g(r_{kk'}, n) & \text{se } k \neq k' \\ 1 & \text{se } k = k' \end{cases} \quad (46)$$

em que sob às condições $g(0, n) = 0$ e $g(1, n) = 1$ a função g é dada por

$$g(r_{kk'}, n) = c_{kk'} = |r_{kk'}|^\lambda \left[1 - \frac{\mu}{\Gamma} |r_{kk'}| (1 - |r_{kk'}|)^\mu \right] \quad (47)$$

em que λ, μ e $\Gamma > 0$ e são dados por $\lambda = 5, \mu = 0,715$ e

$$\Gamma = 0,21364 + 0,015124u^2 - 0,0018034u^3, \quad (48)$$

sendo $u = \ln(n)$;

11. calcular a estatística do teste de Shapiro-Wilk univariado estendido para o caso multivariado, apresentado pelo teste de Royston (1983):

$$H = \nu G = \frac{\nu}{p} \sum_{k=1}^p \kappa_k, \quad (49)$$

que sob a hipótese nula de normalidade possui distribuição aproximada de uma quiquadrado com ν graus de liberdade. O valor- p é calculado por

$$\text{valor} - p = 1 - F_{\chi^2}(H; \nu), \quad (50)$$

em que $F_{\chi^2}(H; \nu)$ é a função de distribuição quiquadrado com ν graus de

liberdade avaliada no ponto H ;

12. retornar o valor- p e o valor da estatística na amostra original H .

A implementação da rotina para o teste Shapiro-Wilk de normalidade multivariado proposto por Royston (1983, 1993) foi realizada por Silva (2009), quando comparou esse mesmo teste com o teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado.

3.3 Validação do desempenho

Foi usada simulação Monte Carlo para avaliar o desempenho dos testes de normalidade multivariada mensurando-se as taxas de erro tipo I e o poder do teste. O teste de normalidade multivariada de Royston (1983, 1993) foi considerado para fins de comparação. A escolha do TSWNM justifica-se por ser um teste de melhor desempenho ao longo das comparações realizadas na literatura (ver Cantelmo e Ferreira (2007a), Cantelmo e Ferreira (2007b), Farrell, Barrera e Naczk (2007), Silva (2009) e Oliveira e Ferreira (2009)). Para execução desse procedimento duas etapas foram consideradas, uma referente ao erro tipo I , e outra relacionada ao poder do teste.

3.3.1 Primeira Etapa: Erro Tipo I

Para avaliar a taxa de erro tipo I , amostras normais p -dimensionais foram geradas com o vetor de médias $\mu = 0$ e matriz de covariância Σ com estrutura de correlação dada por

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \rho, \quad (51)$$

sem perda de generalidade, em que a estatística D^2 (distância de Mahalanobis) é invariante sob transformações não singulares. Especificamente, foi escolhido para o caso das simulações $\sigma^2 = 1$ e a correlação, ρ , fixada em 0,5 para correlação intermediária, sem perda de generalidade, em que

- para o TMCNMD a escolha desses parâmetros não interfere nos resultados, uma vez que as distâncias são invariantes a transformações de escalas.
- e para o TNMBP a estrutura de covariância usada na simulação para a validação, vai ser incorporada no teste por intermédio da matriz S .

Para as comparações dos testes de normalidade multivariada em que foi necessário assumir a restrição $n > p$, isto é, para gerar amostra normal multivariada permitindo estimativas da matriz de covariância não-singulares, foram tomadas as combinações de n e p para a dimensão da matriz de dados $X_{n \times p}$, de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 Os testes de normalidade multivariados usados nas comparações, com os tamanhos amostrais n e número de variáveis p usados nas construções das matrizes de dados $X_{n \times p}$, situação $n > p$.

| Testes de normalidade multivariada | n | p |
|------------------------------------|--------|----------------|
| TMCNMD, TNMBP e TSWNM | 10 | 2, 4, 6, 8 |
| TMCNMD, TNMBP e TSWNM | 20 | 2, 5, 10, 18 |
| TMCNMD, TNMBP e TSWNM | 50 | 2, 10, 25, 48 |
| TMCNMD, TNMBP e TSWNM | 100 | 2, 10, 50, 98 |
| TMCNMD, TNMBP e TSWNM | 200 | 2, 10, 50, 100 |
| TMCNMD e TNMBP | 10.000 | 5 |

Uma outra situação em que a matriz de covariância não-singulares não era necessária, isto é, $n \leq p$, foi tomada para avaliar o TNMBP, uma vez que a construção desse teste não depende da inversa da matriz de covariância, para isso foi escolhida as combinações de n e p de acordo com a Tabela 3. Simulações de amostras aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n foram realizadas.

Tabela 3 Tamanhos amostrais n e número de variáveis p usados nas construções das matrizes de dados $X_{n \times p}$, para avaliação do TNMBP na situação $n \leq p$.

| Teste de normalidade multivariada | n | p |
|-----------------------------------|-----|--------------------|
| TNMBP | 10 | 10, 15, 20, 30 |
| TNMBP | 20 | 20, 25, 30, 50 |
| TNMBP | 30 | 30, 40, 50, 75 |
| TNMBP | 50 | 50, 60, 75, 100 |
| TNMBP | 100 | 100, 110, 130, 150 |

O processo de simulação Monte Carlo foi repetido 2.000 vezes e os testes propostos, TMCNMD e TNMBP, e o teste usado para comparação, TSWNM, foram aplicados em cada amostra ao nível de significância nominal, α , que foi fixado em 1%, 5% e 10%. As taxas de erro tipo I foram calculadas para cada teste como a proporção de vezes que a hipótese nula foi rejeitada, e este foi comparado com o nível de significância nominal.

Uma vez que estas taxas de erro tipo I foram estimadas utilizando simulações de Monte Carlo, elas não estão livres de erro. Assim, os testes binomiais exatos, considerando um nível de significância nominal de 1% para as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = 1\% \text{ versus } H_1 : \alpha \neq 1\%, \\ H_0 : \alpha = 5\% \text{ versus } H_1 : \alpha \neq 5\% \\ H_0 : \alpha = 10\% \text{ versus } H_1 : \alpha \neq 10\% \end{cases} \quad (52)$$

foram aplicadas para a taxa de erro tipo I .

Se a hipótese nula for rejeitada e as taxas de erro tipo I observadas forem

considerados significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores ao nível de significância nominal considerado, o teste será *conservativo*. Se a hipótese nula for rejeitada e as taxas de erro tipo I observadas forem consideradas significativamente (valor- $p < 0,01$) superiores ao nível nominal de significância, o teste será *liberal*. Porém, se as taxas de erro tipo I observadas não forem consideradas significativamente (valor- $p > 0,01$) diferentes do nível nominal de significância considerado, o teste é *exato*.

Se x representa o número de hipóteses nula rejeitadas em $N = 2.000$ simulações Monte Carlo, para o nível de significância nominal α , Oliveira e Ferreira (2009) consideraram a estatística do teste, usando a relação entre a F e a distribuição binomial, com probabilidade de sucesso $p = \alpha$, por:

$$F_c = \left(\frac{x + 1}{N - x} \right) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right), \quad (53)$$

que, sob a hipótese nula, segue a distribuição F com $\nu_1 = 2(N - x)$ e $\nu_2 = 2(x + 1)$ graus de liberdade. Se $F_c \leq F_{0,005}$ ou $F_c \geq F_{0,995}$, a hipótese nula deve ser rejeitada ao nível 1% de significância, em que $F_{0,005}$ e $F_{0,995}$ são os quantis da distribuição F com ν_1 e ν_2 graus de liberdade.

3.3.2 Segunda etapa: poder do teste

Foram simuladas amostras aleatórias de distribuições não-normais multivariadas para avaliar o poder dos testes em rejeitar a hipótese nula que por construção é falsa. Foi utilizado o mesmo procedimento para realizar a simulação descrita na seção (3.1). A diferença consiste na geração de realizações de variáveis aleatórias de distribuições não-normais como a *t-Student* multivariada com diferentes graus de liberdade (com $\nu = 1$ e $\nu = 30$), log-normal multivariada, normal conta-

minada multivariada e a uniforme multivariada. Foram utilizadas as funções geradoras de variáveis aleatórias multidimensionais do programa R para a realização de tal tarefa.

A realização de vetores aleatórios da distribuição *t-Student* multivariada foram gerados da seguinte forma

$$Y_j = \sqrt{\nu} \frac{Z_j}{\sqrt{U}} \quad \text{e} \quad X_j = \Sigma^{1/2} Y_j + \mu, \quad (54)$$

em que Z tem distribuição $N_p(0, I)$ e a variável U com distribuição quiquadrado com ν graus de liberdade distribuída de forma independente. O parâmetro ν foi tomado com valor igual a 1, para a obtenção de uma circunstância diferente da distribuição normal multivariada e, também, igual a 30 para a obtenção de uma circunstância que a distribuição *t-Student* multivariada que se assemelha à distribuição normal multivariada. Para tal procedimento, foi usado o pacote *mvtnorm* pela função *rmvt*.

A geração da realização de um vetor coluna aleatório de dimensão p com distribuição log-normal multivariada foi feita tomando-se o seguinte vetor $W = [\exp(Z_1), \exp(Z_2), \dots, \exp(Z_p)]^T$, em que $Z \sim N_p(\mu, \Sigma)$.

Para gerar realizações dos vetores aleatórios da normal contaminada, a seguinte função de densidade foi considerada

$$f_X(x) = \delta(2\pi)^{-p/2} |\Sigma_1|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x - \mu_1)\right\} \\ + (1 - \delta)(2\pi)^{-p/2} |\Sigma_2|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x - \mu_2)\right\}, \quad (55)$$

em que $0 \leq \delta \leq 1$, Σ_1 and Σ_2 são as matrizes de covariância positiva definida e μ_1 e μ_2 são os vetores médios p -dimensional. Para realizar as simulações os seguintes valores foram considerados: $\delta = 0,30$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 10 J$, $\Sigma_1 = \rho$, Σ_2

$= 10 \rho$, em que J é um vetor $(p \times 1)$ de 1's e a matriz ρ foi definida na Equação (51) com $\rho = 0,5$.

Para gerar realizações de vetores aleatórios da uniforme multivariada foi tomado $Y \sim N_p(0, \rho)$, em que ρ é a matriz de correlação obtida da equação (51) considerando $\sigma^2 = 1$. Para o i -ésimo componente de Y tomou-se $X_i = \Phi(Y_i)$, em que $\Phi(\bullet)$ é a função distribuição acumulada da normal padrão e $i = 1, 2, \dots, p$. O j -ésimo vetor aleatório $X_j = [X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jp}]^T$ é distribuído de forma uniformemente multivariado. Para geração da realização dos vetores da log-normal, normal contaminada e uniforme foi usada a função *mvrnorm* do pacote *MASS*, para mais detalhes consultar o Apêndice.

Foram aplicados os testes de normalidade multivariada descritos anteriormente em 2.000 repetições desse procedimento. Computou-se a proporção de vezes em que a hipótese nula foi rejeitada para os três testes (TMCNMD, TNMBP, e o TSWNM), considerando os níveis nominais fixos para $\alpha = 1\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 10\%$. Essa proporção estima os valores de poder dos três testes, que foram comparados entre si.

3.4 Exemplo

Um subconjunto do exemplo apresentado por Royston (1983) foi utilizado para ilustrar a aplicação dos três testes de normalidade multivariado avaliados. Nesse exemplo as variáveis X_1 e X_2 referem-se à concentração de hemoglobina e contagem de linfócitos, respectivamente, mensuradas em $n = 20$ pintores de carro. Os dados observados estão apresentados a seguir:

| Pintores | X_1 | X_2 | Pintores | X_1 | X_2 |
|----------|-------|-------|----------|-------|-------|
| 1 | 13,4 | 14 | 11 | 15,2 | 26 |
| 2 | 14,6 | 15 | 12 | 16,9 | 28 |
| 3 | 13,5 | 19 | 13 | 14,8 | 24 |
| 4 | 15,0 | 23 | 14 | 16,2 | 26 |
| 5 | 14,6 | 17 | 15 | 14,7 | 23 |
| 6 | 14,0 | 20 | 16 | 14,7 | 9 |
| 7 | 16,4 | 21 | 17 | 16,5 | 18 |
| 8 | 14,8 | 16 | 18 | 15,4 | 28 |
| 9 | 15,2 | 27 | 19 | 15,1 | 17 |
| 10 | 15,5 | 34 | 20 | 14,2 | 14 |

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dividiu-se esta seção em duas etapas: uma referente ao erro tipo *I* e outra ao poder dos testes. A subseção referente às taxas de erro tipo *I* foi dividida em duas partes. A primeira parte é composta pelos resultados das comparações dos três testes de normalidade multivariada: TMCNM, TNMBP e TSWNM, quando o tamanho da amostra é maior que o número de variáveis ($n > p$). A segunda parte referente ao erro tipo *I* foi composta pelos resultados do novo teste de normalidade multivariada proposto, TNMBP, quando o tamanho da amostra é menor ou igual ao número de variáveis ($n \leq p$) e os níveis de significância nominais para ambas as situações do erro tipo *I* foram fixados para 10%, 5% e 1%.

A subseção referente ao poder dos testes também foi dividida em duas partes. A primeira parte é formada pelos resultados das comparações dos três testes de normalidade multivariada: TMCNM, TNMBP e TSWNM, quando o tamanho da amostra é maior que o número de variáveis ($n > p$). A segunda parte referente ao poder dos testes foi composta pelos resultados do novo teste de normalidade multivariada proposto, TNMBP, quando o tamanho da amostra é menor ou igual ao número de variáveis ($n \leq p$). Para ambas as situações no poder dos testes foram consideradas diferentes distribuições não normais multivariadas. Os níveis de significância nominais foram os mesmos adotados na primeira seção do erro tipo *I*.

4.1 Erro tipo *I*

As probabilidades de se cometerem os erros do tipo *I* e *II* são inversamente proporcionais e relacionadas como o poder do teste. Isso implica que a baixa probabilidade de se incorrer no erro tipo *I* está associada à alta probabilidade

de se cometer o erro tipo *II*. Novamente, se as taxas de erro tipo *I* observadas não forem significativamente diferentes do nível nominal de significância considerado, o teste é *exato*, porém, se elas forem inferiores ao nível de significância nominal considerado, o teste será *conservativo*, e se elas forem superiores ao nível nominal de significância, o teste será *liberal*.

4.1.1 Erro tipo *I* dos testes de normalidade multivariados, $n > p$, para o TMCNM, o TNMBP e o TSWNM

As Tabelas 4, 5 e 6, referem-se ao erro tipo *I* dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando os níveis de significância nominais de 10%, 5% e 1%, respectivamente. Foram consideradas nestas tabelas as combinações de n e p , para os casos ($n > p$) mostrados na Tabela 2. Os resultados foram confrontados com cada nível de significância nominal α associado, por intermédio do teste binomial exato com nível de significância de 1%.

Na Tabela 4 apresentou-se as taxas de erro tipo *I* dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de n e p para $\alpha = 10\%$. O TMCNMD apresentou a maior parte dos resultados das taxas de erro tipo *I* não significativamente ($p > 0,01$) diferente do valor nominal $\alpha = 10\%$. Apenas na situação em que $n = 10$ e $p = 8$ o teste foi considerado liberal com uma diferença em relação ao nível de significância nominal de 1,75 ponto percentual.

O TNMBP, na maioria das vezes, foi considerado exato, mas nas situações $n = 10$ com $p = 4$, $n = 10$ com $p = 6$ e $n = 20$ com $p = 18$ o teste foi conservativo. Não houve uma regra para descrever o comportamento, mas pode-se observar um controle adequado do erro tipo *I*, por parte desse teste.

O TSWNM, assim como o TNMBP, na maioria das vezes, foi considerado

exato e em outras ocasiões foi considerado conservativo. Observa-se no TSWNM, que para valores de p grande, as taxas de erro tipo I foram consideradas abaixo do nível de significância nominal (conservativo), são os casos observados para $n = 20$ com $p = 18$, $n = 100$ com $p = 50$, $n = 100$ com $p = 98$, $n = 200$ com $p = 50$ e $n = 200$ com $p = 100$.

Para amostra de tamanho 10.000 situação em que contemplam os novos testes, TMCNMD e o TNMBP, as taxas de erro tipo I foram muito próximas do nível nominal de significância, mostrando-se exato tanto para o TMCNMD quanto para o TNMBP.

Em comparação com outros testes de normalidade multivariada existentes na literatura, buscou-se fazer um paralelo em algumas circunstâncias cabíveis da Tabela 4 com os testes comparados por Cirillo e Ferreira (2003). Notou-se, por exemplo, que o teste de normalidade baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado para amostras de tamanho $n = 100$ com $p = 2$ e $p = 10$ tiveram bom controle das taxas de erro tipo I , dados respectivamente por 0,1038 e 0,0965, assim como também ocorreu para os três testes comparados na Tabela 4.

Para o teste de normalidade multivariado de simetria, pelos resultados de Cirillo e Ferreira (2003) para amostra $n = 100$ com $p = 2$, houve também um bom controle do erro tipo I , dado por 0,0922. Para o mesmo teste e amostra $n = 100$ com $p = 10$, a taxa de erro tipo I foi de 0,0665, o que é um valor um pouco abaixo do nível nominal de significância em relação aos testes de normalidade baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado, TMCNMD, TNMBP e TSWNM.

Ainda na Tabela 4, para as circunstâncias amostrais de tamanhos $n = 100$ com $p = 2$, o teste de normalidade multivariada de curtose avaliado por Cirillo e Ferreira (2003) foi 0,0680, muito abaixo dos testes de normalidade baseado

no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado, TMCNMD, TNMBP e TSWNM. Para $n = 100$ com $p = 10$, os mesmos autores observaram uma taxa de erro tipo I de 0,1528 que, por outro lado, foi a taxa de erro tipo I mais elevada em relação a todos os testes mencionados relativos ao mesmo tamanho amostral.

Vale ressaltar que para o teste de normalidade baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado, o teste de normalidade multivariada de simetria e o teste de normalidade multivariada de curtose, comparados por Cirillo e Ferreira (2003) foram realizadas 10.000 simulações Monte Carlo no processo de validação, enquanto que, os testes referidos na Tabela 4 foram realizadas somente 2.000 simulações Monte Carlo para a validação dos mesmos. Porém, isso não influencia nos resultados, pois 2.000 simulações é tão eficiente quanto 10.000 simulações para obter uma boa aproximação das estimativas das taxas de erro tipo I e também das estimativas de poder.

Na Tabela 5, tem-se as taxas de erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de n e p para $\alpha = 5\%$. O TMCNMD obteve o controle da taxa de erro tipo I em todas as situações, independente do tamanho da amostra e do número de variáveis. Sendo assim as taxas de erro tipo I observadas não foram consideradas significativamente (valor- $p > 0,01$) diferentes do nível nominal de significância e este foi então considerado exato em todas as situações.

Para o TNMBP, na maior parte das situações, o teste foi considerado exato, exceto para $n = 10$ com $p = 6$ e $n = 20$ com $p = 18$, no qual o teste foi conservativo. Já o TSWNM foi considerado conservativo nas situações em que $n = 20$ com $p = 10$, $n = 20$ com $p = 18$ e $n = 100$ com $p = 50$, apresentando exato para os restantes das combinações de n e p .

Para o estudo das taxas de erro tipo I com amostra de tamanho 10.000 no TMCNMD e o TNMBP, os resultados foram próximos do nível nominal de

Tabela 4 Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$.

| n | p | 10% | | |
|--------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,1000 | 0,1065 | 0,1010 |
| | 4 | 0,1030 | 0,0785 ⁻ | 0,0850 |
| | 6 | 0,0980 | 0,0765 ⁻ | 0,0895 |
| | 8 | 0,1175 ⁺ | 0,0915 | 0,0950 |
| 20 | 2 | 0,0965 | 0,1010 | 0,1045 |
| | 5 | 0,0975 | 0,0900 | 0,0935 |
| | 10 | 0,1080 | 0,0890 | 0,0875 |
| | 18 | 0,1000 | 0,0770 ⁻ | 0,0665 ⁻ |
| 50 | 2 | 0,1020 | 0,0960 | 0,0905 |
| | 10 | 0,1050 | 0,0905 | 0,0830 |
| | 25 | 0,0975 | 0,0955 | 0,0940 |
| | 48 | 0,0875 | 0,0960 | 0,0865 |
| 100 | 2 | 0,0915 | 0,1035 | 0,0980 |
| | 10 | 0,1010 | 0,0880 | 0,0845 |
| | 50 | 0,1160 | 0,0880 | 0,0725 ⁻ |
| | 98 | 0,1075 | 0,0975 | 0,0765 ⁻ |
| 200 | 2 | 0,0895 | 0,0840 | 0,0870 |
| | 10 | 0,1035 | 0,1030 | 0,0885 |
| | 50 | 0,0900 | 0,0885 | 0,0760 ⁻ |
| | 100 | 0,0915 | 0,0935 | 0,0645 ⁻ |
| 10.000 | 5 | 0,0991 | 0,1032 | - |

⁺ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 10% de significância ($P < 0,01$).

⁻ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 10% de significância ($P < 0,01$).

significância, mostrando-se exato tanto para o TMCNMD quanto para o TNMBP.

Buscou-se comparar algumas das taxas de erro tipo I dos testes da Tabela 5 com outros testes já avaliados na literatura. Para a amostra $n = 100$ com $p = 2$, o teste de normalidade de curtose multivariado avaliado por Cirillo e Ferreira (2003) foi significativamente (valor- $p < 0,01$) inferior ao nível nominal de 5% considerado, ou seja, conservativo. Para o mesmo tamanho amostral, os testes comparados na Tabela 5, o teste de normalidade baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado e o teste de normalidade multivariada de simetria

comparados por Cirillo e Ferreira (2003), como também o teste de normalidade de Shapiro-Francia multivariado proposto e avaliado por Silva (2009) foram exatos. Sendo que os autores Cirillo e Ferreira (2003) e Silva (2009) usaram 10.000 amostras no procedimento Monte Carlo para computar as taxas de erro tipo I de amostras $n = 100$ com $p = 2$.

Os testes avaliados por Farrell, Barrera e Naczk (2007) para 10.000 procedimentos Monte Carlo, como o teste de Doornik e Hansen (1994) e o teste de Henze e Zilkler (1990), para amostras de tamanho $n = 50$ com $p = 2$, $n = 50$ com $p = 10$ e $n = 200$ com $p = 2$ foram exatos, da mesma forma que os três testes avaliados na Tabela 5. Os testes foram também exatos para amostra de tamanho $n = 200$ com $p = 10$, fato que não ocorre para o teste de Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009), que foi considerado liberal.

Considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de n e p para $\alpha = 1\%$, referente às taxas de erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, situação abordada na Tabela 6, o TMCNMD obteve o controle da taxa de erro tipo I em todas as situações, independente do tamanho da amostra, n , e do número de variáveis, p . Sendo assim as taxas de erro tipo I observadas não foram consideradas significativamente (valor- $p > 0,01$) diferentes do nível nominal de significância e esse teste foi então considerado exato em todas as situações. Vale ressaltar que, conforme pode ser visto nas Tabelas 5 e 6, que o TMCNMD foi exato para todas as situações, não diferindo do nível de significância nominal considerado, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$, respectivamente.

No TNMBP as taxas de erro tipo I observadas foram considerados significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores ao nível de significância nominal de 1% , para os casos em que a amostra foi pequena, $n = 10$ com valores de p iguais a 6 e 8. Para as situações restantes, o teste foi exato com taxas que não diferiram significativamente do nível de significância nominal de 1% .

Tabela 5 Erro tipo *I* dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função de *n* e *p* para $\alpha = 5\%$.

| n | p | 5% | | |
|--------|-----|--------|---------------------|---------------------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0450 | 0,0525 | 0,0535 |
| | 4 | 0,0525 | 0,0430 | 0,0495 |
| | 6 | 0,0515 | 0,0350 ⁻ | 0,0440 |
| | 8 | 0,0510 | 0,0410 | 0,0450 |
| 20 | 2 | 0,0555 | 0,0530 | 0,0460 |
| | 5 | 0,0510 | 0,0430 | 0,0405 |
| | 10 | 0,0550 | 0,0390 | 0,0355 ⁻ |
| | 18 | 0,0505 | 0,0285 ⁻ | 0,0340 ⁻ |
| 50 | 2 | 0,0550 | 0,0420 | 0,0465 |
| | 10 | 0,0505 | 0,0390 | 0,0405 |
| | 25 | 0,0455 | 0,0485 | 0,0475 |
| | 48 | 0,0430 | 0,0395 | 0,0420 |
| 100 | 2 | 0,0435 | 0,0440 | 0,0460 |
| | 10 | 0,0525 | 0,0455 | 0,0470 |
| | 50 | 0,0530 | 0,0380 | 0,0350 ⁻ |
| | 98 | 0,0475 | 0,0440 | 0,0435 |
| 200 | 2 | 0,0455 | 0,0430 | 0,0440 |
| | 10 | 0,0495 | 0,0450 | 0,0455 |
| | 50 | 0,0455 | 0,0400 | 0,0410 |
| | 100 | 0,0455 | 0,0440 | 0,0385 |
| 10.000 | 5 | 0,0418 | 0,0477 | - |

⁺ Taxas de erro tipo *I* superiores ao valor nominal de 5% de significância ($P < 0,01$).

⁻ Taxas de erro tipo *I* inferiores ao valor nominal de 5% de significância ($P < 0,01$).

O TSWNM apresentou-se exato, não diferindo significativamente do nível nominal de 1%, com exceção, o caso em que *p* foi igual a 98, próximo do valor de *n*, com valor igual a 100, em que esse teste foi considerado liberal com uma taxa de erro tipo *I* de 0,0175. Observou-se, portanto, que os novos testes propostos, TMCNMD e o TNMBP, obtiveram um melhor controle da taxa de erro tipo *I* do que o teste proposto por Royston (1983, 1993), na situação em que $n = 100$ com $p = 98$.

Para amostras de tamanho 10.000, casos contemplados nos novos testes

Tabela 6 Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$.

| n | p | 1% | | |
|--------|-----|--------|---------------------|---------------------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0070 | 0,0110 | 0,0125 |
| | 4 | 0,0085 | 0,0065 | 0,0110 |
| | 6 | 0,0100 | 0,0035 ⁻ | 0,0050 |
| | 8 | 0,0110 | 0,0035 ⁻ | 0,0055 |
| 20 | 2 | 0,0115 | 0,0115 | 0,0110 |
| | 5 | 0,0085 | 0,0095 | 0,0080 |
| | 10 | 0,0085 | 0,0060 | 0,0070 |
| | 18 | 0,0085 | 0,0050 | 0,0080 |
| 50 | 2 | 0,0105 | 0,0095 | 0,0110 |
| | 10 | 0,0080 | 0,0065 | 0,0095 |
| | 25 | 0,0085 | 0,0070 | 0,0115 |
| | 48 | 0,0090 | 0,0110 | 0,0165 |
| 100 | 2 | 0,0080 | 0,0105 | 0,0100 |
| | 10 | 0,0095 | 0,0085 | 0,0090 |
| | 50 | 0,0135 | 0,0060 | 0,0095 |
| | 98 | 0,0095 | 0,0090 | 0,0175 ⁺ |
| 200 | 2 | 0,0090 | 0,0085 | 0,0075 |
| | 10 | 0,0115 | 0,0085 | 0,0110 |
| | 50 | 0,0110 | 0,0060 | 0,0085 |
| | 100 | 0,0135 | 0,0070 | 0,0135 |
| 10.000 | 5 | 0,0082 | 0,0091 | - |

⁺ Taxas de erro tipo I superiores ao valor nominal de 1% de significância ($P < 0,01$).

⁻ Taxas de erro tipo I inferiores ao valor nominal de 1% de significância ($P < 0,01$).

propostos, os resultados foram próximos do nível nominal de significância, nos quais, os novos testes propostos apresentaram-se exatos.

Para amostras $n = 100$ com $p = 2$ e $n = 100$ com $p = 10$, os testes de normalidade multivariada avaliados por Cirillo e Ferreira (2003), ou seja, o teste de coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado, o teste de normalidade multivariada de simetria e o teste de normalidade multivariada de curtose, como também, os testes referentes à Tabela 6 e o teste de Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009) foram todos exatos, havendo um excelente controle das

taxas de erro tipo I , quando comparados com o nível de significância nominal α de 1%, pelo teste binomial exato com nível de significância de 1%.

4.1.2 Erro tipo I do novo teste de normalidade multivariado, TNMBP, avaliado nas situações em que ($n \leq p$)

Na segunda parte dos resultados referentes às taxas de erro tipo I , o processo de simulação Monte Carlo foi repetido 2.000 vezes. Foram apresentados os resultados do teste TNMBP quando as amostras eram formadas por realizações de variáveis aleatórias de uma distribuição normal, em que n era menor e igual a p de acordo com as possíveis combinações mostradas na Tabela 3, nos níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$. Os resultados foram confrontados com cada nível de significância nominal α associado, por intermédio do teste binomial exato com nível de significância de 1%.

Na Tabela 7, o TNMBP para tamanhos amostrais $n = 10$ apresentou a maior parte dos resultados das taxas de erro tipo I significativamente (valor- $p < 0,01$) inferiores aos níveis nominais considerados, ou seja, o TNMBP foi conservativo para boa parte dos resultados. Somente as situações $n = 10$ com $p = 10$, tanto para $\alpha = 10\%$ como para $\alpha = 5\%$ que o teste foi considerado exato.

Para tamanho amostral $n = 20$ relativos a $\alpha = 10\%$ e aos números de variáveis $p = 20$ e $p = 25$ o teste foi exato, para os outros casos considerados o teste foi conservativo. Para o mesmo tamanho amostral, porém, para $\alpha = 5\%$ o TNMBP foi conservativo para todas as situações. E para $\alpha = 1\%$ o TNMBP também mostrou-se conservativo, exceto para $p = 50$, em que o teste foi exato.

Para $n = 30$ relativos a todos os valores de p e de α , o TNMBP mostrou-se a maior parte dos resultados das taxas de erro tipo I não significativamente ($p > 0,01$) diferente dos valores nominais, ou seja, exato. Em específico, para cada α ,

ou seja, para $\alpha = 10\%$ o teste só foi conservativo quando $n = 30$ com p iguais a 50 e 75. No caso $\alpha = 5\%$ o teste foi conservativo para $n = 30$ com $p = 75$. Por fim, o $\alpha = 1\%$ o teste foi conservativo somente quando $n = 30$ com $p = 40$.

Para o tamanho amostral $n = 50$, o teste foi considerado exato em boa parte dos números de variáveis adotados. Observou-se maiores evidências do teste ser conservativo para valores de p próximo ou igual a $n = 50$. Por fim, observou-se que as amostras de $n = 100$ relativos a todos os valores de p e dos níveis de significâncias nominais, o TNMBP apresentou-se exato.

De uma maneira mais geral, para as amostras com tamanhos amostrais menores, o TNMBP mostrou-se na maior parte conservativo, principalmente quando p aumentava relativamente ao valor de n . Para tamanhos amostrais maiores, o TNMBP mostrou-se, na maioria das vezes, exato. Não houve caso algum em que o teste apresentou-se liberal.

Procurou-se nos testes de normalidade multivariado existentes na literatura situações nas quais as taxas de erro tipo I pudessem ser comparadas, para as circunstâncias da Tabela 7 ($n \leq p$). Liang, Tang e Chan (2009) haviam proposto uma generalização da estatística do teste de Shapiro-Wilk univariado para testar a normalidade em situações de alta-dimensão e avaliaram as taxas de erro tipo I para amostra de tamanho $n = 26$ com $p = 30$ considerando os níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$. Para cada nível nominal de significância, as taxas de erro tipo I associadas foram dadas respectivamente por: 0,0795, 0,0425 e 0,0070. Não foi contemplado o mesmo tamanho amostral na Tabela 7 para o cálculo da taxa de erro tipo I do TNMBP, mas pôde-se fazer um paralelo com o tamanho amostral mais próximo da situação abordada por Liang, Tang e Chan (2009), por exemplo, no TNMBP para a amostra de tamanho $n = 30$ com $p = 30$, em que se observou para os mesmos níveis nominais de significância valores

dados respectivamente por: 0,0920, 0,0410 e 0,0080. Para todas as taxas de erro tipo *I* computadas, ambos os testes foram considerados exatos.

Liang, Tang e Chan (2009), também usaram mais um tamanho amostral para o cálculo das taxas de erro tipo *I* para o teste proposto, isto é, para $n = p = 26$ e as taxas de erro tipo *I* computadas para os níveis nominais 10%, 5% e 1% foram respectivamente: 0,1060, 0,0450 e 0,0090. Nesse caso, as taxas de erro tipo *I* foram exatas também. Foram usadas 2.000 replicações para o cálculo desses resultados.

Tabela 7 Erro tipo *I* do TNMBP considerando a distribuição normal multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

| n | p | 10% | 5% | 1% |
|-----|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| | | TNMBP | TNMBP | TNMBP |
| 10 | 10 | 0,0895 | 0,0390 | 0,0030 ⁻ |
| | 15 | 0,0770 ⁻ | 0,0275 ⁻ | 0,0030 ⁻ |
| | 20 | 0,0725 ⁻ | 0,0255 ⁻ | 0,0025 ⁻ |
| | 30 | 0,0625 ⁻ | 0,0230 ⁻ | 0,0020 ⁻ |
| 20 | 20 | 0,0980 | 0,0355 ⁻ | 0,0040 ⁻ |
| | 25 | 0,0830 | 0,0350 ⁻ | 0,0045 ⁻ |
| | 30 | 0,0685 ⁻ | 0,0235 ⁻ | 0,0030 ⁻ |
| | 50 | 0,0680 ⁻ | 0,0325 ⁻ | 0,0050 |
| 30 | 30 | 0,0920 | 0,0410 | 0,0080 |
| | 40 | 0,0845 | 0,0420 | 0,0035 ⁻ |
| | 50 | 0,0785 ⁻ | 0,0395 | 0,0065 |
| | 75 | 0,0805 ⁻ | 0,0360 ⁻ | 0,0055 |
| 50 | 50 | 0,0795 ⁻ | 0,0315 ⁻ | 0,0055 |
| | 60 | 0,0855 | 0,0445 | 0,0045 ⁻ |
| | 75 | 0,0835 | 0,0355 ⁻ | 0,0055 |
| | 100 | 0,0895 | 0,0380 | 0,0060 |
| 100 | 100 | 0,0850 | 0,0425 | 0,0065 |
| | 110 | 0,0965 | 0,0490 | 0,0095 |
| | 130 | 0,0885 | 0,0460 | 0,0070 |
| | 150 | 0,1045 | 0,0515 | 0,0080 |

⁺ Taxas de erro tipo *I* superiores ao valor nominal de 10%, 5% ou 1% de significância ($P < 0,01$).

⁻ Taxas de erro tipo *I* inferiores ao valor nominal de 10%, 5% ou 1% de significância ($P < 0,01$).

4.2 Poder dos testes

Essa subseção é composta por duas partes, a primeira em que se compara os três testes de normalidade multivariada, TMCNM, TNMBP e TSWNM, para os casos $n > p$. Na segunda parte, um estudo isolado do comportamento do TNMBP é realizado para o caso $n \leq p$. Para ambas as partes foram consideradas as distribuições não-normais como: a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ e $\nu = 30$, a distribuição log-normal multivariada, a distribuição normal contaminada multivariada e a distribuição uniforme multivariada. Os níveis de significâncias foram os mesmos fixados para as taxas de erro tipo I, isto é, $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

4.2.1 Poder dos testes TMCNM, TNMBP e TSWNM de normalidade multivariados para ($n > p$)

O poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 10\%$ é indicado na Tabela 8. O TMCNMD apresentou os piores valores de poder nas situações em que a amostra era pequena como, por exemplo, para $n = 10$. Para a amostra de tamanho 20 e número de variáveis iguais a 2 e 5, o teste apresentou alto desempenho, mais ainda inferior em relação aos demais testes. O TMCNMD atingiu 100% de desempenho nas situações em que $n = 50$ com valores de p iguais a 2 e 10 e para $n = 100$ com número de variáveis p iguais a 2, 10 e 50. Nas situações em que o tamanho da amostra foi $n = 200$ para todos os números de variáveis realizadas o TMCNMD também atingiu 100% de desempenho.

O TNMBP apresentou os melhores desempenhos em relação aos demais testes para amostras de tamanho 10 e 20, inclusive em relação ao TSWNM. Para

amostras de tamanhos 50, 100 e 200, o TNMBP, assim como o TSWNM apresentou 100% de desempenho. O desempenho do TNMBP foi ótimo para todas as situações apresentadas. O TSWNM apresentou desempenho intermediário para amostras de tamanhos 10 e 20.

Em relação à amostra de tamanho 10.000, o TMCNMD e o TSWNM apresentaram 100% de poder, o que é uma grande vantagem em relação ao teste TSWNM, pois esse é restrito às condições de amostra menores que 5.000.

É conveniente salientar que a *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade é uma distribuição bem diferenciada da normal multivariada. Dessa forma, o TNMBP e o TSWNM tiveram valores elevados de poder, sendo as menores taxas dadas respectivamente por 0,8040 e 0,7690. Esses casos ocorreram quando a amostra e o número de variáveis eram pequenos, $n = 10$ com $p = 2$. Para amostras de tamanho 20, as taxas desses dois testes foram sempre superiores a 95% e quase sempre próximos de 100%. Mesmo sendo o TMCNMD o que apresentou os desempenhos inferiores em relação aos demais, é ainda considerado um teste adequado para a maior parte das situações apresentadas.

Os desempenhos para o poder dos TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição *t-student* multivariada com $\nu = 1$ para $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ são mostrados, respectivamente, nas Tabelas 9 e 10 em função de n e p . O TMCNMD não obteve um desempenho satisfatório para tamanhos de amostras n igual a 10. Notou-se que no TMCNMD para tamanhos de amostras n iguais a 10, 20, 50 e 100 o aumento do número de variáveis fizeram o poder diminuir, chegando a ficar abaixo do nível nominal de significância, em alguns casos. O TMCNMD apresentou bom desempenho para tamanhos grandes de amostras, $n = 200$ independente do número de variáveis (Tabelas 9 e 10).

O TNMBP apresentou melhor desempenho que o TMCNMD nas situações em que $n = 10$ e $n = 20$, para todas as combinações de p consideradas e, inclusive,

Tabela 8 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 10\%$.

| n | p | 10% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,5645 | 0,8040 | 0,7690 |
| | 4 | 0,2530 | 0,8675 | 0,8345 |
| | 6 | 0,1250 | 0,9065 | 0,8790 |
| | 8 | 0,2000 | 0,9380 | 0,9120 |
| 20 | 2 | 0,9060 | 0,9690 | 0,9555 |
| | 5 | 0,8955 | 0,9940 | 0,9900 |
| | 10 | 0,4280 | 0,9975 | 0,9955 |
| | 18 | 0,3580 | 1,0000 | 0,9985 |
| 50 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,9675 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,6370 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,8455 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

o TNMBP mostrou-se melhor que o TSWNM para os mesmos tamanhos amostrais de 10 e 20, com exceção somente dos casos da Tabela 10, $\alpha = 1\%$, para $n = 10$ com $p = 8$ e $n = 20$ com $p = 10$, porém, essas diferenças foram relativamente pequenas chegando a ser desprezíveis.

O TNMBP mostrou-se equivalente ao desempenho do TSWNM para tamanhos de amostras maiores ou iguais a 50, em que os valores de poder desses dois testes atingiram 100%. É importante ressaltar que para a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ para $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$, o novo teste proposto, TNMBP, foi melhor ou igual ao TSWNM. A eficiência dos testes TMCNMD e TNMBP

para tamanhos amostral $n = 10.000$ foram excelentes, atingindo 100% de poder (Tabela 9 e 10).

Tabela 9 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$.

| n | p | 5% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,3930 | 0,7495 | 0,7185 |
| | 4 | 0,1450 | 0,8210 | 0,7945 |
| | 6 | 0,0605 | 0,8690 | 0,8425 |
| | 8 | 0,0970 | 0,9100 | 0,8855 |
| 20 | 2 | 0,8635 | 0,9555 | 0,9375 |
| | 5 | 0,8010 | 0,9905 | 0,9850 |
| | 10 | 0,2705 | 0,9955 | 0,9940 |
| | 18 | 0,2550 | 0,9990 | 0,9980 |
| 50 | 2 | 0,9970 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,9275 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,5250 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,7590 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

As combinações de n e p foram escolhidas para que os resultados fossem comparados com os resultados de Oliveira e Ferreira (2009), quando também escolhida a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade para $\alpha = 5\%$ e 2.000 simulações Monte Carlo para o processo de validação. Observou-se que para todas as circunstâncias em que o tamanho da amostra foi $n = 10$ relativos a todos os valores de p , os testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM foram superiores quanto ao desempenho de poder em relação ao teste quiquadrado de Pearson

multivariado da proposta de Oliveira e Ferreira (2009), como também superiores ao teste conjunto de assimetria e curtose usado pelos autores para comparação do teste proposto.

Para amostras $n = 20$ com todas as combinações de p propostas, o teste quiquadrado de Pearson multivariado apresentou os piores desempenhos em relação aos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, exceto para $p = 10$, em que o desempenho de poder computado esteve um pouco acima do desempenho encontrado no TMCNMD, isto é, com um valor de 0,3000. O teste conjunto de assimetria e curtose também obteve desempenho pior em todas as situações para as mesmas circunstâncias em relação aos testes TNMBP e TSWNM. Para valores de p próximo de n os testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM foram superiores ao teste conjunto de assimetria e curtose.

Para amostras com $n = 50$ e $n = 100$ relativos a todos os valores p , o teste quiquadrado de Pearson multivariado, o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado, o TMCNMD, o TNMBP e o TSWNM, tiveram bom desempenho de poder, quase sempre 100%. As exceções para $n = 50$ com $p = 48$ e $n = 100$ com $p = 98$ considerando o teste quiquadrado de Pearson multivariado, o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado e o TMCNMD.

Para amostra de tamanho $n = 200$ considerando todas as combinações de p , tanto os testes comparados por Oliveira e Ferreira (2009) quanto os TMCNMD, TNMBP e TSWNM obtiveram 100% de desempenho de poder.

Para o teste de normalidade Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009) para amostras $n = 20$ com $p = 2$ e $n = 20$ com $p = 10$, os valores de poder foram respectivamente dados por 0,9601 e 0,9971. Para os mesmos tamanhos de amostras, nota-se que o teste de normalidade Shapiro-Francia supera o desempenho do TNMBP com uma pequena diferença, que é praticamente des-

prezível. Porém, deve-se lembrar que o teste de normalidade Shapiro-Francia foi realizado com 10.000 simulações Monte Carlo para validação do desempenho e o TNMBP somente com 2.000.

Para combinações de n iguais a 100 e 200 com valores de p iguais a 2 e 10, o teste de normalidade Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009) apresenta o mesmo poder que os TMCNMD, TNMBP e TSWNM, de 100%.

Tabela 10 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição t -Student multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p para $\alpha = 1\%$.

| n | p | 1% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,1600 | 0,6255 | 0,6070 |
| | 4 | 0,0245 | 0,7110 | 0,6990 |
| | 6 | 0,0055 | 0,7590 | 0,7495 |
| | 8 | 0,0250 | 0,8165 | 0,8190 |
| 20 | 2 | 0,7430 | 0,9095 | 0,8955 |
| | 5 | 0,5035 | 0,9760 | 0,9715 |
| | 10 | 0,0625 | 0,9890 | 0,9895 |
| | 18 | 0,1070 | 0,9965 | 0,9950 |
| 50 | 2 | 0,9875 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,9985 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,7180 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,2920 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9980 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,4890 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

Na Tabela 11, os desempenhos de poder para os TMCNMD, TNMBP e TSWNM são mostrados considerando a distribuição t -Student multivariada com $\nu = 30$ para $\alpha = 10\%$ em função de n e p tomados. Vale ressaltar que a distri-

buição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ se assemelha a normal multivariada. Em razão disso, verifica-se os desempenhos em poder são quase equiparáveis ao nível nominal para amostras pequenas nos três testes de normalidade multivariada comparados. Lembrando, novamente, que quando os graus de liberdade da distribuição *t-Student* é muito grande, ou seja, $\nu \rightarrow \infty$, essa distribuição tende à normal multivariada, motivo pelo qual os desempenhos de poder ficam bem próximos do nível nominal de significância. A medida que o tamanho da amostra cresce o poder aumenta gradativamente.

O TMCNMD apresentou melhor desempenho em relação aos demais em três situações, duas em que a amostra era pequena com $n = 10$ com número de variáveis p iguais a 4 e 8, embora praticamente desprezível, e a outra quando a amostra era grande $n = 200$ com $p = 10$. O teste mostrou-se intermediário entre o TNMBP e TSWNM nos casos de $n = 50$ com $p = 2$ e $n = 100$ com p iguais a 2 e 10. Nas demais situações, o TMCNMD apresentou menor poder em relação aos outros dois testes comparados. Enquanto os demais testes apresentaram um aumento de poder com o aumento de p , o TMCNMD tem um comportamento diferente. À medida que p aumenta, o poder deste teste aumenta até a um certo ponto e depois decresce. Quanto mais próximo de n fica p , menor é o poder do TMCNMD.

O TNMBP foi o que apresentou o melhor desempenho em quase todas as situações. O TNMBP apresentou menor poder apenas no caso $n = 10$ com $p = 4$. Para $n = 10$ com $p = 8$ e $n = 200$ com $p = 10$, o teste mostrou-se intermediário. Nas demais situações, o teste foi superior em poder em comparação aos testes TMCNMD e TSWNM. Para amostras de tamanho 10.000, situação em que contempla o TMCNMD e o TNMBP, os valores de poder foram de 100%.

O TSWNM não foi melhor em situação alguma, mostrando-se intermediária-

rio ou, então, com o pior desempenho de poder. O teste exibiu pior poder para amostra de $n = 10$ com $p = 8$, $n = 50$ com $p = 2$, $n = 100$ com $p = 2$ e $p = 10$ e $n = 200$ com $p = 2$, $p = 10$ e $p = 50$. Para o restante dos casos, o TSWNM, apresentou-se intermediário. Por outro lado, o desempenho em relação ao poder dos novos testes propostos, TMCNMD e TNMBP, foram excelentes, atingindo os 100% para $n = 10.000$ com $p = 5$ (Tabela 11).

Tabela 11 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 10\%$.

| n | p | 10% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,1030 | 0,1105 | 0,1065 |
| | 4 | 0,1125 | 0,1015 | 0,1030 |
| | 6 | 0,0950 | 0,1215 | 0,1070 |
| | 8 | 0,1030 | 0,0995 | 0,0880 |
| 20 | 2 | 0,1215 | 0,1325 | 0,1220 |
| | 5 | 0,0985 | 0,1380 | 0,1200 |
| | 10 | 0,0940 | 0,1570 | 0,1350 |
| | 18 | 0,1270 | 0,1610 | 0,1405 |
| 50 | 2 | 0,1395 | 0,1630 | 0,1385 |
| | 10 | 0,1465 | 0,2165 | 0,1750 |
| | 25 | 0,0745 | 0,2805 | 0,2180 |
| | 48 | 0,1360 | 0,2965 | 0,2315 |
| 100 | 2 | 0,1765 | 0,2055 | 0,1665 |
| | 10 | 0,2710 | 0,2980 | 0,2265 |
| | 50 | 0,0905 | 0,4215 | 0,3170 |
| | 98 | 0,1280 | 0,4565 | 0,3340 |
| 200 | 2 | 0,2225 | 0,2305 | 0,1865 |
| | 10 | 0,4875 | 0,3975 | 0,3020 |
| | 50 | 0,5395 | 0,5870 | 0,4525 |
| | 100 | 0,1305 | 0,6535 | 0,4910 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

Os desempenhos quanto ao poder para os TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ para $\alpha = 5\%$, são mostrados na Tabela 12, em função de n e p . O TMCNMD mostrou-se melhor

do que o TNMBP e o TSWNM, na situação $n = 200$ com $p = 10$. O TMCNMD, apresentou os mais baixos valores de poder em relação aos outros testes, quando o tamanho da amostra foi de $n = 20$ e $n = 50$, para valores de $p > 2$. O TMCNMD foi melhor do que o TSWNM nas amostras de tamanho $n = 20$, $n = 50$ e $n = 100$, para o número de variáveis $p = 2$.

O TNMBP obteve melhor desempenho em quase todas as situações em relação aos outros testes. O TNMBP só foi considerado com desempenho intermediário, nas situações em que o tamanho da amostra foi pequeno $n = 10$, com número de variáveis: $p = 4$ e $p = 8$. E também na situação em que $n = 200$ e $p = 10$, condição em que o TMCNMD foi considerado melhor. Para os demais casos o TNMBP foi melhor. Para situação em que $n = 200$ com $p = 50$ e $p = 100$, houve uma diferença de mais ou menos 10 pontos percentuais em superioridade do TNMBP para o TSWNM. Na amostra de tamanho $n = 10.000$, caso em que é considerado somente os novos testes propostos, TMCNMD e TNMBP, o desempenho foi excelente (Tabela 12).

O TSWNM apresentou desempenho de poder inferior aos novos testes propostos ou, então, mostrou-se intermediário aos novos testes propostos, sendo o desempenho relativamente baixo para todas as situações contempladas.

Levando a discussão do desempenho de poder para outros testes existentes na literatura de normalidade multivariada, buscou-se comparar os desempenhos de poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM para a *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ e $\alpha = 5\%$, com os testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009), para tanto, foram utilizadas as mesmas dimensões de amostras, com exceção ao caso $n = 10.000$ com $p = 5$ circunstâncias em que os testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) não foram avaliados. Foram consideradas também as 2.000 simulações no processo Monte Carlo para efeitos de comparações entre os testes.

Notou-se que o TMCNMD e TNMBP apresentaram melhores desempenhos de poder que os teste conjunto de simetria e curtose multivariado e o teste quiquadrado de Pearson multivariado para circunstâncias de tamanhos amostrais relativamente pequenos, ou seja, 10 e 20 sem exceções quanto aos números de variáveis consideradas. O TMCNMD apresentou também melhor desempenho quando os tamanhos amostrais foram $n = 50$, $n = 100$ e $n = 200$ em relação ao teste quiquadrado de Pearson multivariado proposto por Oliveira e Ferreira (2009), exceto para $n = 50$ com $p = 25$ e $n = 100, 200$ quando $p = 50$.

Para tamanhos amostrais $n = 50$, $n = 100$ e $n = 200$, o TNMBP foi superior em poder em relação ao teste quiquadrado de Pearson multivariado para todas as combinações de p apresentadas na Tabela 12, exceto em três casos: $n = 100$ com $p = 50$, $n = 200$ com $p = 50$ e $n = 200$ com $p = 100$.

O TNMBP apresentou melhor desempenho de poder que o teste de Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009) para amostras $n = 20$ com $p = 2$, $n = 20$ com $p = 10$ e $n = 100$ com $p = 2$.

Na Tabela 13, são apresentados os valores de poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 1\%$. O padrão do comportamento dos testes quanto ao poder foi similar ao observado para $\alpha = 10\%$ e $\alpha = 5\%$. Não houve um teste que superasse os demais em todas as configurações de n e p consideradas. Para n pequeno, os valores de poder se assemelham ao nível nominal de significância. O TMCNMD em grandes amostras ($n = 200$) apresentam melhor desempenho quando p foi intermediário (10), e seu poder reduziu na medida em que p se aproxima de n , ao contrário dos demais testes. Mesmo para $n = 200$, os valores de poder foram muito pequenos. Para $n = 10.000$, os novos testes apresentaram poder de 100%, mesmo em uma distribuição com grande semelhança em relação à normal multivariada.

Tabela 12 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 5\%$.

| n | p | 5% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0500 | 0,0560 | 0,0515 |
| | 4 | 0,0555 | 0,0510 | 0,0465 |
| | 6 | 0,0470 | 0,0585 | 0,0575 |
| | 8 | 0,0530 | 0,0460 | 0,0455 |
| 20 | 2 | 0,0700 | 0,0765 | 0,0605 |
| | 5 | 0,0555 | 0,0730 | 0,0630 |
| | 10 | 0,0405 | 0,0920 | 0,0795 |
| | 18 | 0,0720 | 0,0850 | 0,0805 |
| 50 | 2 | 0,0840 | 0,0965 | 0,0780 |
| | 10 | 0,0920 | 0,1360 | 0,1020 |
| | 25 | 0,0380 | 0,1750 | 0,1490 |
| | 48 | 0,0780 | 0,1775 | 0,1585 |
| 100 | 2 | 0,1160 | 0,1265 | 0,0995 |
| | 10 | 0,1805 | 0,1990 | 0,1465 |
| | 50 | 0,0460 | 0,2960 | 0,2275 |
| | 98 | 0,0770 | 0,3060 | 0,2535 |
| 200 | 2 | 0,1450 | 0,1575 | 0,1130 |
| | 10 | 0,3730 | 0,2885 | 0,2070 |
| | 50 | 0,4200 | 0,4540 | 0,3480 |
| | 100 | 0,0690 | 0,4940 | 0,3960 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

Os desempenhos de poder para os TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição log-normal multivariada para $\alpha = 10\%$, são mostrados na Tabela 14. O TMCNMD não obteve bom desempenho para tamanhos de amostras n com valores iguais a 10. Para amostra de tamanho 20, o TMCNMD apresentou baixo desempenho com números de variáveis iguais a 10 e 18; para os demais números de variáveis consideradas nesse caso, o teste TMCNMD apresentou poder superior 83,00%. Para amostras de tamanho $n = 50$ com $p = 10$, $n = 100$ com $p = 2$ e $p = 10$ e $n = 200$ relativos a todo valor de p , o teste atingiu o desempenho máximo de 100%. Fica evidenciado a redução de poder deste teste quando p

Tabela 13 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p para $\alpha = 1\%$.

| n | p | 1% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0135 | 0,0100 | 0,0110 |
| | 4 | 0,0125 | 0,0115 | 0,0105 |
| | 6 | 0,0080 | 0,0095 | 0,0120 |
| | 8 | 0,0105 | 0,0015 | 0,0070 |
| 20 | 2 | 0,0160 | 0,0160 | 0,0145 |
| | 5 | 0,0110 | 0,0160 | 0,0125 |
| | 10 | 0,0070 | 0,0185 | 0,0220 |
| | 18 | 0,0190 | 0,0170 | 0,0265 |
| 50 | 2 | 0,0245 | 0,0275 | 0,0210 |
| | 10 | 0,0270 | 0,0415 | 0,0420 |
| | 25 | 0,0045 | 0,0515 | 0,0680 |
| | 48 | 0,0215 | 0,0550 | 0,0730 |
| 100 | 2 | 0,0395 | 0,0405 | 0,0320 |
| | 10 | 0,0685 | 0,0760 | 0,0640 |
| | 50 | 0,0080 | 0,1015 | 0,1115 |
| | 98 | 0,0215 | 0,1080 | 0,1450 |
| 200 | 2 | 0,0470 | 0,0495 | 0,0385 |
| | 10 | 0,1855 | 0,1350 | 0,1005 |
| | 50 | 0,2165 | 0,2140 | 0,2160 |
| | 100 | 0,0110 | 0,2225 | 0,2475 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

aproxima-se de n .

Para o TNMBP, o desempenho foi intermediário entre o TMCNMD e TSWNM para algumas situações. Sendo o desempenho do TNMBP muito próximo do desempenho do TSWNM, ocorrendo o empate para $n = 10$ com $p = 6$ com uma taxa de 99,05% de rejeição da hipótese H_0 . Para tamanhos amostrais iguais ou maiores que 20, o desempenho foi de 100% de rejeição da hipótese H_0 , exceto para $n = 20$ com $p = 2$. Os desempenhos do TSWNM mostraram-se superiores aos demais testes em algumas situações, embora praticamente equivalente ao do TNMBP. Para amostras superiores ou iguais a 20, como verificado para o

TNMBP, o TSWNM obteve poder máximo, exceto com $n = 20$ e $p = 2$.

Para a amostra de 10.000, os desempenhos dos novos testes propostos foram máximos, ou seja, rejeitaram de 100% das vezes a hipótese H_0 .

Tabela 14 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$

| n | p | 10% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,5475 | 0,8525 | 0,8635 |
| | 4 | 0,2630 | 0,9605 | 0,9655 |
| | 6 | 0,1490 | 0,9905 | 0,9905 |
| | 8 | 0,1380 | 0,9975 | 0,9985 |
| 20 | 2 | 0,8395 | 0,9920 | 0,9945 |
| | 5 | 0,8685 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,3855 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 18 | 0,3840 | 1,0000 | 1,0000 |
| 50 | 2 | 0,9915 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,8420 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,7080 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9955 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,9335 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

O poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$, está apresentado na Tabela 15. O TMCNMD apresentou os piores valores de poder nas situações em que a amostra é pequena, casos em que n possui os valores de 10 e 20. O TMCNMD atingiu 100% de desempenho nas situações em que $n = 50$ e $n = 100$ com número de variáveis $p = 10$ e, também, nas situações em que o tamanho da

amostra foi $n = 200$, para todos os números de variáveis consideradas.

O TNMBP foi considerado com uma performance intermediária entre os outros dois testes considerados, nas situações $n = 10$, em que a amostra é pequena. No entanto, essas estimativas dos desempenhos do poder para esse tamanho amostral no TNMBP foram relativamente próximas das estimativas dos desempenhos do poder do TSWNM. Já para tamanhos de amostras maiores que 10, o TNMBP atingiu uma performance máxima de 100% independente do número de variáveis consideradas, exceto $n = 20$ com $p = 2$. O mesmo ocorreu para TSWNM. Para os novos testes, o poder foi de 100% com $n = 10.000$ e $p = 5$.

Os resultados do poder para distribuição log-normal com $\alpha = 5\%$ foram comparados aos dos testes avaliados por Silva (2009) e Oliveira e Ferreira (2009), a única diferença consiste nos valores dos parâmetros adotados por esses autores que fizeram com que a distribuição apresentasse características bem diferenciadas da normal multivariada em relação aos dos parâmetros adotados nesse trabalho. No entanto, para amostras pequenas, 10, nos dois trabalhos observados o teste de normalidade multivariado de Royston (1983, 1993) teve mais rejeição da hipótese H_0 do que as observadas nesse trabalho. Pelos resultados apresentados por Silva (2009), observa-se uma grande concordância entre o desempenho do teste Shapiro-Francia multivariado com o teste TNMBP para $n = 20$ com $p = 2$, $n = 100$ e $n = 200$ com $p = 2$ e $p = 10$.

Para comparações com os testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009), notou-se que para amostras pequenas, por exemplo, $n = 10$, o TNMBP teve melhor desempenho do que o teste quiquadrado de Pearson multivariado e o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado, exceto para $p = 2$. Já o TMCNMD foi melhor que o teste quiquadrado de Pearson multivariado para amostras $n = 10$ com $p = 4$ e $n = 10$ com $p = 6$. Para $n = 10$ com $p = 6$ e $n = 10$ com $p = 8$, o TMCNMD

foi melhor que o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado.

Para tamanhos amostrais com $n = 20$ relativos a todos os tamanhos de p , o TNMBP e o TSWNM superaram em poder para todos os casos o teste qui-quadrado de Pearson multivariado. O TMCNMD foi inferior aos testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) para tamanhos amostrais com $n = 20$ relativos a todos os tamanhos de p , exceto quando $n = 20$ com $p = 18$ para o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado.

Para amostra $n = 50$, $n = 100$ e $n = 200$ relativos a todos os tamanhos p , o teste qui-quadrado de Pearson multivariado obteve os mesmos desempenhos do teste TNMBP e TSWNM. O TMCNMD e o TNMBP foram superiores em desempenho de poder em relação ao teste conjunto de assimetria e curtose multivariado para amostra $n = 50$ com $p = 48$ e $n = 100$ com $p = 98$.

Os desempenhos quanto ao poder para os testes: TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição log-normal multivariada para $\alpha = 1\%$ são mostrados na Tabela 16. O TMCNMD não obteve desempenho satisfatório para tamanhos de amostras n com valores iguais a 10 e 20. Para amostras de tamanho 50 e número de variáveis com valores iguais a 2 e 10, o desempenho foi bom, mas com poder inferior ao dos outros testes nessa mesma situação. Já considerando esse mesmo tamanho de amostra com o número de variáveis iguais a 25 e 48 o poder do TMCNMD reduz. Para amostras de tamanho $n = 100$, o teste apresentou bom desempenho para $p = 10$, atingindo a performance máxima de 100%. Quando o número de variáveis aumenta, por exemplo, para $p = 98$ considerando ainda a amostra de tamanho 100, o desempenho teve uma queda atingindo 67,75%. Os desempenhos foram ótimos para todo p e $n = 200$, com 100% de rejeição da hipótese H_0 .

Em relação ao TNMBP e ao TSWNM, destaca-se que o comportamento foi semelhante ao já detalhado para $\alpha = 10\%$ e $\alpha = 5\%$. O que se observa é uma

Tabela 15 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$.

| n | p | 5% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,4010 | 0,7865 | 0,8050 |
| | 4 | 0,1480 | 0,9240 | 0,9400 |
| | 6 | 0,0740 | 0,9745 | 0,9815 |
| | 8 | 0,0610 | 0,9940 | 0,9945 |
| 20 | 2 | 0,7705 | 0,9875 | 0,9900 |
| | 5 | 0,7650 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,2315 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 18 | 0,2845 | 1,0000 | 1,0000 |
| 50 | 2 | 0,9810 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,6915 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,5995 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9800 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,8760 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

redução do poder, como esperado pela redução de α .

Os desempenhos de poder para os TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição normal contaminada multivariada para $\alpha = 10\%$ são mostrados na Tabela 17 em função de n e p . O TMCNMD não obteve um desempenho satisfatório para tamanhos de amostras n com valores iguais a 10 e 20. Para tamanho de amostras iguais a $n = 50$, o teste mostrou-se melhor quando o número de variáveis foi igual a $p = 25$; para os demais valores de variáveis o teste mostrou com baixo desempenho. Para amostras de tamanho $n = 100$, o teste foi melhor para número de variáveis maiores ou iguais a $p = 10$, apresentando 72,55% de

Tabela 16 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$.

| n | p | 1% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,1495 | 0,6015 | 0,6335 |
| | 4 | 0,0265 | 0,8190 | 0,8455 |
| | 6 | 0,0050 | 0,9220 | 0,9490 |
| | 8 | 0,0095 | 0,9655 | 0,9790 |
| 20 | 2 | 0,6005 | 0,9585 | 0,9715 |
| | 5 | 0,4115 | 0,9990 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0480 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 18 | 0,1090 | 1,0000 | 1,0000 |
| 50 | 2 | 0,9260 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,9890 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,3360 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,3850 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,9990 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,8420 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,6775 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

desempenho para $p = 10$, 87, 55% para $p = 98$ e 100% para $p = 50$. Para amostras de tamanho $n = 200$, o TMCNMD apresentou menor poder em relação aos demais testes com o número de variáveis iguais a 2 e 10; já para o número de variáveis iguais a 50 e 100, o teste mostrou excelente desempenho.

O teste TNMBP, assim como o TMCNMD e TSWNM, apresentou baixo desempenho para amostras de tamanho $n = 10$, embora o TNMBP e o TSWNM apresentaram valores de poder bem superiores ao TMCNMD. Para amostras de tamanho $n = 20$, houve melhoras quanto ao desempenho, mas ainda o seu desempenho não superou o TSWNM. No entanto, mostrou-se superior ao TMCNMD.

Tabela 17 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$.

| n | p | 10% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,2475 | 0,3385 | 0,4380 |
| | 4 | 0,1770 | 0,3770 | 0,5000 |
| | 6 | 0,1220 | 0,4010 | 0,5315 |
| | 8 | 0,1260 | 0,4235 | 0,5560 |
| 20 | 2 | 0,2905 | 0,6720 | 0,8070 |
| | 5 | 0,2515 | 0,7925 | 0,8945 |
| | 10 | 0,2685 | 0,8575 | 0,9395 |
| | 18 | 0,3805 | 0,8765 | 0,9560 |
| 50 | 2 | 0,3930 | 0,9945 | 0,9975 |
| | 10 | 0,4435 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 0,9990 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,6730 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,5125 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,7255 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,8755 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 0,7365 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,9675 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

Para amostras de tamanho $n = 50$ com $p = 2$ o TNMBP e o TSWNM ficaram bem próximos de alcançar o desempenho máximo. Para o número de variáveis superior a 2 relativos a amostra de tamanho 50, os desempenhos foram máximos nos TNMBP e TSWNM. Para amostras de tamanho 100 e 200 o desempenho obtido no teste TNMBP foi máximo, mostrando excelente.

O teste de TSWNM mostrou-se melhor do que os novos testes propostos nas situações em que as amostras são pequenas, por exemplo, $n = 10$ e $n = 20$. Para as demais situações o TSWNM e o novo teste, TNMBP, atingiram a performance máxima, com exceção de $n = 50$ com $p = 2$. Para amostras de tamanho

10.000 tanto o TMCNMD quanto o TNMBP apresentaram 100% de desempenho de poder.

Na Tabela 18, apresentam-se os desempenhos dos dois testes propostos, TMCNMD e TNMBP, em comparação ao do TSWNM proposto por Royston (1983, 1993). Foi considerada a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para o nível de significância de $\alpha = 5\%$. O padrão de resposta quanto ao desempenho relativo ao poder foi similar ao obtido para $\alpha = 10\%$. Na Tabela 19, estão apresentados os resultados para $\alpha = 1\%$. Novamente o padrão de resposta foi o mesmo, exceto pelo fato de haver uma redução no poder com a redução de α .

Os três testes comparados entre si, de forma geral, não apresentaram desempenho satisfatório para amostras pequenas. A partir de amostras maiores ou iguais a 50, os testes TNMBP e TSWNM foram melhores quanto a detecção de não normalidade dos dados. No caso em que foi contemplado o tamanho amostral 10.000 para os testes TNMDC e TNMBP, o desempenho foi excelente, atingindo os 100% tanto para $\alpha = 5\%$ quanto para $\alpha = 1\%$.

Considerando $\alpha = 5\%$ e os mesmos valores paramétricos da normal contaminada multivariada adotados nesse trabalho e por Oliveira e Ferreira (2009), verifica-se que o TMCNMD apresentou melhor desempenho de poder para amostras $n = 10$ e $n = 20$ (Tabela 18) em relação ao teste conjunto de simetria e curtose multivariado. O TMCNMD apresentou melhor desempenho de poder para amostras $n = 10$ e $n = 20$ em relação ao teste quiquadrado de Pearson multivariado da proposta de Oliveira e Ferreira (2009), exceto para $p = 8$ e $p = 18$.

Para tamanhos amostrais $n = 50$ e $n = 100$, o TMCNMD superou tanto o teste quiquadrado de Pearson multivariado quanto o teste conjunto de simetria e curtose multivariado, exceto para valores pequenos de p relativos a n , como 2 e 10. Para $n = 200$, o TMCNMD apresentou menor poder que os teste quiquadrado de

Tabela 18 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$.

| n | p | 5% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,1490 | 0,1755 | 0,2785 |
| | 4 | 0,0880 | 0,1750 | 0,3195 |
| | 6 | 0,0655 | 0,1735 | 0,3285 |
| | 8 | 0,0500 | 0,2025 | 0,3640 |
| 20 | 2 | 0,1985 | 0,4405 | 0,6650 |
| | 5 | 0,1325 | 0,5705 | 0,7990 |
| | 10 | 0,1455 | 0,6270 | 0,8640 |
| | 18 | 0,2640 | 0,6580 | 0,8925 |
| 50 | 2 | 0,2640 | 0,9785 | 0,9940 |
| | 10 | 0,2670 | 0,9980 | 1,0000 |
| | 25 | 0,9975 | 0,9995 | 1,0000 |
| | 48 | 0,5240 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,3495 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,4765 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,7725 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 0,5310 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,8570 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

Pearson multivariado e o teste conjunto de simetria e curtose multivariado quando o número de variáveis foram $p = 2$ e $p = 10$. Para número de variáveis superior ou igual a 50, os valores de poder dos testes avaliados por Oliveira e Ferreira (2009) e os do presente trabalho (Tabela 18) foram de 100%, considerando o tamanho amostral de $n = 200$.

O TNMBP superou os testes quiquadrado de Pearson multivariado e o conjunto de simetria e curtose multivariado em quase todas as situações. Os casos, em que o TNMBP não apresentou desempenho superior, são aqueles em que os valores de poder atingiram 100%.

Tabela 19 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$.

| n | p | 1% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TNMDMC | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0415 | 0,0260 | 0,0590 |
| | 4 | 0,0140 | 0,0210 | 0,0580 |
| | 6 | 0,0095 | 0,0300 | 0,0675 |
| | 8 | 0,0070 | 0,0295 | 0,0835 |
| 20 | 2 | 0,0955 | 0,0720 | 0,2880 |
| | 5 | 0,0195 | 0,0930 | 0,4725 |
| | 10 | 0,0265 | 0,0975 | 0,5705 |
| | 18 | 0,0905 | 0,0910 | 0,6330 |
| 50 | 2 | 0,0980 | 0,7875 | 0,9565 |
| | 10 | 0,0545 | 0,9570 | 0,9980 |
| | 25 | 0,9830 | 0,9725 | 0,9995 |
| | 48 | 0,2380 | 0,9780 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,1390 | 0,9995 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0940 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,3965 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 0,1990 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,2850 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

A Tabela 20 representa os valores de poder dos novos testes, TMCNMD e TNMBP; e do TSWNM, para a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para o nível de significância de $\alpha = 10\%$. De maneira geral, o TMCNMD apresentou pior desempenho que os outros dois concorrentes, seu desempenho foi muito insatisfatório para $n \leq 50$. Com $n = 100$ ou com $n = 200$ e $p = 10$, valores no mínimo “estranhos” foram observados para o poder deste teste.

O TNMBP apresentou desempenho intermediário entre os testes comparados nas situações de tamanhos amostrais menores $n \leq 20$. A partir de amostras de tamanho $n = 50$ com $p = 25$, o teste atingiu 100% de desempenho, assim como

o TSWNM. Para amostras pequenas ($n = 10$), os três testes apresentaram baixos valores de poder. Os desempenhos dos novos testes desenvolvidos obtiveram resultados máximos para o tamanho amostral 10.000.

Tabela 20 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 10\%$.

| n | p | 10% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,1555 | 0,1130 | 0,1860 |
| | 4 | 0,1295 | 0,1270 | 0,2400 |
| | 6 | 0,0940 | 0,1380 | 0,2800 |
| | 8 | 0,0885 | 0,1270 | 0,2790 |
| 20 | 2 | 0,2215 | 0,2215 | 0,4450 |
| | 5 | 0,1420 | 0,3140 | 0,6715 |
| | 10 | 0,0980 | 0,4550 | 0,8605 |
| | 18 | 0,1370 | 0,5740 | 0,9405 |
| 50 | 2 | 0,4905 | 0,8565 | 0,9710 |
| | 10 | 0,0905 | 0,9995 | 1,0000 |
| | 25 | 0,2710 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,2395 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,7655 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0850 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9455 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,3750 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 0,9840 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,1505 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9995 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

Nas Tabelas 21 e 22 são apresentados os resultados de poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$, respectivamente. Resultados semelhantes aos discutidos para $\alpha = 10\%$ foram observados em relação ao desempenho dos três testes quanto ao poder. O que deve ser destacado é que o desempenho do TSWNM em relação aos demais para amostras pequenas $n \leq 20$, foi bem

superior ao que já havia sido observado para a distribuição normal contaminada.

Tabela 21 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 5\%$

| n | p | 5% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0865 | 0,0500 | 0,0970 |
| | 4 | 0,0760 | 0,0545 | 0,1275 |
| | 6 | 0,0510 | 0,0545 | 0,1515 |
| | 8 | 0,0395 | 0,0455 | 0,1505 |
| 20 | 2 | 0,1335 | 0,1060 | 0,2740 |
| | 5 | 0,0780 | 0,1545 | 0,4935 |
| | 10 | 0,0530 | 0,2580 | 0,7485 |
| | 18 | 0,0765 | 0,3445 | 0,8840 |
| 50 | 2 | 0,2870 | 0,7100 | 0,9295 |
| | 10 | 0,0425 | 0,9990 | 1,0000 |
| | 25 | 0,1765 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,1740 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,5655 | 0,9995 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0385 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9180 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,2990 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 0,9085 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0620 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9965 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

O TMCNMD apresentou melhor desempenho que o teste quiquadrado de Pearson multivariado proposto por Oliveira e Ferreira (2009) e o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado, também avaliado pelos mesmos autores para amostras com tamanhos amostrais $n = 10$ e $n = 20$ referente a todos os números de variáveis apresentados na Tabela 21. Para tamanhos amostrais $n = 50$ e $n = 100$, relativos a todos os números de variáveis, o TMCNMD apresentou melhor desempenho que o teste quiquadrado de Pearson multivariado, exceto para o número de variáveis iguais a 2 e a 10. Para amostras $n = 100$, o TMCNMD foi melhor em

todas as situações relativas a todos os números de variáveis em comparação com o teste conjunto de assimetria e curtose multivariado.

Observou-se que os valores de poder do TMCNMD bem como dos testes quiquadrado multivariado e conjunto de de assimetria e curtose multivariado, apresentaram uma queda quando $p = 10$, para todos os tamanhos amostrais apresentados na Tabela 21.

O TNMBP e TSWNM superaram os valores de poder para todas as situações do teste quiquadrado multivariado e do teste conjunto de assimetria e curtose multivariado, exceto para amostra $n = 200$ com $p = 100$, em que os quatro testes atingiram 100% de poder.

O TNMBP superou o poder, para amostra $n = 100$ com $p = 2$, do teste baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil, do teste de simetria multivariado e do teste de curtose multivariado, que foram avaliados por Cirillo e Ferreira (2003).

Como considerações importantes, observa-se que para todas as distribuições não-normais consideradas, o poder do TMCNMD foi muito pequeno para amostras pequenas ($n \leq 20$). Para amostras maiores, o desempenho para distribuição assimétrica (lognormal) foi o mesmo observado para distribuição de cauda pesada (*t-Student* com $\nu = 1$ gl), isto é, o poder decrescia à medida que o número de variáveis aumentava e tornava-se próximo do tamanho amostral. Com o aumento do tamanho da amostra o poder do teste proposto estabilizou-se, em geral, em 100%. Para distribuições com cauda muito pesadas, como o caso da uniforme, baixos valores de poder foram observados em geral.

O comportamento do TNMBP e do TSWNM foram semelhantes para as distribuições não-normais comparadas. Observou-se para esses testes um excelente desempenho em relação ao poder para distribuições assimétrica à direita (lognormal) e de cauda pesada e simétrica (*t-Student* com $\nu = 1$ gl). Para a uniforme,

Tabela 22 Poder dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p para $\alpha = 1\%$.

| n | p | 1% | | |
|--------|-----|--------|--------|--------|
| | | TMCNMD | TNMBP | TSWNM |
| 10 | 2 | 0,0210 | 0,0060 | 0,0145 |
| | 4 | 0,0170 | 0,0055 | 0,0220 |
| | 6 | 0,0120 | 0,0085 | 0,0280 |
| | 8 | 0,0075 | 0,0050 | 0,0290 |
| 20 | 2 | 0,0320 | 0,0135 | 0,0660 |
| | 5 | 0,0200 | 0,0145 | 0,1865 |
| | 10 | 0,0095 | 0,0375 | 0,4280 |
| | 18 | 0,0165 | 0,0410 | 0,6645 |
| 50 | 2 | 0,0665 | 0,2930 | 0,7025 |
| | 10 | 0,0075 | 0,9690 | 0,9995 |
| | 25 | 0,0560 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 48 | 0,0745 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 0,1355 | 0,9790 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0045 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,7975 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 98 | 0,1855 | 1,0000 | 1,0000 |
| 200 | 2 | 0,3915 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 10 | 0,0060 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 0,9865 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10.000 | 5 | 1,0000 | 1,0000 | - |

de cauda muito pesada e simétrica, o TNMBP e o TSWNM tiveram menor poder em amostras pequenas e um excelente desempenho em amostras de tamanhos maiores ou iguais a 50. Esse mesmo padrão de resposta para os dois testes foram observados para a normal contaminada. Para o caso da *t-Student* com $\nu = 30$, tanto o TMCNMD quanto os testes TNMBP e TSWNM obtiveram valores pequenos de poder. Porém, para $n \geq 30$, o TMCNMD e o TNMBP mostrou ter, em muitas configurações em relação a p , melhor desempenho do que o TSWNM.

4.2.2 Poder do novo teste de normalidade multivariado, TNMBP, avaliado nas situações em que ($n \leq p$)

Nessa segunda parte, são apresentados os resultados para o poder do teste TNMBP quando as amostras foram formadas por realizações de variáveis aleatórias com n menor que p . Isso é uma grande vantagem desse teste em relação aos demais, decorrendo da sua definição não depender da inversa da matriz de covariância amostral S . Isto significa que a matriz de covariância dos dados ou dos resíduos, para os quais se pretende testar a normalidade multivariada, não tem necessidade de ser não-singular. Entre outras vantagens reitera-se que esse teste não tem limitação em relação ao tamanho amostral.

Assim, o processo de simulação Monte Carlo foi repetido 2.000 vezes para avaliar o desempenho de poder do novo teste proposto, TNMBP, para casos que contemplam o tamanho amostral menor que o número de variáveis. Os resultados foram apresentados nas Tabelas 23 a 27 para as distribuições não-normais mencionadas na subseção 4.2, em função das combinações de n e p , para $n \leq p$ mostrados na Tabela 3, considerando níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

Na Tabela 23 são apresentados os valores do poder do TNMBP considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$. Para $n = 10$, observou-se que o desempenho do teste foi excelente, pois o menor valor apresentado foi de 80,05%. De maneira geral, observou-se que à medida que o nível nominal de significância diminui, o desempenho também sofre uma queda no poder, como esperado pela teoria.

Para amostra $n \geq 20$ (Tabela 23), verifica-se que a maioria dos resultados de poder foram iguais ou praticamente iguais a 100%. Comparações com os valores de poder desse teste em situações em que $n < p$, para a *t-Student* multivariada

Tabela 23 Poder do TNMBP considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

| n | p | 10% | 5% | 1% |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| | | TNMBP | TNMBP | TNMBP |
| 10 | 10 | 0,9275 | 0,8970 | 0,8005 |
| | 15 | 0,9440 | 0,9180 | 0,8235 |
| | 20 | 0,9570 | 0,9300 | 0,8440 |
| | 30 | 0,9600 | 0,9380 | 0,8685 |
| 20 | 20 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9980 |
| | 25 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9975 |
| | 30 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9980 |
| | 50 | 1,0000 | 0,9995 | 0,9980 |
| 30 | 30 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9995 |
| | 40 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 75 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 50 | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 60 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 75 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 110 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 130 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 150 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

com $\nu = 1$ grau de liberdade (Tabelas 8, 9 e 10), permite que se conclua que o desempenho é melhor quando $n \leq p$, surpreendentemente.

Na Tabela 24, são mostrados os resultados do desempenho de poder do TNMBP considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

Observa-se novamente na Tabela 24, assim como ocorreram nas tabelas 11, 12 e 13, nas quais foram discutidas o poder dos três testes de normalidade multivariada para a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade, que os desempenhos de poder são quase equiparáveis aos níveis nominais

Tabela 24 Poder do TNMBP considerando a distribuição *t-Student* multivariada com $\nu = 30$ graus de liberdade em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

| n | p | 10% | 5% | 1% |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| | | TNMBP | TNMBP | TNMBP |
| 10 | 10 | 0,1075 | 0,0535 | 0,0100 |
| | 15 | 0,0990 | 0,0470 | 0,0035 |
| | 20 | 0,1100 | 0,0510 | 0,0040 |
| | 30 | 0,0955 | 0,0370 | 0,0025 |
| 20 | 20 | 0,1605 | 0,0855 | 0,0215 |
| | 25 | 0,1660 | 0,0870 | 0,0135 |
| | 30 | 0,1715 | 0,0920 | 0,0205 |
| | 50 | 0,1790 | 0,0935 | 0,0195 |
| 30 | 30 | 0,2175 | 0,1215 | 0,0295 |
| | 40 | 0,2195 | 0,1220 | 0,0265 |
| | 50 | 0,2065 | 0,1135 | 0,0295 |
| | 75 | 0,2250 | 0,1330 | 0,0290 |
| 50 | 50 | 0,2905 | 0,1745 | 0,0535 |
| | 60 | 0,2905 | 0,1915 | 0,0525 |
| | 75 | 0,3085 | 0,1840 | 0,0510 |
| | 100 | 0,3175 | 0,1950 | 0,0540 |
| 100 | 100 | 0,4690 | 0,3080 | 0,1070 |
| | 110 | 0,4655 | 0,3190 | 0,1090 |
| | 130 | 0,4715 | 0,3285 | 0,1165 |
| | 150 | 0,4900 | 0,3345 | 0,1110 |

de significância para amostras pequenas. E à proporção que o tamanho da amostra aumenta existe um crescimento no poder. O fato da distribuição *t-Student* com $\nu = 30$ tender à distribuição normal multivariada, tem como consequência que o desempenho em relação ao poder é pior.

De forma geral, o desempenho de poder na Tabela 24 é bem baixo e quando se diminui o nível de significância o desempenho do poder também tem uma queda. Não houve desempenho algum de poder para quaisquer uma das combinações de n e p maior que 50% nas 2.000 simulações Monte Carlo realizadas. Da mesma forma que observado para *t-Student* multivariada com $\nu = 1$ grau de liberdade, ocorreu quase sempre um melhor desempenho quando $n \leq p$ se comparado

ao desempenho das situações em que $n > p$ (Tabelas 11, 12 e 13).

Na Tabela 25, é apresentado o poder do TNMBP considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p , com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$. O desempenho foi de quase 100% para todos os casos das combinações de n , p e níveis de significância adotados. Os casos em que esses desempenhos não alcançaram a totalidade, estiveram bem próximos de alcançar. Portanto, o TNMBP obteve bastante sucesso na rejeição da hipótese H_0 falsa e é excelente para testar a normalidade multivariada nas situações em que o tamanho amostral é menor do que o número de variáveis. Novamente, o desempenho é melhor para $n \leq p$ quando comparado com os casos $n > p$ (Tabelas 14, 15 e 16).

Tabela 25 Poder do TNMBP considerando a distribuição log-normal multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

| n | p | 10% | 5% | 1% |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| | | TNMBP | TNMBP | TNMBP |
| 10 | 10 | 0,9985 | 0,9970 | 0,9840 |
| | 15 | 1,0000 | 0,9995 | 0,9975 |
| | 20 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9990 |
| | 30 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 20 | 20 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 25 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 30 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 30 | 30 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 40 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 75 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 50 | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 60 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 75 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 110 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 130 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 150 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Na Tabela 26, é apresentado o poder do TNMBP considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p , com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$. Para tamanhos amostrais $n = 10$ referentes a todos os valores de p e α , o desempenho não foi tão satisfatório, isto é, o poder foi baixo.

Tabela 26 Poder do TNMBP considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

| n | p | 10% | 5% | 1% |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| | | TNMBP | TNMBP | TNMBP |
| 10 | 10 | 0,4290 | 0,1780 | 0,0260 |
| | 15 | 0,4450 | 0,1970 | 0,0300 |
| | 20 | 0,4270 | 0,1775 | 0,0240 |
| | 30 | 0,4500 | 0,1865 | 0,0275 |
| 20 | 20 | 0,8840 | 0,6800 | 0,1030 |
| | 25 | 0,8850 | 0,6650 | 0,0970 |
| | 30 | 0,8875 | 0,6565 | 0,0925 |
| | 50 | 0,8915 | 0,6855 | 0,0995 |
| 30 | 30 | 0,9915 | 0,9430 | 0,4705 |
| | 40 | 0,9920 | 0,9475 | 0,4780 |
| | 50 | 0,9935 | 0,9575 | 0,4460 |
| | 75 | 0,9940 | 0,9555 | 0,4650 |
| 50 | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9760 |
| | 60 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9730 |
| | 75 | 1,0000 | 0,9985 | 0,9715 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9790 |
| 100 | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 110 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 130 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 150 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Para tamanhos amostrais $n = 20$ e $\alpha = 10\%$ observou-se que o desempenho teve aproximadamente o dobro de desempenho de poder comparado aos tamanhos amostrais com $n = 10$ e $\alpha = 10\%$. Para tamanhos amostrais $n = 20$ e $\alpha = 5\%$, observou-se que o desempenho teve mais do que o triplo de aumento do desempenho de poder comparado aos tamanhos amostrais com $n = 10$ e $\alpha = 5\%$.

Já para os tamanhos amostrais $n = 20$ e $\alpha = 1\%$, observou-se que os desempenhos do TNMBP tiveram um acréscimo em comparação aos tamanhos amostrais com $n = 10$ e $\alpha = 1\%$, porém, o poder foi muito baixo.

Para tamanhos amostrais $n = 30$ e $\alpha = 10\%$, foi observado que a performance do TNMBP foi ótima e todos os valores de poder estiveram acima de 99%. Para tamanhos amostrais $n = 30$ e $\alpha = 5\%$, observou-se também um desempenho excelente do poder, estando entre 94,00% e 96,00%. Já para $n = 30$ e $\alpha = 1\%$, o desempenho teve uma queda em comparação aos demais valores de $\alpha = 10\%$ e 5%, para o mesmo tamanho amostral 30 comparado.

Para tamanhos amostrais $n = 50$ e $\alpha = 10\%$, o TNMBP teve um poder de 100% referente a todos os valores de p . Para tamanhos amostrais $n = 50$ e $\alpha = 5\%$, o TNMBP só não atingiu a totalidade de rejeição da hipótese H_0 para o caso $p = 75$, com 99,85%. Para tamanhos amostrais $n = 50$ e $\alpha = 1\%$ o TNMBP ficou acima ou igual a 97,15%.

Para tamanhos amostrais $n = 100$, referente a todos os valores de p para $\alpha = 10\%$, 5% e 1%, o TNMBP teve um poder de 100%. Novamente, observa-se que os valores de poder, quase sempre foram maiores nos casos em que $n \leq p$ (Tabela 26) quando comparados com as das situações de $n > p$ (Tabelas 17, 18 e 19).

O poder do TNMBP considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$ são apresentados na Tabela 27. Para amostras pequenas de tamanho $n = 10$ para os três valores de α e os números de variáveis p consideradas, o desempenho foi ruim. Uma melhoria no desempenho é observada quando se tem amostras de tamanho $n = 20$ para os três valores de α , mas, ainda assim, boa parte dos resultados mostraram-se com baixos valores de poder, sendo o maior valor observado para esse tamanho amostral foi ao nível de significância, $\alpha = 10\%$ e $p = 50$, com

73, 95%.

Tabela 27 Poder do TNMBP considerando a distribuição uniforme multivariada em função de n e p com níveis de significância $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$.

| n | p | 10% | 5% | 1% |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| | | TNMBP | TNMBP | TNMBP |
| 10 | 10 | 0,1475 | 0,0535 | 0,0090 |
| | 15 | 0,1405 | 0,0535 | 0,0030 |
| | 20 | 0,1565 | 0,0595 | 0,0065 |
| | 30 | 0,1305 | 0,0490 | 0,0050 |
| 20 | 20 | 0,5735 | 0,3460 | 0,0415 |
| | 25 | 0,6315 | 0,3935 | 0,0445 |
| | 30 | 0,6475 | 0,4180 | 0,0530 |
| | 50 | 0,7395 | 0,5025 | 0,0620 |
| 30 | 30 | 0,9815 | 0,9370 | 0,5915 |
| | 40 | 0,9920 | 0,9730 | 0,6785 |
| | 50 | 0,9980 | 0,9840 | 0,7190 |
| | 75 | 0,9995 | 0,9965 | 0,7810 |
| 50 | 50 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 60 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 75 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 100 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 110 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 130 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | 150 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Para tamanhos amostrais $n = 30$ e $\alpha = 10\%$ foi observado que o desempenho do TNMBP foi ótimo e todos os valores de poder estiveram acima de 98, 00%. Para tamanhos amostrais $n = 30$ e $\alpha = 5\%$ observou-se também um desempenho excelente do poder, estando entre 93, 70% e 99, 65%. Já para $n = 30$ e $\alpha = 1\%$ o desempenho foi melhor para $p = 50$, com 71, 90% e para $p = 75$, com 78, 10%.

Verificou-se que para $n = 50$ e $n = 100$, considerando todos os valores de p e α , que o TNMBP apresentou 100% de poder. Os desempenhos, como nas demais distribuições, para $n \leq p$ foram melhores do que os de $n > p$ (Tabelas 20, 21 e 22).

4.3 Exemplo

Para o conjunto de dados, foram estimados o vetor de médias e a matriz de covariâncias amostrais, dados por

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 15,035 \\ 20,950 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 0,8824 & 2,8492 \\ 2,8492 & 37,8395 \end{bmatrix}.$$

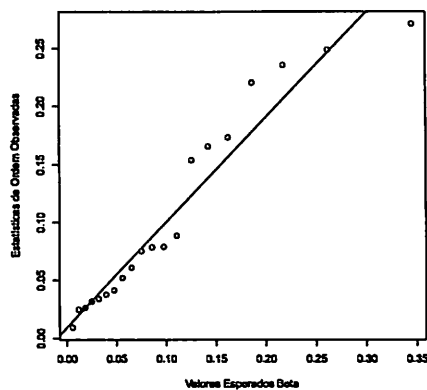
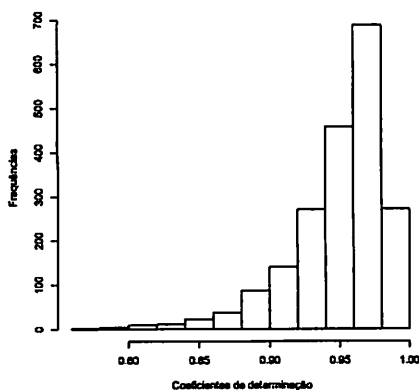
Com esses resultados, as distâncias de Mahalanobis cada observação para a média amostral foram computadas e estão apresentadas na Tabela 28. No caso do TMCNMD, tem-se $p = 2$ e $n = 20$, então $a = 0$, $b = 0,4412$, $\alpha = 1$ e $\beta = 8,5$. Assim, foram obtidas as estatísticas de ordem observadas da distribuição beta $b_{(j)}$ e os seus respectivos valores esperados b_j^* (Tabela 28). O coeficiente de determinação entre $b_{(j)}$ e b_j^* é $r_c^2 = 0,9384$.

A distribuição nula de r_c^2 foi obtida por simulação Monte Carlo, em um total de 2.000 repetições. O valor- p foi computado, confrontando os valores da distribuição nula Figura 1a e o valor original, resultando em 0,2854. Assim, não se tem evidências significativas ao nível nominal de significância para rejeitar a hipótese de normalidade dos dados. O Q-Q plot originário dos quantis esperados da beta contra os quantis observados está apresentado na Figura 1b. Observa-se que os pontos dos quantis observados e esperados da distribuição beta se situam de forma razoável sobre uma reta de mínimos quadrados ajustada entre eles, cujo coeficiente de determinação é 0,9384, indicando que os dados possam ter sido originários de uma normal bivariada.

No caso do TNMBP, o cálculo dos coeficientes de determinação obtidos entre as estatísticas de ordem de cada coluna da amostra e o estimador do valor esperado $m_j = \Phi^{-1}(p_j)$, foram respectivamente: $r_1^2 = 0,9645$ e $r_2^2 = 0,9796$. A média entre r_1^2 e r_2^2 , ou seja, a estatística do teste calculada foi dada por H_c

Tabela 28 Valores ordenados das distâncias de Mahalanobis $D^2_{(j)}$ de cada observação para a média amostral, estatísticas de ordem observados relativos a transformação para uma beta $b_{(j)}$ e valores esperados da beta correspondentes a cada estatística de ordem b^*_j .

| j | $D^2_{(j)}$ | $b_{(j)}$ | b^*_j |
|-----|-------------|-----------|---------|
| 1 | 0,1648 | 0,00913 | 0,00585 |
| 2 | 0,4407 | 0,02441 | 0,01197 |
| 3 | 0,4696 | 0,02602 | 0,01839 |
| 4 | 0,5691 | 0,03153 | 0,02513 |
| 5 | 0,6090 | 0,03374 | 0,03225 |
| 6 | 0,6759 | 0,03745 | 0,03979 |
| 7 | 0,7433 | 0,04118 | 0,04779 |
| 8 | 0,9359 | 0,05185 | 0,05634 |
| 9 | 1,0937 | 0,06059 | 0,06550 |
| 10 | 1,3547 | 0,07505 | 0,07540 |
| 11 | 1,4138 | 0,07833 | 0,08616 |
| 12 | 1,4220 | 0,07878 | 0,09796 |
| 13 | 1,5961 | 0,08842 | 0,11105 |
| 14 | 2,7746 | 0,15371 | 0,12577 |
| 15 | 2,9859 | 0,16542 | 0,14262 |
| 16 | 3,1270 | 0,17324 | 0,16239 |
| 17 | 3,9787 | 0,22043 | 0,18644 |
| 18 | 4,2516 | 0,23554 | 0,21741 |
| 19 | 4,4920 | 0,24886 | 0,26174 |
| 20 | 4,9019 | 0,27157 | 0,34567 |



(a) histograma

(b) Q-Q plot

Figura 1 Histograma da distribuição nula dos coeficientes de determinação gerados sob a hipótese nula de distribuição bivariada (a) e Q-Q plot obtido entre os quantis observados e esperados da distribuição beta para os dados dos pintores de carros.

= 0,9720. O valor- p foi computado por meio de 2.000 replicações do processo de *bootstrap* paramétrico, obtendo o valor 0,8326, e novamente não se tem evidências significativas ao nível nominal de significância para rejeitar a hipótese de normalidade dos dados.

Da mesma forma, foi aplicado o teste de Shapiro-Wilk de normalidade multivariado de Royston. A estatística, que é uma quiquadrado, resultou em um valor observado de 0,3548 para os dados dos pintores, com $\nu = 1,9839$ grau de liberdade associado. O valor- p associado foi de 0,8345, indicando que os dados são normais bivariados, se for considerado o nível nominal de significância de 5%. Os três testes aplicados apresentaram resultados concordantes nesse exemplo.

5 CONCLUSÕES

1. Os dois testes de normalidade multivariada foram propostos com sucesso;
2. não houve um teste uniformemente mais poderoso em todos os casos considerados;
3. o teste de normalidade multivariada Monte Carlo baseado em distância teve grande sucesso no controle das taxas de erro tipo I , e desempenho praticamente equivalente ao teste de normalidade multivariada de Royston (1983, 1993), para grandes amostras. Além do mais, esse teste não possui restrição quanto aos tamanhos amostrais que possam limitar a sua aplicação e possui uma visualização gráfica do QQplot para auxiliar na detecção de possíveis dados discrepantes;
4. o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico obteve um excelente controle do erro tipo I e um ótimo desempenho de poder, sendo assim, foi considerado ideal para testar a normalidade multivariada. Além disso, esse teste não possui restrição quanto ao tamanho da amostra e contempla os casos em que o número de variáveis pode ultrapassar o tamanho amostral;
5. O tempo computacional para execução dos novos testes é praticamente o mesmo em comparação com o teste de normalidade multivariada de Royston (1983, 1993) e os testes atuais de normalidade multivariada existentes no *software R*.

REFERÊNCIAS

ALVA, J. A. V.; ESTRADA, E. G. A generalization of Shapiro-Wilk's test for multivariate normality. **Communications in Statistics: Theory and Methods**, México, v. 38, n. 11, p. 1870-1883, May 2009.

ANDERSON, T.W.; DARLING, D.A. Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes. **Annals of Mathematical Statistics**, Ann Arbor, v. 23, n. 2, p. 193-212, 1952.

BARON, M. **Probability and statistical for computer scientists**. New York: Chapman & Hall, 2006. 413 p.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 540 p.

CANTELMO, N. F.; FERREIRA, D. F. Desempenhos dos testes de normalidade multivariada do programa R e de Shapiro-Wilk de Royston avaliados por simulação Monte Carlo. **Rev. Matemática Estatística**, São Paulo, v. 25, n. 2, p. 07-17, Ago. 2007a.

———. Monte Carlo evaluation of the performance of multivariate normality tests. **Ciencia E Agrotecnologia**, Lavras, v. 31, n. 6, p. 1630-1636, nov./ dez. 2007b.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 588 p.

CIRILLO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste para normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 21, n. 3, p. 57-75, Out. 2003.

D'AGOSTINO, R. B. Transformation to normality of the null distribution of g.l. **Biometrika**, London, v. 57, p. 679-681, 1970.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D.V. **Bootstrap methods and their application**.

Cambridge: Cambridge University, 2008. 582 p.

DOMANSKI, C. **Własności testu wielowymiarowej normalności Shapiro-Wilka i jego zastosowanie**. Cracow: University of Economics Rector's Lectures, 1998.

DOORNIK, J. A.; HANSEN, D. An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality . **Working Paper**, Oxford: Nuffield College, Nov. 1994.

DOORNIK, J. A.; HANSEN, H. An Omnibus test for univariate and multivariate normality. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, New York, v. 70, n. 1, p. 927-939, Dec. 2008.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. Boca Raton: Chapman & Hall, 1993. 436 p.

FARRELL, P. J.; BARRERA, M. S.; NACZK, K. On tests for multivariate normality and association simulation studies. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 77, n. 12, p. 1053-1068, Feb. 2007.

FERREIRA, D. F. **Estatística Básica** Lavras: UFLA, 2005. 664 p.

———. **Estatística Multivariada**. Lavras: UFLA, 2008. v.1. 662 p.

GNANADESIKAN, R.; KETTENRING, J.R. Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data. **Biometrics**, Washington, v. 28, p. 81-124, Mar. 1972.

GIRI, N. C. **Multivariate statistical analysis**. New York: Marcel Dekker, 1995. 378 p.

GIVENS, G. H; HOETING, J. A. **Computational statistics**. Hoboken: Wiley-Interscience, 2005. 418 p.

HAIR, J. C. et al. **Análise multivariada de dados**. 5 ed. Porto Alegre: Bookman, 1998. 593 p.

HENZE, N.; ZIRKLER, B. A class of invariant consistent tests for multivariate

normality. **Communications in Statistics: Theory and Methods**, New York, v. 19, n. 10, p. 3595-3617, 1990.

HOGG, R.; TANIS, E. **Probability and Statistical Inference**. 8. ed. New Jersey: Person Prentice Hall, 2010. 622 p.

LANDAU, D. P.; BINDER, K. **A guide to Monte-Carlo Simulations in Statistical Physics**. 3 ed. New York: Cambridge university press, 2009. 463 p.

LIANG, J. et al. Testing multinormality based on low-dimensional projection. **Journal of Statistical Planning and Inference**. Amsterdam, v. 86, p. 129-141, Apr. 2000.

LIANG, J.; TANG, M. L.; CHAN, P. S. A generalized Shapiro-Wilk W statistic for testing high-dimensional normality. **Computational Statistics and Data Analysis**. Amsterdam, v. 53, p. 3883-3891, May 2009.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics**. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1974. 564 p.

MARDIA, K. V. Assessment of multinormality and the robustness of Hotelling's T^2 test. **Journal of the Royal Statistical Society**, London, v. 24, p. 163-171, Set. 1975.

———. Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. **Biometrika**, London, v. 57, n. 3, p. 519-530, Dec. 1970.

MCNEIL, A. J.; FREY R.; EMBRECHTS, P. **Quantitative Risk Management**, London: Princeton University Press, 2005. 538 p.

MECKLIN, C. J.; MUNDFROM, D.J. A Monte Carlo comparison of the Type I and Type II error rates of tests of multivariate normality. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 75, n. 2, p. 93-107, Fev. 2005.

MUDHOLKAR, G.; SRIVASTAVA, D.; LIN, C. Some p-variate adaptations of the Shapiro-Wilk test of normality. **Communications in Statistics - Theory and Methods**. Canadá, v. 24, n. 4, p. 953-985, 1995.

OLIVEIRA, I. R. C.; FERREIRA, D. F. Multivariate extension of chi-squared

univariate normality test. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 80, n. 5, p. 513-526, Mar. 2009.

PAULSON, A.S.; ROOHAN, P.; SULLO, P. Some empirical distribution function tests for multivariate normality. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v.28, p. 15-30, 1987.

PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes in C the art of scientific computing**, 2. ed. New York: Cambridge, 1992. 994 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna, 2011. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>. Acesso em: 20 mar. 2011.

ROYSTON, J. P. A toolkit for testing for non-normality in complete and censored samples. **The Statistician**, London, v. 42, n. 1, p. 37-43, 1993.

———. Approximating the Shapiro-Wilk W-Test for non-normality. **Statistics and Computing**, London v. 2, n. 1, p. 117-119, 1992.

———. Some techniques for assessing multivariate based on the Shapiro-Wilk W. **Applied Statistics - Journal of the Royal Statistical Society - Series C**, London, v. 32, n. 2, p. 121-133, 1983.

SHAPIRO, S. S.; FRANCIA, R. S. An approximate analysis of variance test for normality. **Journal of the American Statistical Association**, New York, v. 67, n. 337, p. 215-216, Mar. 1972.

SRIVASTAVA, M. S.; HUI, T. K. On assessing multivariate normality based on Shapiro-Wilk W statistic. **Statistics & Probability Letters**, Canadá. v. 2, p. 263-267, Jan. 1987.

SILVA, R. B. V. **Extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado**. 2009. 59 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Departamento de Ciência Exatas - Universidade Federal de Lavras, Lavras.

STEEL, R. G. D.; TORRIE, J. H. DICKEY, D. A. **Principles and procedures of statistics: a biometrical approach**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1997. 666 p.

SZEKELY, G. J.; RIZZO, M. L. A New Test for Multivariate Normality. *Journal of Multivariate Analysis*, New York, v. 93, n. 1, p. 58-80, Mar. 2005.

THODE, H. C. Jr. *Testing for Normality*. New York: Marcel Dekker, 2002. 479 p.

VENABLES, B. D.; RIPLEY, B. D. *Modern Applied Statistics with S*. 4. ed, New York: Springer, 2002. 495 p.

APÊNDICE A - Rotinas R

```
# Implementação da rotina realizada por Silva (2009) para o teste
# Shapiro–Wilk de normalidade multivariado proposto por
# Royston (1983, 1993). Em que x é a matriz de dados (n x p)
# e as funções auxiliares ki, fz, fe, grhon foram baseadas no
# artigo: ROYSTON, J. P. A toolkit for testing for non-normality
# in complete and censored samples. The Statistician, London,
# v. 42, n. 1, p. 37–43, 1993.
```

```
Shapiro.Royston = function(x){
  #auxiliar functions
  ki = function(zj) {
    ki = (qnorm(0.5*pnorm(-zj)))^2
    return(ki)
  }

  fz = function(wj,n){
    if (n <= 11) {
      lamb = -2.273+0.459*n
      u = log(1-wj)
      y = -log(lamb-u)
      muy = 0.544 - 0.39978*n + 0.025054*n^2 - 0.0006714*n^3
      sigy = exp(1.3822 - 0.77857*n + 0.062767*n^2 -
                0.0020322*n^3)
    } else {
      y=log(1-wj)
      xx=log(n)
      muy=-1.5861 - 0.31082*xx - 0.083751*xx^2 + 0.0038915*xx^3
      sigy=exp(-0.4803 - 0.082676*xx + 0.0030302*xx^2)
    }
    zc = (y-muy)/sigy
  }
}
```

```

        return(zc)
    }

    fc = function(cbar ,p){
        c = p/(1+(p-1)*cbar)
        return(c)
    }

    grhon = function(rho ,n){
        mu = 0.715
        lamb = 5
        xx = log(n)
        nu = 0.21364+0.015124*xx^2-0.0018034*xx^3
        #nu=0.35
        #print(nu)
        grijn = rho^lamb*(1-mu/nu*rho*(1-rho)^mu)
        grijn
    }

# main procedures
if (!is.matrix(x))
    stop("x[] is not a matrix with number of rows (sample size)
        between 3 and 5000")

p=ncol(x)
p
n=nrow(x)
n
if (n < 3 || n > 5000)
    stop("sample size must be between 3 and 5000")

rx = cor(x)
#Calculating the univariate W statistics using R function
Wis = matrix(0,p,1)
for (i in 1:p){
    xj=x[1:n,i]

```

```

wi = shapiro.test(xj)
Wis[i,1]=wi$statistic
}
#calculating Cij matrix
Cij = matrix(1,p,p)
if (p>1){
  pp=1:p-1
  #print(pp)
  for (i in pp){
    ii=i+1
    seq=ii:p
    for (j in seq){
      #print(i); print(j); print(seq)
      cij = grhon(abs(rx[i,j]),n)
      Cij[i,j]=cij
      #print(cij)
      Cij[j,i]=cij
    }
  }
}
# test statistics and p-value
if(p>1) cbar=sum(Cij-diag(p))/(p*(p-1)) else
  cbar=0
e=fe(cbar,p)
Kis=ki(fz(Wis,n))
G=sum(Kis)/p
W.mean = mean(Wis)
H=e*G
prH =1 - pchisq(H,e)
return(list(W = W.mean, G=G, H = H, dfeq = e, p.value = prH))
}

```

```
# Teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em
```



```

# distâncias entrar com
# X: matriz de dados n x p e com
# NSM: número de simulações Monte Carlo

testNMMC <- function(X, NSM = 2000)
{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  Xb <- apply(X, 2, mean)
  S <- var(X)
  SI <- solve(S)
  D2 <- function(x, med, Si)
  {
    return(t(x - med) %*% Si %*% (x - med))
  }
  D2j <- apply(X, 1, D2, Xb, SI)
  D2j <- sort(D2j)
  bj <- n * D2j / (n - 1)^2
  a <- (p - 2)/(2 * p)
  b <- (n - p - 3) / (2 * (n - p - 1))
  pj <- ((1:n) - a) / (n - a - b + 1)
  alpha <- p / 2
  beta <- (n - p - 1) / 2
  bjs <- qbeta(pj, alpha, beta)
  r2c <- cor(bj, bjs)^2
  r2MC <- r2c
  for (i in 1:NSM)
  {
    Z <- matrix(rnorm(n * p), n, p)
    Zb <- apply(Z, 2, mean)
    Sz <- var(Z)
    SIz <- solve(Sz)
  }
}

```

```

D2jz <- apply(Z, 1, D2, Zb, SIz)
D2jz <- sort(D2jz)
bjz <- n * D2jz / (n - 1)^2
r2MC <- c(r2MC, cor(bjz, bjs)^2)
}
plot(bjs, bj, xlab = paste("Valores Esperados beta", sep = ""),
      ylab = paste("Estatísticas de Ordem Observadas",
                    sep = ""))
reg <- lm(bj~bjs)
abline(reg$coefficients[1], reg$coefficients[2])
valor.p <- length(r2MC[r2MC <= r2c]) / (NSM + 1)
return(list(r2 = r2c, valor.p = valor.p))
}

```

```

# Teste de normalidade multivariada baseado em bootstrap
# paramétrico entrar com
# X: matriz de dados n x p e com
# NSM: número de replicações do bootstrap paramétrico
testHNMMC <- function(X, NSM = 2000)
{
  n <- nrow(X)
  p <- ncol(X)
  S <- var(X)
  pj <- ((1:n) - 3/8) / (n + 1/4)
  mj <- qnorm(pj)
  X <- apply(X, 2, sort)
  Hc <- sum(apply(X, 2, cor, mj)^2) / p
  H <- Hc
  library(MASS)
  for (i in 1:NSM)
  {
    Z <- mvrnorm(n, rep(0, p), S)
    Z <- apply(Z, 2, sort)
  }
}

```

```

HMC <- sum(apply(Z, 2, cor, mj)^2) / p
H <- c(H, HMC)
}
valor.p <- length(H[H <= Hc]) / (NSM + 1)
return(list(H = Hc, valor.p = valor.p))
}

```

```

# Função para gerar dados da normal contaminada
mvrnormCT <- function(n, mu1, Sigma1, mu2, Sigma2, delta)
{
  u <- runif(n)
  if (u[1] <= delta) X <- mvrnorm(1, mu1, Sigma1) else
    X <- mvrnorm(1, mu2, Sigma2)
  for (i in 2:n)
  {
    if (u[i] <= delta) y <- mvrnorm(1, mu1, Sigma1) else
      y <- mvrnorm(1, mu2, Sigma2)
    X <- rbind(X, y)
  }
  return(X)
}

```

```

# Função de validação dos testes propostos.
# Resultados com taxas de rejeições de H0
# para alpha = 0,10, 0,05 e 0,01
# Argumentos: n: tamanho da amostra,
# p: número de variáveis (p < n),
# N: número de simulações Monte Carlo,
# op: opção da distribuição, se
# op = 1: normal multivariada,
# op = 2: distribuição t multivariada com nu = 1 G.L.,
# op = 3: distribuição t multivariada com nu = 30 G.L.,
# op = 4: lognormal multivariada,

```

```

# op = 5: normal contaminada e
# op = 6: uniforme multivariada
# NSM: número de simulações Monte Carlo para realizar o teste

avaliaDesempenho <- function(n, p, N = 2000, op = 1, NSM =2000)
{
  result <- matrix(0, 3, 3)
  rownames(result) <- c("TNMIMC", "TNMIMC", "TNMSW")
  colnames(result) <- c("0,10", "0,05", "0,01")
  library(MASS)
  library(mvtnorm)
  mu <- rep(0, times = p)
  #Normal Contaminada - deve mudar seus parâmetros aqui
  mu2 <- mu + 10
  rho <- 0.5
  sigma2 <- 1
  Sigma <- sigma2 * ((1-rho) * diag(p) + rho * matrix(1, p, p ))
  Sigma2 <- 10 * Sigma
  delta <- 0.3
  for (i in 1:N)
  {
    if (op == 1) X <- mvrnorm(n, mu, Sigma) else
      if (op == 2) X <- rmvt(n, Sigma, 1, mu) else
        if (op == 3) X <- rmvt(n, Sigma, 30, mu) else
          if (op == 4) X <- exp(mvrnorm(n, mu, Sigma)) else
            if (op == 5) X <- mvrnormCT(n, mu, Sigma, mu2,
                                         Sigma2, delta) else
              if (op == 6) X <- pnorm(mvrnorm(n, mu, Sigma))

    res <- testNMMC(X, NSM)
    if (res$valor.p <= 0.10) result[1,1] <- result[1,1] + 1.0/N
    if (res$valor.p <= 0.05) result[1,2] <- result[1,2] + 1.0/N
  }
}

```

```
if (res$valor.p <= 0.01) result[1,3] <- result[1,3] + 1.0/N
res <- testHNMMC(X, NSM)
if (res$valor.p <= 0.10) result[2,1] <- result[2,1] + 1.0/N
if (res$valor.p <= 0.05) result[2,2] <- result[2,2] + 1.0/N
if (res$valor.p <= 0.01) result[2,3] <- result[2,3] + 1.0/N
res <- Shapiro.Royston(X)
if (res$p.value <= 0.10) result[3,1] <- result[3,1] + 1.0/N
if (res$p.value <= 0.05) result[3,2] <- result[3,2] + 1.0/N
if (res$p.value <= 0.01) result[3,3] <- result[3,3] + 1.0/N
}
return(result)
}
```