



**CRISTINA HENRIQUES NOGUEIRA**

**TESTES PARA COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS DE  
MÉDIAS EM EXPERIMENTOS COM TENDÊNCIA E  
DEPENDÊNCIA ESPACIAL**

**LAVRAS - MG**

**2017**

**CRISTINA HENRIQUES NOGUEIRA**

**Testes para comparações múltiplas de médias em experimentos  
com tendência e dependência espacial**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutora.

**Orientador**

**Dr. Renato Ribeiro de Lima**

**LAVRAS - MG**

**2017**

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca  
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Nogueira, Cristina Henriques.

Testes para comparações múltiplas de médias em experimentos  
com tendência e dependência espacial / Cristina Henriques  
Nogueira. 2017.

141 p. : il.

Orientador: Renato Ribeiro de Lima.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2017.

Bibliografia.

1. Geoestatística. 2. Teste Scott-Knott. 3. Teste Tukey.
4. Experimentação Florestal. I. Universidade Federal de Lavras.  
II. Título.

**CRISTINA HENRIQUES NOGUEIRA**

**Testes para comparações múltiplas de médias em experimentos  
com tendência e dependência espacial**

**Multiple comparisons tests of means in experiments with trend  
and spatial dependence**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Doutora.

APROVADA em 28 de abril de 2017.

Dr. Daniel Furtado Ferreira	UFLA
Dr. Marcelo Silva de Oliveira	UFLA
Dr. José Márcio de Mello	UFLA
Dr. Gérson Rodrigues dos Santos	UFV

Prof. Dr. Renato Ribeiro de Lima  
Orientador

**LAVRAS - MG**

**2017**

*Aos meus verdadeiros heróis e fontes de  
inspiração, Antônio e Marlene, que fizeram dos  
meus sonhos os seus sonhos e que acreditaram em  
mim até quando eu mesma duvidei...*

DEDICO

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, pelo incondicional apoio e por ser o alicerce para que este sonho pudesse ser, pacientemente, construído. Como diria Newton, se vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.

À Universidade Federal de Lavras e ao Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pela oportunidade concedida para a realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos.

Ao meu orientador, Dr. Renato Ribeiro de Lima, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pela confiança e compreensão em todos os momentos, pelos preciosos ensinamentos compartilhados, pela dedicação e disponibilidade ofertados, pela inspiração, a seu próprio exemplo, a me tornar uma profissional melhor, mas sobretudo, pelo ser humano incomparável, meu mais sincero agradecimento.

A todos os professores do Departamento de Estatística (DES), por tantos conhecimentos transmitidos durante o curso e pela constante disponibilidade no auxílio em todas as dificuldades.

Aos demais funcionários do Departamento de Exatas (DEX), especialmente à Nádia, verdadeiros anjos da guarda ocultos, que tornam tudo isso possível.

A todos os colegas de trabalho do IFSudesteMG, campus Rio Pomba, por toda a compreensão e auxílio ofertados, os quais tornaram-se essenciais para que este trabalho pudesse ser finalizado. Um agradecimento em particular à Liliane, Poliana, Fernando e Marcos Pavani pela constante solidariedade e apoio recebido.

A todos os preciosos amigos do DES, em especial à Carolina Bicalho e Rafael Bastos, por todos os momentos de suporte, prazer e descontração compartilhados, tornando mais fácil todo o percurso. A amizade de vocês foi fundamental para a realização e conclusão desse trabalho.

As meninas com as quais morei, Marcília, Suelen, Paula e Jaiane, por todo companheirismo e tantos almoços maravilhosos.

Um agradecimento especial à Suelen, Kelly e Allana que sempre me deram abrigo quando eu precisei.

Aos membros da banca examinadora, por acreditar neste trabalho e pelas contribuições essenciais para o seu desenvolvimento.

Finalmente, a todos demais que, de alguma forma, foram parte da edificação desse sonho.

MUITO OBRIGADA!!!

*O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.*

---

Isaac Newton

*Sei que meu trabalho é uma gota no oceano, mas sem ele, o oceano seria menor...*

---

Madre Teresa de Calcutá

## RESUMO

A análise de variância destina-se à avaliação da influência dos efeitos de tratamentos em um experimento. Essa análise utiliza o teste  $F$  para decidir sobre a igualdade ou não desses efeitos. Uma vez que o teste rejeita a hipótese de igualdade, torna-se necessário aplicar testes de comparações múltiplas para definir quais tratamentos diferem entre si. Entretanto, a aplicação dos testes mencionados exige que os erros do modelo sejam independentes. Dessa forma, em fenômenos cujas componentes espaciais estão presentes, surge a necessidade de testes que incorporem essa informação em sua composição. Sendo assim, esse trabalho teve como objetivo a análise para experimentos com dependência espacial, ou seja, erros dependentes, considerando dois cenários: sem e com presença do efeito de tendência em função das coordenadas. Em ambos cenários, foi apresentado e avaliado o teste  $F$  da análise de variância com a incorporação da informação espacial, sendo essa realizada por meio de técnicas geoestatísticas. A modelagem da tendência foi abordada sob metodologia da análise de covariáveis, sendo indicado testes para a significância desses efeitos com relação à cada coordenada espacial. No intuito de discernir quais tratamentos diferem entre si, apresentou-se propostas de inclusão da informação espacial para os testes que avaliam os contrastes de Tukey, fundamentados nas distribuições  $t$  multivariada e  $q$  estudantizada, além do teste de agrupamento de Scott-Knott. A adequabilidade desses testes foi avaliada, via simulação, por meio da obtenção das taxas de erro tipo I, a qual estimou a proporção de experimentos que rejeitaram incorretamente a hipótese nula de igualdade entre os tratamentos. Numa segunda etapa dessa avaliação, realizada em experimentos simulados sob hipótese alternativa verdadeira, estimou-se o poder dos testes propostos, sendo esse poder definido pela razão entre o número de decisões corretas e o número de decisões tomadas em um experimento. Nesse processo de simulação foram considerados experimentos com 8 tratamentos e 10 repetições, cujo erro foi obtido em diversas configurações de dependência espacial. A partir disso, observou-se que o teste Scott-Knott apresentou maior controle das taxas de erro tipo I que os testes para os contrastes de Tukey, sendo, também, mais poderoso que esses últimos, principalmente na capacidade em detectar pequenas diferenças entre as médias dos tratamentos. Além disso, ao analisar alguns exemplos de experimentos, simulados e real, a modelagem e os testes para os efeitos de tendência espacial apresentaram resultados adequados. Finalmente, verificou-se que o poder dos testes para a abordagem espacial foi superior, em todos os cenários analisados, ao poder do teste obtido por meio da abordagem clássica. Com isso, concluiu-se que a incorporação da informação espacial resultou em uma maior eficiência para apontar diferenças entre os tratamentos, quando esses eram provenientes de experimentos com dependência espacial.

**Palavras-chave:** Geoestatística. Teste Scott-Knott. Teste Tukey. Experimentação Florestal.

## ABSTRACT

The variance analysis is used to evaluate the influence of the effects of treatments on an experiment. This approach uses the F test to decide either the equality or not of these effects. Once this test rejects the hypothesis, it becomes necessary to apply the multiple comparisons test in order to verify which treatments differ from each other. However, the application of these mentioned tests above requires the modeled errors to be independents. Thus in experiments whose spatial components occur, it arises the need for tests that assimilates this information on its composition. Thus, this work had the purpose of analysis for experiments with spatial dependence. Initially, the F test of the analysis of variance was presented and evaluated with the incorporation of the spatial information, with this one being carried out by geostatistical techniques. The trend modeling was approached using a covariates analysis methodology. It is indicated relating to each spatial coordinate with tests for the significance of these effects. In order to discern which treatments differ, it was presented proposals for the inclusion of the information for the tests that evaluate the Tukey contrasts, based in the multivariate t distributions and the studentized range distributions, in addition to the Scott-Knott grouping test. The suitability of these tests was evaluated, through simulation, by obtaining the type I error rates which estimated the proportion of experiments that incorrectly rejected the null hypothesis of equality between treatments. In a second stage of this evaluation, performed in simulated experiments under a true alternative hypothesis, it was estimated the power of the proposed tests, with this power being defined by the ratio between the number of correct decisions and the number of decisions made in an experiment. In this simulation process were considered experiments with 8 treatments and 10 repetitions, whose error was obtained in several configurations of spatial dependence. From this analysis, it was observed that the Scott-Knott test presented greater control of the type I error rates than the tests for the Tukey contrasts, being also more powerful than the previous ones, especially in the ability to detect small differences between the means of the treatments. In addition it comes to, when analyzing some examples of simulated and real experiments, the modeling and the tests for the spatial tendency effects has presented appropriated results. Finally, it was verified that the power of the tests for the spatial approach was superior in all scenarios analyzed than the power of the test obtained through the classical approach. With this being said, it was concluded that the incorporation of the spatial information resulted in a greater efficiency to indicate differences between the treatments when they came from experiments with spatial dependence.

**Keywords:** Geostatistics. Scott-Knott test. Tukey test. Forest experiments.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Exemplo de tendência espacial nas observações, em função das coordenadas. . . . .	32
Figura 2.2 – Semivariograma experimental com um modelo ajustado com os parâmetros alcance ( $\phi$ ), efeito pepita ( $\tau^2$ ) e patamar ( $\sigma^2$ ). . . . .	33
Figura 2.3 – Representação gráfica dos modelos de semivariância mais frequentes.	35
Figura 2.4 – Comportamento da função poder para um teste bilateral. . . . .	46
Figura 3.1 – Gride com o arranjo espacial das unidades experimentais. . . . .	59
Figura 3.2 – Algoritmo para o processo de estimação dos parâmetros do semivariograma. . . . .	65
Figura 3.3 – Gride a posição espacial de todas as árvores contidas no experimento.	66
Figura 4.1 – Poder do teste $F$ espacial e clássico, em porcentagem, para dados simulados sem tendência, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	96
Figura 4.2 – Poder do teste $F$ espacial e clássico, em porcentagem, para dados simulados com tendência, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	97
Figura 4.3 – Poder dos testes Scott-Knott e Tukey espaciais e independentes, de acordo com cada configuração de correlação espacial simulada, sem tendência, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	101
Figura 4.4 – Poder dos testes Scott-Knott e Tukey espaciais e originais, de acordo com cada configuração de correlação espacial simulada, com tendência, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	104
Figura 4.5 – Semivariograma dos resíduos e o modelo teórico ajustado, para o conjunto de dados simulados sem tendência. . . . .	106
Figura 4.6 – Semivariograma e modelo esférico ajustado para os dados simulados com tendência. . . . .	109
Figura 4.7 – Gride com os quartis dos dados de Candeia (a), e semivariograma com o modelo teórico estimado sobre os resíduos (b). . . . .	111

Figura 4.8 – Tratamentos agrupados, por meio das cores, a partir dos testes Scott-Knott original (médias aritméticas) e espacial (médias espaciais). . . . . 114

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Análise de variância para um modelo com um único fator. . . . .	20
Tabela 2.2 – Análise de variância para erros correlacionados. . . . .	25
Tabela 2.3 – Tipos de erros associados a decisão em um teste de hipóteses. . . .	44
Tabela 3.1 – Configurações experimentais abordadas nas simulações. . . . .	58
Tabela 3.2 – Parâmetros do semivariograma avaliados na simulação. . . . .	60
Tabela 3.3 – Número de repetições em cada tratamento do experimento de Candeia. . . . .	67
Tabela 4.1 – Reduções de modelos para as somas de quadrados tipo I e III. . . .	77
Tabela 4.2 – Análise variância para o modelo com covariável, a partir de somas de quadrados tipo III. . . . .	77
Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I por experimento do teste $F$ espacial para os efeitos de tratamentos, sob $H_0$ completa, na presença de correlação espacial. . . . .	95
Tabela 4.4 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, sem tendência espacial, sob $H_0$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	99
Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, sem tendência espacial, sob $H_0$ completa, considerando $\alpha = 0,01$ . . . . .	99
Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, com tendência espacial, sob $H_0$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	102
Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, com tendência espacial, sob $H_0$ completa, considerando $\alpha = 0,01$ . . . . .	103
Tabela 4.8 – Parâmetros utilizados na simulação de um experimento sem tendência. . . . .	106
Tabela 4.9 – Análise de variância espacial para o conjunto de dados simulados sem tendência. . . . .	107

Tabela 4.10 – Teste para os parâmetros referentes à tendência espacial, para os dados simulados na ausência desse efeito. . . . .	107
Tabela 4.11 – Teste Scott-Knott e $t$ multivariado para as médias espaciais dos tratamentos, para o experimento simulado sem tendência. . . . .	108
Tabela 4.12 – Parâmetros utilizados na simulação de um experimento com tendência. . . . .	108
Tabela 4.13 – Análise de variância espacial para o conjunto de dados simulados com tendência. . . . .	109
Tabela 4.14 – Teste para os parâmetros referentes à tendência espacial, para os dados simulados na presença desse efeito. . . . .	110
Tabela 4.15 – Teste Scott-Knott e $t$ multivariado para as médias espaciais dos tratamentos, para o experimento simulado com tendência. . . . .	110
Tabela 4.16 – Análise de variância espacial, considerando o efeito de tendência, para os dados de Candeia. . . . .	112
Tabela 4.17 – Teste para os parâmetros referentes à tendência espacial, para os dados de Candeia. . . . .	113
Tabela 4.18 – Teste Scott-Knott, independente e espacial, para avaliar os tratamentos do experimento de Candeia, ao nível $\alpha = 0,05$ . . . . .	114
Tabela 4.19 – Teste $t$ multivariado, independente e espacial, na avaliação dos contrastes de Tukey para os tratamentos do experimento de Candeia, ao nível $\alpha = 0,05$ . . . . .	115
Tabela 5.1 – Poder do teste $F$ espacial, em porcentagem, para experimentos simulados, sem e com tendência, e com dependência espacial, sob $H_0$ parcial, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	136
Tabela 5.2 – Poder do teste $F$ espacial, em porcentagem, para experimentos simulados, sem e com tendência, e com dependência espacial, sob $H_0$ parcial, considerando $\alpha = 0,01$ . . . . .	136
Tabela 5.3 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	137

Tabela 5.4 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,01$ . . . . .	137
Tabela 5.5 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	137
Tabela 5.6 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,01$ . . . . .	138
Tabela 5.7 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição $t$ multivariada, em porcentagem, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	138
Tabela 5.8 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição $t$ multivariada, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,01$ . . .	138
Tabela 5.9 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição $t$ multivariada, em porcentagem, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,05$ . . . . .	139
Tabela 5.10 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição $t$ multivariada, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob $H_1$ completa, considerando $\alpha = 0,01$ . . .	139
Tabela 5.11 – Dados simulados sem tendência espacial e com efeitos de tratamentos não nulos. . . . .	140
Tabela 5.12 – Dados simulados com tendência espacial e com efeitos de tratamentos não nulos. . . . .	141

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .	18
2.1	Princípios básicos da experimentação . . . . .	18
2.1.1	A análise de variância . . . . .	19
2.1.2	Estimação de parâmetros em modelos com covariáveis . . . . .	20
2.2	Modelos lineares . . . . .	22
2.2.1	Modelos lineares fixos . . . . .	23
2.2.2	A análise de variância para erros dependentes . . . . .	24
2.2.3	Estrutura da matriz de covariâncias . . . . .	26
2.3	Geoestatística . . . . .	28
2.3.1	Estacionariedade e tendência . . . . .	29
2.3.2	Semivariograma . . . . .	33
2.3.3	Métodos de ajuste de modelos . . . . .	36
2.3.4	Seleção de modelos espaciais . . . . .	38
2.4	Distribuição de variáveis espaciais . . . . .	39
2.5	Testes de hipóteses . . . . .	43
2.5.1	Taxas de erro e poder de testes . . . . .	43
2.5.2	Teste de razão de verossimilhanças generalizado . . . . .	47
2.6	Testes de comparações múltiplas . . . . .	48
2.6.1	Teste Tukey . . . . .	49
2.6.2	Teste $t$ multivariado . . . . .	52
2.6.3	Teste Scott-Knott . . . . .	55
3	MATERIAL E MÉTODOS . . . . .	58
3.1	Simulação de dados experimentais . . . . .	58
3.2	Adequabilidade dos testes . . . . .	61
3.3	Modelagem da matriz de covariância . . . . .	63
3.4	Dados do experimento de Candeia . . . . .	65
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	68
4.1	Estimadores para o modelo espacial sem tendência . . . . .	68
4.1.1	Médias espaciais dos tratamentos . . . . .	68
4.1.2	Variância das médias e das diferenças de médias . . . . .	71
4.2	Modelo espacial com tendência . . . . .	75
4.2.1	Obtenção da análise de variância . . . . .	76
4.2.2	Estimadores dos parâmetros e teste para tendência . . . . .	79
4.3	Testes de comparações múltiplas entre médias espaciais . . . . .	83
4.3.1	Teste utilizando a distribuição $t$ multivariada . . . . .	84

4.3.2	Teste baseado na aproximação da amplitude estudentizada	88
4.3.3	Teste de agrupamento de médias Scott-Knott . . . . .	90
4.4	Avaliação da adequabilidade dos testes propostos . . . . .	94
4.4.1	Taxas de erro e poder do teste $F$ da análise de variância espacial . . . . .	94
4.4.2	Taxas de erro e poder dos testes de comparações múltiplas	98
4.5	Análise de experimentos . . . . .	105
4.5.1	Experimento simulado sem o efeito de tendência espacial .	105
4.5.2	Experimento simulado com o efeito de tendência espacial .	108
4.5.3	Experimento real com dados da Candeia . . . . .	111
5	CONCLUSÃO . . . . .	116
	REFERÊNCIAS . . . . .	117
	APÊNDICE . . . . .	123
	ANEXOS . . . . .	128

## 1 INTRODUÇÃO

A análise de variância, proposta por Ronald A. Fisher em 1925, é uma eficiente técnica para avaliar a influência dos efeitos de tratamentos em experimentos. Entretanto, para a validade de seus testes, é necessário, entre outras pressuposições, que os erros sejam independentes. Com o intuito de atender a essa necessidade, a aleatorização foi proposta como um princípio básico da experimentação.

Essa prática de aleatorização, segundo Kempthorne (1977), destaca-se por gerar uma distribuição de amostragem para os erros experimentais, cujo comportamento assintótico aproxima-se de distribuições normais não-correlacionadas. Sendo assim, acredita-se que a realização da mesma proporcione erros independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância constante.

Porém, Mello (2004) mostra que esse processo é insuficiente para garantir a neutralização dos efeitos espaciais, apontando para a possibilidade de que, mesmo que a aleatorização seja realizada, os efeitos espaciais continuem atuantes no fenômeno avaliado.

Com isso, surge a necessidade de modelos que sejam válidos na ausência desse princípio. Nesse sentido, a abordagem espacial desponta como uma eficaz alternativa de análise, uma vez que, além de não supor independência dos erros, utiliza as medidas de associação espacial como uma importante fonte de informação.

Conforme destaca Dessoti (2014), na presença de efeito espacial, duas alternativas podem ser escolhidas para analisar um experimento: a opção por delineamentos mais complexos, que visam o controle desse efeito *a priori*, ou a busca por abordagens que modelem esse efeito, *a posteriori*. Esta última, segundo Duarte (2000), pode ser utilizada como alternativa ou complemento aos delineamentos, escolhidos *a priori*.

A opção por delineamentos mais complexos vem sendo utilizada desde 1925, quando Fisher idealizou os delineamentos em blocos, cujo intuito era minimizar o efeito da componente espacial presente nos modelos. Nesse sentido, nota-se que os blocos, principalmente em experimentos de campo, muitas vezes buscam controlar o efeito de uma tendência determinística em função das coordenadas geográficas.

Já a escolha por modelos espaciais ganhou mais ênfase nas pesquisas brasileiras, principalmente, quando Duarte (2000) mostrou que a decisão entre adotar ou não uma análise espacial poderia simplesmente determinar (ou não) o aproveitamento de um experimento. Desde então, tem-se tornado cada vez maior a demanda por modelos, cuja estrutura inclua, de alguma forma, a informação espacial presente no fenômeno.

Uma das metodologias utilizadas para a inclusão da informação espacial no modelo é por meio de técnicas geoestatísticas. Essa metodologia utiliza o semivariograma como principal ferramenta para descrever a estrutura de variabilidade, dispondo dos modelos teóricos ajustados ao mesmo para determinar a covariância entre as observações.

De acordo com Nogueira (2013), a adição dessa informação espacial, por métodos geoestatísticos, resulta em uma maior capacidade de detectar diferenças entre os efeitos de tratamentos.

Porém, uma vez apontada diferenças entre as médias dos tratamentos, surge a necessidade de identificar quais deles diferem entre si. Para tal avaliação, recomenda-se aplicar algum procedimento de comparações múltiplas. A grande disponibilidade de testes, acompanhada de vastos recursos computacionais que se prestam a essa análise, fazem com que as comparações múltiplas sejam amplamente utilizadas na experimentação (HOCHBERG; TAMHANE, 1987).

Contudo, o desconhecimento dos fundamentos desses testes, especialmente no que diz respeito aos requisitos necessários para a validade de suas aplicações, pode conduzir a conclusões completamente equivocadas. Sendo assim, é de fundamental importância a verificação de testes que sejam adequados quando a suposição de independência entre os erros não é satisfeita.

Nesse contexto, tem-se que o principal objetivo deste trabalho é desenvolver propostas de adaptações para testes de comparações múltiplas, em particular os testes de Tukey e de Scott-Knott, de forma a incluir a informação da componente espacial aos mesmos.

Além disso, é apresentada uma metodologia para a avaliação de fenômenos que apresentam efeitos de tendência espacial, ou seja, fenômenos cujo valor esperado varia de acordo com as coordenadas espaciais que indexam cada variável da região em estudo.

Com o intuito de avaliar a adequabilidade dos testes descritos neste trabalho, realizou-se simulações estabelecidas em diferentes configurações de dependência espacial, para as quais foram avaliadas as taxas de erro tipo I e o poder dos testes.

Buscou-se, ainda, comparar os resultados obtidos a partir dos métodos clássicos e por meio dos métodos espaciais, com a finalidade de mostrar a maior capacidade deste último em detectar diferenças entre os tratamentos, na presença de dependência espacial.

Por fim, as metodologias apresentadas neste trabalho foram utilizados para a análise de dados de um experimento florestal com a espécie de candeia, em Minas Gerais, o qual foi implementado no intuito de comparar 13 tratamentos referentes a tipos de adubação. Esse experimento foi instalado em uma região na qual foi possível verificar a presença de uma tendência nos dados em função das coordenadas, além da dependência espacial entre os erros.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados importantes conceitos que dão suporte ao desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Princípios básicos da experimentação

A experimentação tem como grande precursor Sir Ronald A. Fisher (1890-1962), um estatístico que trabalhou na Estação Experimental de Agricultura de Rothamstead, na Inglaterra. Em 1925, Fisher estabeleceu três princípios fundamentais para a análise de dados experimentais, até hoje considerados o alicerce da experimentação, que são: a repetição, a aleatorização e o controle local.

A repetição refere-se ao número de parcelas que recebem um determinado tratamento. Ela é necessária para que se possa estimar o erro experimental, sem o qual seria impossível realizar qualquer tipo de inferência estatística. O uso de um número adequado de repetições possibilita uma estimativa adequada do erro experimental, aumentando a precisão do experimento e, com isso, melhorando as estimativas de médias e diferenças entre as médias.

Já a aleatorização refere-se à distribuição aleatória dos tratamentos às unidades experimentais, de tal modo que todos os tratamentos tenham a mesma probabilidade de serem alocados em qualquer uma das unidades experimentais. Assim, evita-se que qualquer tratamento seja beneficiado pela unidade experimental a ele designada.

Ao perceber a influência da presença da componente espacial no modelo, Fisher propôs o controle local, cujo intuito era minimizar o efeito dessa componente. Segundo Hinkelmann e Kempthorne (1994), a ideia básica do controle local é particionar um conjunto total heterogêneo de unidades experimentais em subconjuntos (blocos) que sejam os mais homogêneos possíveis.

A partir daí, os experimentos planejados em blocos ganharam ampla difusão, principalmente em experimentos de campo, tornando-se o delineamento mais utilizado pelos pesquisadores até os dias atuais.

Contudo, Duarte (2000) aponta para uma possível ineficiência desse tipo de controle local. Segundo esse autor, a construção dos blocos ocorre antes da implantação do experimento, enquanto, não raro, a percepção de efeitos ambientais ocorra apenas no momento da coleta dos dados experimentais.

### 2.1.1 A análise de variância

Uma das ferramentas para a análise de dados experimentais, proposta por Fisher, é a análise de variância, comumente denotada por ANOVA. De acordo com Banzatto e Kronka (2006), a análise de variância consiste na decomposição da variabilidade total em partes atribuídas a fatores controlados, previamente definidos. A variabilidade restante, correspondente a fatores não controlados, são considerados de natureza aleatória, os quais compõem o erro experimental.

Cochran (1947) lembra que, para a construção de uma análise de variância, as seguintes pressuposições devem ser atendidas:

- i) *aditividade*: os efeitos dos fatores controlados e do erro devem ser aditivos;
- ii) *independência*: os erros devem ser independentes, ou seja, a probabilidade de que um erro tenha um determinado valor não deve depender do valor dos demais;
- iii) *normalidade*: os erros devem ser normalmente distribuídos;
- iv) *homogeneidade*: os erros devem apresentar variância comum.

As suposições citadas acima garantem a validade do teste  $F$ , cuja finalidade é a comparação de variâncias. Por meio desse teste é possível realizar inferências sobre a hipótese de igualdade entre várias médias dos níveis de algum fator de interesse.

A análise mais simples se dá aos experimentos que apresentam apenas duas causas ou fontes de variação: os tratamentos, que se referem ao efeito de um fator controlado, e o resíduo, que reflete o efeito do erro experimental. O modelo estatístico para este experimento é dado por

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}, \quad (2.1.1)$$

em que

$y_{ij}$  é a observação do  $i$ -ésimo tratamento na  $j$ -ésima repetição, com  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $j = 1, 2, \dots, r$ ;

$\mu$  é uma constante inerente a cada observação que, sob restrição de que  $\sum_{i=1}^k t_i = 0$ , é a média geral;

$t_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento;

$e_{ij}$  é o erro aleatório associado à  $ij$ -ésima observação, em que se supõe que  $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ .

A partir desse modelo, o teste  $F$  avalia as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \text{ para algum } i \neq j, \end{cases}$$

em que  $\mu_i$  representa a média do  $i$ -ésimo tratamento, dada por  $\mu_i = \mu + t_i$ .

A análise de variância para o modelo (2.1.1) é dada conforme a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Análise de variância para um modelo com um único fator.

FV	GL	SQ	QM	$F_0$
Tratamento	$k-1$	$SQTrat$	$QMTrat = \frac{SQTrat}{k-1}$	$\frac{QMTrat}{QMRes}$
Resíduo	$k(r-1)$	$SQRes$	$QMRes = \frac{SQRes}{k(r-1)}$	
Total	$kr-1$	$SQT$		

Na Tabela 2.1, tem-se que:

$$SQTrat = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k T_i^2 - \frac{G}{kr}, \quad SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r y_{ij}^2 - \frac{G}{kr} \quad \text{e} \quad SQRes = SQT - SQTrat,$$

$$\text{em que } T_i = \sum_{j=1}^r y_{ij} \quad \text{e} \quad G = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r y_{ij}.$$

A partir dessa análise, a hipótese de igualdade entre as médias dos  $k$  níveis do fator avaliado é rejeitada se,  $F_0 \geq F_{(gltrat, glres, \alpha)}$ , em que  $F_{(gltrat, glres, \alpha)}$  corresponde ao quantil  $\alpha$ , o qual apresenta área  $\alpha$  acima dele, da distribuição F de Snedecor com  $gltrat = k - 1$  e  $glres = k(r - 1)$  graus de liberdade. O valor  $\alpha$  representa o nível de significância adotado no teste, para o qual a discussão será abordada na seção (2.5).

### 2.1.2 Estimação de parâmetros em modelos com covariáveis

Além da variável resposta  $Y$  medida em cada unidade experimental, podem existir outras variáveis quantitativas que também interferem nos resultados do experimento considerado.

Conforme explicam Rencher e Schaalje (2008), quando isso ocorre, uma alternativa para a análise é a inclusão dessas variáveis no modelo, as quais são denominadas como covariáveis ou variáveis concomitantes. Nesses casos, deve-se realizar uma análise de covariância, a qual pode ser vista como uma mistura entre a análise de variância e de regressão.

De forma geral, o modelo que tem o objetivo de avaliar um experimento composto por um fator e uma covariável, pode ser expresso por:

$$y_{ij} = \mu + t_i + \theta d_{ij} + e_{ij} \quad (2.1.2)$$

em que

$y_{ij}$  é o valor observado da variável  $Y$ , referente ao tratamento  $i$  na  $j$ -ésima repetição, com  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $j = 1, 2, \dots, r$ ;

$\mu$  é uma constante inerente a cada observação;

$t_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento;

$d_{ij}$  é o valor da covariável, observado na unidade experimental que recebeu o tratamento  $i$  em sua  $j$ -ésima repetição;

$\theta$  é um parâmetro que relaciona os valores  $y_{ij}$  e  $d_{ij}$ ;

$e_{ij}$  é o erro aleatório associado à  $ij$ -ésima observação, em que se supõe que  $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ .

Observe que, considerando  $\theta$  o coeficiente angular de um modelo de regressão,  $\mu + t_i$ , que representa a média do tratamento  $i$ , pode ser visto como o intercepto desse modelo. Assim, um método para testar a igualdade entre as médias dos tratamentos poderia ser a avaliação da igualdade entre os interceptos dos ajustes de regressão para cada tratamento.

Utilizando o método de quadrados mínimos ordinários para encontrar os estimadores dos parâmetros referentes à análise de variância do modelo (2.1.2), sob a restrição  $\sum_{i=1}^k t_i = 0$ , tem-se que:

$$\hat{\mu} = \bar{y} - \hat{\theta} \bar{d} \quad \text{e} \quad \hat{t}_i = \bar{y}_i - \hat{\mu} - \hat{\theta} \bar{d}_i,$$

em que  $\bar{y}$  representa a média geral de todas as observações da variável resposta  $Y$ ,  $\bar{y}_i$  é média das observações de  $Y$  referente às unidades experimentais que receberam o tratamento  $i$ ,  $\bar{d}$  é a média de todas as observações da covariável, enquanto  $\bar{d}_i$  é a média da covariável referente às unidades que receberam o tratamento  $i$ .

Porém, para que seja preservado o conceito de que  $\hat{\mu}$  seja a média geral, é comum redefinir o modelo com a covariável centrada na média. Assim, o modelo passa a ser expresso por:

$$y_{ij} = \mu + t_i + \theta(d_{ij} - \bar{d}) + e_{ij},$$

e, com isso, os estimadores de quadrados mínimos são dados como

$$\hat{\mu} = \bar{y} \quad \text{e} \quad \hat{t}_i = \bar{y}_i - \hat{\mu} - \hat{\theta}(\bar{d}_i - \bar{d}).$$

Contudo, a partir do modelo redefinido, pode-se observar que o valor esperado para a média de um tratamento  $i$ , bem como para a diferença entre as médias dos tratamentos  $i$  e  $j$  são dados por

$$E(\bar{y}_i) = \mu + t_i + \theta(\bar{d}_i - \bar{d}),$$

$$E(\bar{y}_i - \bar{y}_j) = t_i - t_j + \theta(\bar{d}_i - \bar{d}_j),$$

o que torna esses estimadores ineficientes para comparar apenas as diferenças entre os efeitos dos tratamentos.

Uma alternativa utilizada para contornar esse inconveniente é considerar as médias ajustadas para o efeito da covariável. Dessa forma, a média ajustada para um tratamento  $i$  é dada por:

$$\bar{y}_{i_{ajust}} = \bar{y}_i - \hat{\theta}(\bar{d}_i - \bar{d}).$$

A partir deste estimador, observa-se que o valor esperado para a média ajustada de um tratamento  $i$ , bem como para as diferenças entre as médias ajustadas dos tratamentos  $i$  e  $j$  são dados por

$$E(\bar{y}_{i_{ajust}}) = \mu + t_i,$$

$$E(\bar{y}_{i_{ajust}} - \bar{y}_{j_{ajust}}) = t_i - t_j,$$

os quais podem, com isso, serem usados para realizar comparações acerca da igualdade entre os efeitos de tratamentos.

## 2.2 Modelos lineares

O objetivo de um modelo é explicar as observações de uma variável dependente por meio dos efeitos de variáveis independentes. O adjetivo “linear” refere-se à linearidade nos parâmetros e não linearidade das variáveis independentes. Assim, diz-se que um modelo é linear nos parâmetros em função de os parâmetros estarem na forma aditiva e com efeitos simples. Formalmente, um modelo é dito linear se as derivadas parciais de primeira ordem

da variável dependente em relação a cada parâmetro do modelo não forem funções dos próprios parâmetros.

Um modelo linear pode ser classificado quanto à natureza dos seus efeitos, os quais são ditos fixos, quando representam constantes a serem estimadas, e aleatórios, quando caracterizam-se como realizações de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida.

Segundo Searle (1987), os modelos lineares possuem ao menos um efeito aleatório, comumente definido como o erro experimental, e um efeito fixo, frequentemente dado por uma constante que refere-se à média geral. Se o modelo apresentar as demais componentes fixas, este é dito fixo; porém, se os demais efeitos forem aleatórios o modelo é definido como aleatório. Já o modelo que apresenta tanto efeitos aleatórios como fixos é classificado modelo misto.

### 2.2.1 Modelos lineares fixos

O modelo linear no qual todos os efeitos são fixos, com exceção do erro, pode ser representado, matricialmente, da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.2.1)$$

em que

$\mathbf{Y}$  é o vetor, contendo as  $n$  observações, de ordem  $n \times 1$ ;

$\mathbf{X}$  é a matriz de incidência dos parâmetros do modelo de ordem  $n \times p$ , em que  $p$  é o número de parâmetros presentes no modelo;

$\boldsymbol{\beta}$  é um vetor de parâmetros do modelo de ordem  $p \times 1$ ;

$\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de erros aleatórios de ordem  $n \times 1$ , o qual supõe-se  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

Para o modelo especificado em (2.1.1), tem-se que  $n = kr$  e  $p = k + 1$ , de modo que as seguintes matrizes são definidas pelo modelo (2.2.1):

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1r} \\ \vdots \\ y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1r} \\ \vdots \\ e_{k1} \\ \vdots \\ e_{kr} \end{bmatrix}.$$

Ao supor uma distribuição normal para o erro aleatório, pode-se definir a distribuição de  $\mathbf{Y}$  como:

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Ao conservar a pressuposição de homogeneidade de variâncias, tem-se que  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}$ , em que  $\mathbf{V}$  representa a matriz de correlação entre os erros. Se a suposição de erros independentes também for atendida, então  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  uma matriz identidade.

Uma metodologia para a obtenção de estimadores para os parâmetros do modelo dá-se por meio do método de quadrados mínimos ordinários, quando  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , ou método de quadrados mínimos generalizados, se  $\mathbf{V} \neq \mathbf{I}$ , sendo o primeiro um caso particular deste último. Esses métodos baseiam-se na minimização da soma de quadrados dos resíduos que, a partir do modelo apresentado na equação (2.2.1), resulta no seguinte estimador:

$$\boldsymbol{\beta}^0 = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}$$

sendo que a notação  $(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-}$  denota uma inversa generalizada da matriz  $(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})$  e  $\boldsymbol{\beta}^0$  uma das infinitas soluções de quadrados mínimos existentes.

De acordo com as propriedades de inversas generalizadas, a variância deste estimador é dada por

$$Var(\boldsymbol{\beta}^0) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-}.$$

### 2.2.2 A análise de variância para erros dependentes

Segundo Gotway e Cressie (1990), quando existe correlação uma correlação atuante entre os erros, os testes usuais para verificar a presença dos efeitos de tratamentos podem não ser válidos, de modo que, a aplicação dos mesmos resultaria em conclusões equivocadas sobre o experimento. Conforme afirmam esses autores, esse equívoco deve-se ao fato de que, quando a correlação é não nula, a estatística obtida no teste  $F$ , da forma como apresentada na Tabela 2.1, não segue uma distribuição F de Snedecor central, sob condição de  $H_0$  verdadeira.

Para que fosse possível analisar experimentos com esta característica, Gotway e Cressie (1990) propuseram e utilizaram uma análise de variância que considerava as informações sobre a correlação existente. A partir desta proposta, os procedimentos de inferência para testar as hipóteses de igualdade entre as médias dos tratamentos tornaram-se coerentes.

Sendo assim, para a obtenção das somas de quadrados que irão compor a análise de variância, considerando a existência da correlação não nula entre os erros, é necessário antes definir uma partição da matriz  $\mathbf{X}$ , sendo essa expressa por  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2]$ . De acordo com esta partição,  $\mathbf{X}_1$  representa a primeira coluna da matriz  $\mathbf{X}$ , representando um vetor de ordem  $n$  composto apenas por valores 1, enquanto  $\mathbf{X}_2$  representa a matriz de incidência dos efeitos de tratamentos, de modo que as colunas 2 à  $(k + 1)$  de  $\mathbf{X}$  definem as colunas de  $\mathbf{X}_2$ .

A partir disso, as somas de quadrados considerando o modelo descrito em (2.2.1), são dadas por:

$$SQMédia = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}'_1(\mathbf{X}'_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y};$$

$$SQTrat = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} - SQMédia;$$

$$SQRes = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y};$$

$$SQTotal_{corrigida} = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}'_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Denotando o posto de uma matriz  $\mathbf{X}$  por  $posto(\mathbf{X})$ , com notação análoga aos postos das demais matrizes, uma forma de obtenção da análise de variância, incorporando a informação da matriz de correlação entre os erros, é dada conforme a Tabela 2.2,

Tabela 2.2 – Análise de variância para erros correlacionados.

FV	GL	SQ	QM	$F_c$
Tratamento	$posto(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P})$	$\mathbf{Y}'(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P})\mathbf{Y}$	$\frac{SQTrat}{gltrat}$	$\frac{QMTrat}{QMRes}$
Resíduo	$posto(\mathbf{P})$	$\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$	$\frac{SQRes}{glres}$	
Total	$posto(\mathbf{P}_1)$	$\mathbf{Y}'\mathbf{P}_1\mathbf{Y}$		

em que

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}'_1\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{V}^{-1}.$$

É possível encontrar em Nogueira (2013), a demonstração detalhada de que

$$\frac{(SQTrat/\sigma^2)/posto(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P})}{(SQRes/\sigma^2)/posto(\mathbf{P})} = \frac{QMTrat}{QMRes} \sim F_{(\nu_1, \nu_2; \delta)},$$

em que  $\nu_1 = posto(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P})$  e  $\nu_2 = posto(\mathbf{P})$  especificam os graus de liberdade, enquanto  $\delta = \frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{t}'\mathbf{X}'_2\mathbf{P}_1\mathbf{X}_2\mathbf{t}$  é definido como o parâmetro de centralidade. Neste último, é dado  $\mathbf{t}$ , o qual representa um vetor que contém os efeitos dos tratamentos  $t_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Sob  $H_0$  verdadeira, tem-se que  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$  e, conseqüentemente, o parâmetro de não centralidade  $\delta = 0$ . Com isso, pode-se concluir que o teste  $F$  apresentado na Tabela 2.2 é válido para avaliar a igualdade entre as médias dos tratamentos.

A partir deste teste, a hipótese de igualdade entre as médias dos tratamentos deve ser rejeitada se, e somente se,  $F_0 \geq F_{(\nu_1, \nu_2, \alpha)}$ .

### 2.2.3 Estrutura da matriz de covariâncias

Frequentemente, no intuito de satisfazer as suposições da análise de variância, assume-se que os erros são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição normal. Com base nessas suposições tem-se, considerando o modelo fixo, que  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ .

Porém, a partir do conhecimento sobre a natureza do fenômeno em estudo, várias outras estruturas de covariâncias para os erros podem ser adotadas. A seguir, são listadas algumas dessas estruturas, as quais foram consideradas por Littell et al. (2006), Freitas (2007), Dessotti (2014), Silva, Duarte e Reis (2015), entre outros.

- 1) **Componentes de variância:** estrutura usualmente utilizada, equivalente à  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , caracterizando-se por considerar homogeneidade das variâncias e correlação nula, a qual é expressa por

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

- 2) **Componentes de variância com heterogeneidade:** essa estrutura mantém a suposição de independência, ou seja, apresenta correlações nulas, porém não satisfaz à condição de homogeneidade das variâncias. É representada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$

- 3) Simetria composta:** é uma estrutura na qual a suposição de homogeneidade de variâncias é mantida, mas considera dependência entre os erros, apresentando correlação não nula. Entretanto, como forma mais simples de dependência, admite-se que a correlação seja idêntica entre todos os erros, ou seja,

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- 4) Autorregressiva de 1ª ordem – AR(1):** essa estrutura tem fundamentação na análise de séries temporais, a qual considera que observações mais próximas temporalmente são mais correlacionadas que observações mais distantes.

Essa definição foi utilizada por Griffith (1988), a partir do modelo SAR (*spatial auto regressive*), considerando a proximidade espacial entre as observações. Rossoni (2011) mostrou a eficiência deste modelo em relação ao modelo clássico, cuja estrutura é definida conforme o item **1**), na presença de dependência espacial.

De acordo com esta estrutura, as correlações decrescem exponencialmente à medida que as observações se distanciam, podendo ser representada por

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- 5) Espacial:** essa estrutura caracteriza-se por considerar a homogeneidade das variâncias, sendo a correlação uma função da distância entre duas posições amostradas. Essas funções são definidas a partir de modelos geoestatísticos. Assim,

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho(h_{12}) & \cdots & \rho(h_{1n}) \\ \rho(h_{12}) & 1 & \cdots & \rho(h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h_{1n}) & \rho(h_{2n}) & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $\rho(h_{ij})$  denota a correlação entre dois pontos amostrados nas posições  $i$  e  $j$ , cuja distância que os separam é  $h_{ij}$ , a qual será melhor detalhada na seção (2.3.1).

Esta última estrutura foi utilizada por autores como Reis e Miranda Filho (2003), Duarte e Vencovsky (2005), Campos (2011), entre outros, para a análise de experimentos cujos efeitos de correlação espacial não tinham sido devidamente neutralizados. Esses autores foram unânimes em apontar os benefícios dessa abordagem espacial quando comparada à abordagem clássica. Sendo assim, esta será a estrutura de covariâncias considerada neste trabalho, de modo que, para a utilização da mesma, faz-se necessário a apresentação de alguns conceitos fundamentais sobre a Geoestatística.

### 2.3 Geoestatística

A necessidade do desenvolvimento e da utilização de métodos estatísticos, capazes de caracterizar a estrutura de variabilidade espacial de um determinado fenômeno, motivou o surgimento da teoria das variáveis regionalizadas ou, simplesmente, da Geoestatística.

Sua origem data da década de 1950, quando Daniel G. Krige, um engenheiro de minas que trabalhava com a mineração, observou a necessidade de se considerar a existência da variabilidade espacial nos métodos de estimação da concentração de ouro. Contudo, essa teoria passou a ser amplamente difundida, entre diversas áreas da ciência, somente a partir da década de 1960, quando o geólogo francês George Matheron formalizou essas teorias, denominando-as de teoria das variáveis regionalizadas.

Conforme menciona Matheron (1971) as variáveis regionalizadas podem ser definidas como variáveis cujos valores estão relacionados de algum modo, com a posição espacial que ocupam, variando de um lugar a outro do espaço, de forma contínua. Diante deste contexto, Ribeiro Júnior (1995) salienta que, nessa teoria, cada observação é descrita não apenas pelo seu valor, mas também por informações de sua posição, expressa por um sistema de coordenadas.

Além disso, a suposição de que as observações são independentes e identicamente distribuídas não é feita nessa abordagem, fazendo com que as medidas de associação entre as variáveis assumam um papel fundamental na análise.

Outro fator de destaque é que, enquanto na abordagem clássica usualmente se trabalha com  $n$  observações de uma variável aleatória, na teoria das variáveis regionalizadas, frequentemente, têm-se  $n$  variáveis aleatórias com apenas uma observação cada. Isso ocorre devido a inviabilidade de haver mais de uma realização da variável de interesse em uma mesma posição, no mesmo instante de tempo.

Essa restrição no número de repetições impede o estudo da distribuição dessas variáveis. Por esse motivo, uma alternativa para contornar tal inconveniente é supor que

o fenômeno obedeça a algum tipo de estacionariedade.

### 2.3.1 Estacionariedade e tendência

As variáveis regionalizadas podem ser descritas por meio de um processo estocástico. Segundo Oliveira (1991), um processo estocástico é definido como uma coleção  $\{Y(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \in R \subset \mathbb{R}^s\}$  de variáveis aleatórias reais, definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade, indexadas em um subconjunto  $R$  do espaço vetorial  $s$ -dimensional  $\mathbb{R}^s$ , ou seja,  $\mathbf{d} \in R \subset \mathbb{R}^s$ , em que  $\mathbb{R}^s$  é o espaço indexador das coordenadas  $\mathbf{d}$ , de modo que  $\mathbf{d}_i = [d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{is}]'$  representa o vetor das coordenadas na posição  $i$ .

Conforme afirma Oliveira (1991), o espaço vetorial  $\mathbb{R}^s$  pode ser definido de tal maneira que seja possível representar variações aleatórias em espaços de qualquer dimensão. Porém, em análises espaciais, é comum a indexação de variáveis no espaço bidimensional.

A Geoestatística baseia-se no pressuposto de que a distribuição espacial de uma variável  $Y$  em uma região  $R$  é uma realização  $\{y(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \in R \subset \mathbb{R}^s\}$  do processo estocástico anteriormente definido, em que  $y(\mathbf{d})$  representa a realização de uma variável regionalizada  $Y(\mathbf{d})$  na posição  $\mathbf{d}$ , que representa o vetor de coordenadas de um ponto amostrado.

Conforme Cressie (2015), um processo é estacionário se o desenvolvimento do mesmo, no tempo ou no espaço, apresenta pequenas oscilações aleatórias contínuas em torno de um valor médio. Finalmente, um processo estocástico é dito ser de 2<sup>a</sup> ordem quando  $E[Y^2(\mathbf{d})]$  é finita.

Há dois tipos de estacionariedade comumente adotadas na Geoestatística: a estacionariedade de 2<sup>a</sup> ordem e a hipótese intrínseca. Segundo Journel (1989), uma variável  $Y(\mathbf{d})$  pode ser considerada estacionária de 2<sup>a</sup> ordem se

(i) a esperança de  $Y(\mathbf{d})$  existe e não depende da posição  $\mathbf{d}$ , ou seja:

$$E[Y(\mathbf{d})] = \mu = \text{constante}; \quad (2.3.1)$$

(ii) a função de covariância  $C(\cdot)$  existe e depende apenas da distância euclidiana entre os pontos. Dessa forma, definindo  $h_{ij} = \|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j\| = \sqrt{(d_{1i} - d_{1j})^2 + \dots + (d_{si} - d_{sj})^2}$  a distância entre as posições  $i$  e  $j$ , tem-se:

$$C(Y(\mathbf{d}_i), Y(\mathbf{d}_j)) = E[Y(\mathbf{d}_i) \cdot Y(\mathbf{d}_j)] - \mu^2 = C(h_{ij}). \quad (2.3.2)$$

De acordo com essa definição, pode-se observar, ainda, que a variância  $Var(\cdot)$  de uma variável  $Y(\mathbf{d})$  é um caso particular da covariância quando  $h_{ij} = 0$ , logo,  $Var(Y(\mathbf{d})) = C(0)$ .

Por ser mais restritiva, nem sempre a realização de um processo estocástico atende à estacionariedade de 2<sup>a</sup> ordem. Nesses casos, necessita-se, no mínimo, que a hipótese intrínseca seja satisfeita. Para Cressie (2015), um processo é intrinsecamente estacionário quando:

(i) a esperança da diferença da variável  $Y(\mathbf{d})$  nas posições  $\mathbf{d}_i$  e  $\mathbf{d}_j$  é nula,

$$E[Y(\mathbf{d}_i) - Y(\mathbf{d}_j)] = 0; \quad (2.3.3)$$

(ii) a variância da diferença  $[Y(\mathbf{d}_i) - Y(\mathbf{d}_j)]$  existe e depende apenas da distância entre as posições espaciais  $i$  e  $j$ ,

$$\frac{1}{2} \text{Var}[Y(\mathbf{d}_i) - Y(\mathbf{d}_j)] = \frac{1}{2} E\{ [Y(\mathbf{d}_i) - Y(\mathbf{d}_j)]^2 \} = \gamma(h_{ij}), \quad (2.3.4)$$

em que  $\gamma(h_{ij})$  representa a medida de dependência espacial denominada semivariância.

A semivariância é uma medida normalmente utilizada para descrever e modelar as relações entre as distâncias e a associação espacial das variáveis. Dessa forma, a mesma pode ser entendida como uma medida do grau de dependência espacial da variável de interesse, observada em duas posições espaciais diferentes. Entende-se ainda que, por ser uma medida de dissimilaridade, quanto menor a semivariância, mais forte é a associação entre as variáveis.

De acordo com Journel e Huijbregts (1978), se a hipótese de estacionariedade de 2<sup>a</sup> ordem for atendida, necessariamente, a hipótese intrínseca também é satisfeita. Nesse caso, é possível estabelecer uma relação entre a covariância  $C(h_{ij})$  e a semivariância  $\gamma(h_{ij})$ , a qual é dada por

$$C(h_{ij}) = C(0) - \gamma(h_{ij}). \quad (2.3.5)$$

Quando a variável é estacionária de segunda ordem, a correlação espacial ( $\rho$ ) é uma outra medida que pode ser utilizada para descrever a associação entre as variáveis. A correlação é definida como a razão entre a covariância dos valores observados pela variável  $Y$ , nas coordenadas  $\mathbf{d}_i$  e  $\mathbf{d}_j$  e a variância dessa variável, em função da distância  $h_{ij}$ . Dessa forma, tem-se

$$\rho(h_{ij}) = \frac{C(h_{ij})}{C(0)} = \frac{C(0) - \gamma(h_{ij})}{C(0)} = 1 - \frac{\gamma(h_{ij})}{C(0)}. \quad (2.3.6)$$

Segundo Yamamoto e Landim (2013), a função definida em (2.3.6) tem a vantagem de ser uma medida adimensional e estar limitada ao valor -1 e 1, permitindo comparações

entre variáveis e também inferências sobre o grau de associação espacial.

Na prática, porém, o que percebe-se é que a correlação de uma variável com ela mesma em pontos distintos é, quase sempre positiva e, portanto, variando entre 0 e 1. Com isso, para  $h_{ij} = 0$ , a correlação é máxima,  $\rho(\theta) = 1$ , e este valor vai decrescendo até o zero, ou seja, até uma distância para a qual não existe mais associação entre as observações.

Um importante fator a ser considerado é que existem fenômenos cujos valores de um determinado atributo não se comportam de forma uniforme na região em estudo. Nesses casos, a média  $\mu$  não pode ser considerada constante, violando o item (i) da hipótese de estacionariedade de 2<sup>a</sup> ordem. Assim, conforme afirma Soares (2006), diz-se que existe uma tendência nos dados, em que a média varia de acordo com as coordenadas geográficas da posição espacial que a variável ocupa. De acordo com Diggle e Ribeiro Júnior (2007), sendo esta tendência polinomial, uma possível modelagem para a mesma é dada por

$$\mu(\mathbf{d}_i) = \theta_0 + \sum_{j=1}^s \theta_j d_{ij}, \quad (2.3.7)$$

em que  $d_{ij}$  representa a  $j$ -ésima coordenada espacial da  $i$ -ésima realização da variável  $Y$ . Além disso,  $\theta_j$  são os parâmetros que descrevem essa relação, com  $j = 0, 1, \dots, s$ .

A tendência, como verificado em um processo de simulação por Teixeira e Scalon (2013), além de influenciar fortemente o ajuste de modelos de semivariância, omite, muitas vezes, o verdadeiro comportamento espacial da variável.

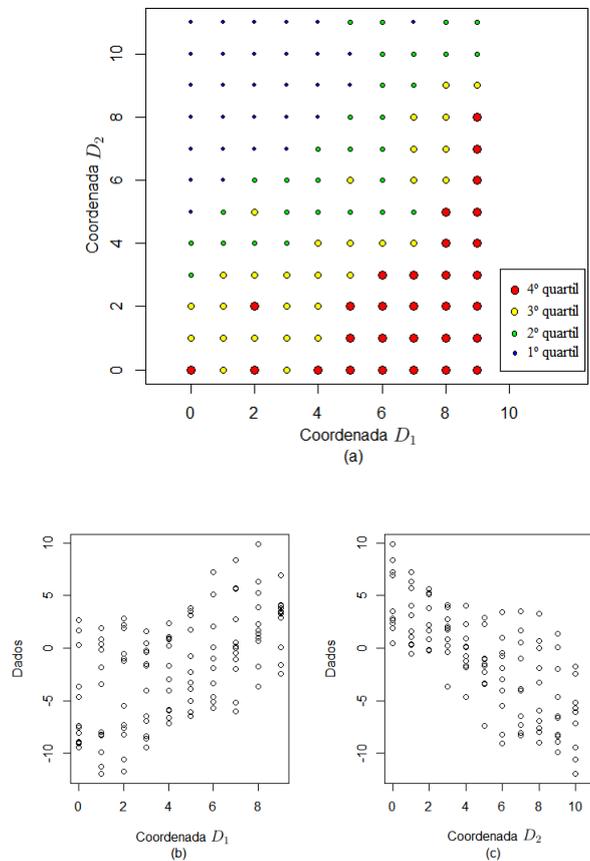
Como exemplo, na Figura 2.1(a) é possível observar a distribuição das observações de um dado experimento, de acordo com o quartil ao qual pertence.

Com uma breve inspeção visual desse gráfico é possível notar uma tendência nos dados em função da coordenada  $D_1$ , de modo que maiores valores da variável em estudo são encontrados nos valores maiores dessa coordenada. Além disso, percebe-se, ainda, uma tendência nos dados em função da coordenada  $D_2$ , sendo que os maiores da variável analisada são encontrados nos menores valores dessa coordenada.

A detecção da presença ou não de tendência dos dados é feita, na maioria das vezes, de forma subjetiva, a partir da análise dos gráficos de dispersão dos dados em função das coordenadas, conforme apresentados nas Figuras 2.1(b) e 2.1(c). A partir desses gráficos, na ausência de tendência, espera-se que os dados estejam distribuídos em torno de uma reta paralela ao eixo designado às coordenadas, ou seja, os valores observados distribuem-se próximos a  $\theta_0$ . Porém, se esses gráficos apresentam indícios que algum parâmetro  $\theta_j$ , com  $j = 1, \dots, s$  seja não nulo, sugerem-se conclusões afirmativas quanto a presença de

tendência espacial.

Figura 2.1 – Exemplo de tendência espacial nas observações, em função das coordenadas.



Em busca de maior objetividade, alguns autores, dentre eles Diggle e Ribeiro Júnior (2007), sugerem a utilização de modelos de regressão para verificar a presença da tendência, a qual é feita avaliando a significância dos parâmetros do modelo, ou seja, testando a hipótese  $\theta_j = 0$  contra  $\theta_j \neq 0$ .

Entretanto, é preciso advertir que esse teste de hipótese é feito de forma clássica, em que as estimativas são obtidas considerando um modelo de regressão linear que pressupõe erros independentes e, por isso, pode resultar em uma estimativa viesada, uma vez que essa pressuposição pode estar sendo violada.

Com isso, considera-se necessário que os testes acerca da significância dos parâmetros  $\theta_j$  também considerem a informação da covariância entre os erros. Dessa forma, uma vez obtida a estimativa das covariâncias dos erros, Diggle e Ribeiro Júnior (2007) sugerem uma atualização das estimativas dos parâmetros de regressão a partir da incorporação dessa informação na estimativa.

### 2.3.2 Semivariograma

O estimador de semivariância mais utilizado na literatura, proposto por Matheron em 1962, é conhecido como estimador ‘clássico’ ou, simplesmente, estimador de Matheron. Conforme afirma Cressie (2015), esse estimador pode ser definido por meio da seguinte expressão:

$$\hat{\gamma}(h_{ij}) = \frac{1}{2 n(h_{ij})} \sum_{n(h_{ij})} [y(\mathbf{d}_i) - y(\mathbf{d}_j)]^2, \quad (2.3.8)$$

em que

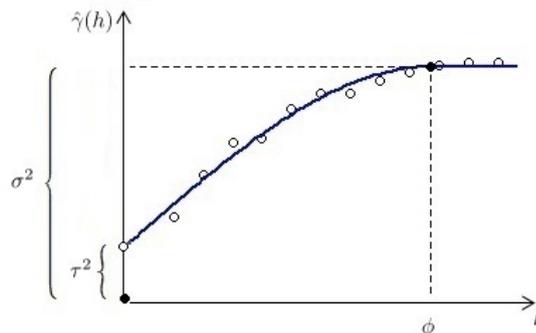
$\hat{\gamma}(h_{ij})$  é o estimador de semivariância;

$n(h_{ij})$  representa o número de pares de valores medidos que estão separados por uma distância  $h_{ij}$ ;

$y(\mathbf{d}_i)$  e  $y(\mathbf{d}_j)$  são realizações da variável aleatória  $Y$ , nas coordenadas  $\mathbf{d}_i$  e  $\mathbf{d}_j$ , de tal modo que esses pontos estão separados por uma distância  $h_{ij}$ .

O gráfico no qual são plotados os valores de semivariância em função das distâncias é chamado de semivariograma. Na Figura 2.2 ilustra-se o comportamento razoável de um semivariograma cuja variável atende à estacionariedade de segunda ordem.

Figura 2.2 – Semivariograma experimental com um modelo ajustado com os parâmetros alcance ( $\phi$ ), efeito pepita ( $\tau^2$ ) e patamar ( $\sigma^2$ ).



Na Figura 2.2 estão destacados os principais parâmetros do semivariograma, alcance, efeito pepita e patamar, os quais são definidos a seguir. Conforme Journel e Huijbregts (1978), o alcance ( $\phi$ ) é distância dentro da qual as amostras apresentam-se espacialmente dependentes. O patamar ( $\sigma^2$ ) é definido como o valor da semivariância na distância ( $\phi$ ), isto é,  $\gamma(\phi) = \sigma^2$ , e que corresponde, teoricamente, à variância dos

dados. Já o efeito pepita ( $\tau^2$ ) representa uma descontinuidade do semivariograma para distâncias menores do que a menor distância observada na amostra. Este parâmetro está associado à variabilidade totalmente aleatória dos dados, ou seja, refere-se à variância do erro experimental.

Define-se, ainda, o parâmetro contribuição ( $\varphi^2$ ), o qual está associado à variância estrutural, ou seja, a variabilidade regionalizada que pode ser explicada por um modelo com estrutura de dependência espacial. Esse parâmetro é dado pela diferença entre o patamar e o efeito pepita.

Uma vez que as semivariâncias representam informações discretas, ou seja, referem-se a um conjunto de distâncias específicas, torna-se necessário o ajuste de um modelo teórico contínuo para que, a partir desse modelo, seja possível estimar a semivariância para qualquer distância  $h$ .

Um modelo teórico de semivariância deve atender a exigência de positividade, a qual necessita que as covariâncias do modelo sejam definidas positivamente. Segundo Ribeiro Júnior (1995), essa condição é necessária para que o interpolador de krigagem tenha solução única.

De forma sucinta, a krigagem é um interpolador cujo objetivo é prever valores de uma variável espacial em posições não amostradas. Além de suas propriedades, não tendenciosidade e variância mínima, esse estimador é adotado em Geoestatística por considerar a informação das distâncias que separam as variáveis amostradas e a variável a ser predita.

Existem diversos modelos de semivariâncias que atendem a condição de positividade, os quais são ditos modelos autorizados. Dentre esses modelos, destacam-se na literatura os modelos esférico, exponencial e gaussiano, cujas funções de semivariâncias são dadas por:

*Modelo esférico:*

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } h = 0; \\ \tau^2 + \varphi^2 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{h}{\phi} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\phi} \right)^3 \right] & , \text{ se } 0 < h < \phi; \\ \sigma^2 & , \text{ se } h \geq \phi; \end{cases} \quad (2.3.9)$$

*Modelo exponencial:*

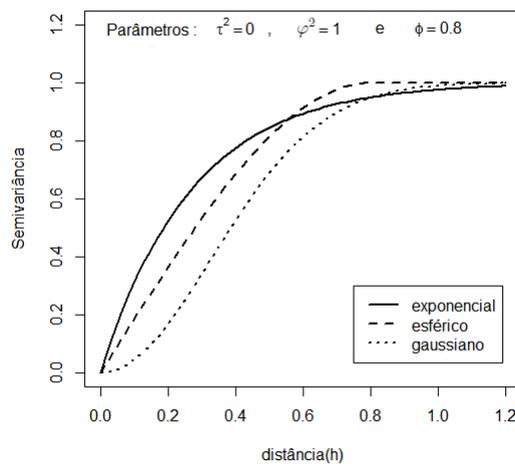
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } h = 0; \\ \tau^2 + \varphi^2 \left[ 1 - \exp \left( \frac{-h}{\phi} \right) \right] & , \text{ se } h \neq 0; \end{cases} \quad (2.3.10)$$

*Modelo gaussiano:*

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } h = 0; \\ \tau^2 + \varphi^2 \left[ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{h}{\phi} \right)^2 \right] \right] & , \text{ se } h \neq 0. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Na Figura 2.3 apresentam-se as curvas comportamentais desses modelos, considerando-se parâmetros específicos. Esses modelos destacam-se por apresentarem patamares cujos valores se estabilizam a partir de uma determinada distância, o que significa dizer que, a partir de um determinado alcance, a variância torna-se constante.

Figura 2.3 – Representação gráfica dos modelos de semivariância mais frequentes.



É importante ressaltar que, com exceção do modelo esférico no qual  $\phi$  refere-se ao alcance prático, nos demais modelos o patamar é obtido apenas assintoticamente. Assim, conforme Isaaks e Srivastava (1989), o alcance prático desses modelos é definido como sendo o valor da distância na qual se atinge 95% do patamar. A partir deste conceito, tem-se que, para o modelo exponencial o alcance prático é dado por  $3\phi$ , enquanto no modelo gaussiano esse alcance é  $\sqrt{3}\phi$ .

Ao ajustar um modelo que descreve uma variável espacial, a quantificação da dependência espacial pode ser uma importante medida para a caracterização da variável. Para Cambardella et al. (1994), tal mensuração pode ser realizada por meio do grau de dependência, cuja medida é dada pela razão entre o valor do efeito pepita e do patamar do semivariograma. Dessa forma, esses autores classificaram uma variável com

(i) *Forte dependência espacial:* se o efeito pepita for menor ou igual a 25% do patamar;

- (ii) *Moderada dependência espacial*: se o efeito pepita representar entre 25% e 75% do patamar;
- (iii) *Fraca dependência espacial*: se a relação entre efeito pepita e patamar estiver entre 75% e 100%;
- (iv) *Independência espacial*: se a relação entre efeito pepita e patamar for igual a 100%.

Entretanto, Seidel e Oliveira (2014), salientam sobre a fragilidade dessa mensuração do grau de dependência espacial, uma vez que esse índice leva em consideração apenas a informação presente nos parâmetros de efeito pepita e patamar. Esse é um dos motivos que pode levar o usuário a equivocadas interpretações sobre o grau de dependência espacial de um fenômeno, já que essa classificação despreza a informação que o alcance fornece sobre a dependência.

Diante disso, Seidel e Oliveira (2014) propuseram um novo índice de dependência espacial (IDE), que tem como fundamento o cálculo da área limitada pelos eixos cartesianos e a função de covariância do modelo avaliado. Esse índice, expresso em porcentagem, é definido por:

$$IDE = FM \cdot \left( \frac{\tau^2}{\sigma^2} \right) \cdot \left( \frac{\phi}{q \cdot MD} \right) \cdot 100,$$

em que  $FM$  é um fator do modelo cujos valores para os modelos esférico, exponencial e gaussiano são, respectivamente, 0,375; 0,317; e 0,504. Por fim,  $q \cdot MD$ , representa o valor que corresponde à fração ( $q$ ) atingida da máxima distância ( $MD$ ) entre pontos amostrados.

Esses autores mostraram, por meio de simulação, que a utilização desse índice resulta em uma descrição mais fidedigna sobre o grau de dependência espacial da variável.

### 2.3.3 Métodos de ajuste de modelos

Diferentes métodos são apresentados na literatura com a finalidade de ajustar um modelo teórico ao semivariograma. Segundo Ribeiro Júnior (1995), algumas características são desejáveis para esses métodos, entre elas, espera-se que esses ajustes sejam eficientes, principalmente, para pequenas distâncias.

Além disso, frequentemente, as semivariâncias para maiores distâncias são estimadas com menor número de pares e, conseqüentemente, com uma menor precisão. Por esta razão, justifica-se uma delimitação para a distância máxima dentro da qual a semivariância é estimada, conhecida como *cutoff* (ISAAKS; SRIVASTAVA, 1989).

Comumente, conforme recomenda Clark (2000), esse limite representa a metade da maior distância entre os pontos amostrados.

Essas características no ajuste dos modelos de semivariância serviram como argumento para a ampla utilização, até a década de 80, do ajuste ‘*a sentimento*’. De acordo com esse método, as estimativas dos parâmetros são obtidas por meio da inspeção visual do semivariograma, sem qualquer critério formal de estimação. Entretanto, devido à subjetividade inerente, esse método sempre foi alvo de questionamentos e, por isso, sua prática vem sendo restringida à obtenção de valores iniciais para os parâmetros, os quais são utilizados em outros métodos.

Em contrapartida, a apresentação de métodos teoricamente fundamentados, juntamente com o avanço dos recursos computacionais, possibilitaram o surgimento de outros métodos para o ajuste do semivariograma, os quais vêm obtendo ampla difusão. Entre esses métodos destacam-se os de quadrados mínimos (ordinários, ponderados e generalizados). Essa metodologia tem como base o estimador de semivariância, a partir do qual buscam-se estimativas para os parâmetros do modelo, de modo que esses minimizam a soma dos quadrados da diferença entre os valores observados e estimados de semivariância (MELLO et al., 2005).

Além dos métodos de quadrados mínimos, podem ser utilizados os métodos de máxima verossimilhança ou máxima verossimilhança restrita, os quais caracterizam-se por serem aplicados diretamente ao conjunto de dados. Segundo Diggle e Ribeiro Júnior (2007), esses métodos destacam-se pelas propriedades dos seus estimadores, que são consistentes e assintoticamente eficientes.

Esses métodos consistem em maximizar a função densidade de probabilidade em relação aos efeitos fixos e aos componentes de variância dos efeitos aleatórios do modelo, obtendo-se, a partir de uma amostra, o estimador “mais verossímil” dos parâmetros (OLIVEIRA, 2003).

É possível, ainda, utilizar métodos baseados na abordagem bayesiana. Mais detalhes sobre estes e os demais métodos citados podem ser encontrados em Cressie (2015), Diggle e Ribeiro Júnior (2007) e McBratney e Webster (1986), entre outros.

Conforme salienta Nogueira (2013), o ajuste do semivariograma exerce um papel fundamental e determinante para a construção da matriz de covariância das variáveis e, conseqüentemente, para uma análise espacial adequada dos experimentos.

Diante disso, fatores como a modelagem de tendência, a presença de *outliers*, a escolha do estimador de semivariância, dos modelos teóricos e métodos de ajustes dos mesmos ao semivariograma exercem uma forte influência nos resultados obtidos e, por isso, devem constar de uma etapa cautelosa na análise.

Uma vez que se pode optar pela escolha de diversos modelos ajustados por diferentes métodos, surge a necessidade de ferramentas que apontem qual modelo e método deve ser utilizado para melhor descrever a semivariância. Uma das técnicas para essa

escolha, consagrada na Geoestatística, é denominada como a validação cruzada.

### 2.3.4 Seleção de modelos espaciais

Conforme salienta Isaaks e Srivastava (1989), é possível selecionar, em um conjunto de modelos ajustados, o que apresentou melhor ajuste, por meio da validação cruzada.

Uma forma de realizar essa validação dá-se por meio do método *leave-one-out*. Essa técnica consiste, basicamente, em excluir uma observação e, considerando as observações restantes, estimar a observação excluída. Tal estimação é realizada a partir do interpolador de krigagem. Esse processo de exclusão e estimação se repete até que todas as observações tenham sido estimadas.

Com base na validação, a comparação entre os métodos e os modelos ajustados deve ser realizada por meio do Erro Médio Reduzido ( $\overline{ER}$ ) e do Desvio Padrão do Erro Reduzido ( $S_{ER}$ ) que, segundo McBratney e Webster (1986), são dados, respectivamente por:

$$\overline{ER} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y(\mathbf{d}_i) - \hat{y}(\mathbf{d}_i)}{\sigma_{d_i}} \right) \quad (2.3.12)$$

e

$$S_{ER} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y(\mathbf{d}_i) - \hat{y}(\mathbf{d}_i)}{\sigma_{d_i}} \right)^2}, \quad (2.3.13)$$

em que

$y(\mathbf{d}_i)$  é o valor observado na coordenada  $\mathbf{d}_i$ ;

$\hat{y}(\mathbf{d}_i)$  é o valor estimado para a coordenada  $\mathbf{d}_i$ ;

$\sigma_{d_i}$  o desvio padrão da krigagem no ponto  $\mathbf{d}_i$  e

$n$  é o número de observações amostradas.

Segundo Cressie (2015), o modelo de semivariância escolhido deve ser aquele que apresentar o Erro Médio Reduzido mais próximo de zero e o Desvio Padrão do Erro Reduzido mais próximo de um.

## 2.4 Distribuição de variáveis espaciais

Conforme mencionado na seção (2.3.1), a distribuição espacial de uma variável aleatória  $Y(\mathbf{d})$  pode ser modelada por meio do processo estocástico  $\{Y(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \in R \subset \mathbb{R}^s\}$ .

Dado que o processo atende à estacionariedade de segunda ordem, pode-se representar essa variável a partir de um modelo linear composto pela soma de três componentes: uma tendência determinística, uma componente aleatória espacialmente correlacionada e, por fim, uma componente aleatória independente, usualmente denominada de erro aleatório.

Desse modo, de acordo com Burrough (1987), a variável aleatória  $Y$ , indexada pelo vetor de coordenadas  $\mathbf{d}$ , é dada por:

$$Y(\mathbf{d}) = \mu(\mathbf{d}) + S(\mathbf{d}) + \varepsilon(\mathbf{d}), \quad (2.4.1)$$

em que

$\mu(\mathbf{d})$  é uma componente determinística, podendo ser interpretada como uma tendência associada a um valor médio constante;

$S(\mathbf{d})$  é uma variável aleatória com dependência espacial. É nesta componente que está inserida a contribuição dos modelos geoestatísticos, uma vez que em modelos lineares clássicos a informação desta variável encontra-se agregada ao erro aleatório.

$\varepsilon(\mathbf{d})$  é uma variável aleatória, frequentemente denominada erro aleatório, a qual se considera independente e identicamente distribuída em todos os pontos da região  $R$ .

Conforme Diggle e Ribeiro Júnior (2007), assume-se que a variável  $S$  tem média zero,  $E[S(\mathbf{d})] = 0$  e função de covariância  $C[S(\mathbf{d}_i), S(\mathbf{d}_j)]$ , parametrizada por  $\phi$ , o parâmetro de alcance do semivariograma. Quando  $i = j$ ,  $C[S(\mathbf{d}_i), S(\mathbf{d}_j)] = \varphi^2$ , que refere-se ao parâmetro de contribuição. Já para  $i \neq j$ ,  $C(\cdot)$  assume algum valor, que não necessariamente deve ser zero.

Com isso, admitindo que  $S(\mathbf{d})$  segue uma distribuição normal, a distribuição do vetor  $\mathbf{S}$ , o qual contém a componente  $S(\mathbf{d})$  referente as  $n$  observações amostradas, é dada por  $\mathbf{S} \sim N(\mathbf{0}, \varphi^2 \mathbf{F})$ , em que  $\mathbf{0}$  corresponde a um vetor de zeros e  $\mathbf{F}$  representa a matriz de correlação do vetor  $\mathbf{S}$ .

Já para a variável  $\varepsilon$ , considera-se que esta apresenta média zero,  $E[\varepsilon(\mathbf{d})] = 0$ , variância dada pelo parâmetro de efeito pepita do semivariograma,  $Var[\varepsilon(\mathbf{d})] = \tau^2$  e, satisfazendo a suposição de independência, quando  $i \neq j$ , tem-se que  $C[\varepsilon(\mathbf{d}_i), \varepsilon(\mathbf{d}_j)] = 0$ ,  $\forall \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \in R$ .

Ao supor que  $\varepsilon$  tem distribuição normal, a distribuição do vetor de erros aleatórios é dada por  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}\tau^2)$ , no qual  $\mathbf{I}$  representa uma matriz identidade.

Considera-se, ainda, que as variáveis  $S(\mathbf{d})$  e  $\varepsilon(\mathbf{d})$  são independentes e, desse modo,  $C[S(\mathbf{d}), \varepsilon(\mathbf{d})] = 0$ .

A partir dessas informações, é possível determinar a distribuição do vetor  $\mathbf{Y}$ , o qual apresenta matriz de covariâncias dada por  $\Sigma$ , em que:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} C[Y(\mathbf{d}_1), Y(\mathbf{d}_1)] & C[Y(\mathbf{d}_1), Y(\mathbf{d}_2)] & \cdots & C[Y(\mathbf{d}_1), Y(\mathbf{d}_n)] \\ C[Y(\mathbf{d}_2), Y(\mathbf{d}_1)] & C[Y(\mathbf{d}_2), Y(\mathbf{d}_2)] & \cdots & C[Y(\mathbf{d}_2), Y(\mathbf{d}_n)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C[Y(\mathbf{d}_n), Y(\mathbf{d}_1)] & C[Y(\mathbf{d}_n), Y(\mathbf{d}_2)] & \cdots & C[Y(\mathbf{d}_n), Y(\mathbf{d}_n)] \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\Sigma$  será especificada considerando dois casos, sendo eles, quando o efeito pepita é nulo e quando este é não nulo.

### 1º caso: Efeito pepita nulo ( $\tau^2 = 0$ ):

Neste caso, tem-se que o patamar e a contribuição são coincidentes, ou seja,  $\sigma^2 = \varphi^2$ . Dessa forma, para qualquer posição espacial  $\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \in R$ , tem-se que a variância e a covariância da variável aleatória  $Y$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} C[Y(\mathbf{d}_i), Y(\mathbf{d}_j)] &= \sigma^2, \text{ se } i = j; \\ C[Y(\mathbf{d}_i), Y(\mathbf{d}_j)] &= C[S(\mathbf{d}_i), S(\mathbf{d}_j)], \text{ se } i \neq j. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Assumindo que a variável  $Y(\mathbf{d})$  é estacionária de segunda ordem,  $S(\mathbf{d})$  também será e, com isso,  $C[Y(\mathbf{d}_i), Y(\mathbf{d}_j)] = C(h_{ij})$ , em que  $h_{ij} = \|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j\|$  representa a distância euclidiana entre as posições  $i$  e  $j$ . A partir desse fato, a matriz  $\Sigma$  pode ser reescrita como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & C(h_{12}) & \cdots & C(h_{1n}) \\ C(h_{12}) & \sigma^2 & \cdots & C(h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(h_{1n}) & C(h_{2n}) & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as relações entre as medidas de associação espacial, em que  $\rho(h_{ij}) = C(h_{ij})/\sigma^2$ , tem-se

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho(h_{12}) & \cdots & \rho(h_{1n}) \\ \rho(h_{12}) & 1 & \cdots & \rho(h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h_{1n}) & \rho(h_{2n}) & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{V},$$

em que  $\mathbf{V} = \mathbf{F}$  é a matriz de correlação do vetor  $\mathbf{Y}$ .

**2º caso: Efeito pepita não nulo ( $\tau^2 > 0$ ):**

Neste caso, o patamar é dado por  $\sigma^2 = \varphi^2 + \tau^2$ , que representa a variância de  $Y$ . Já a covariância entre  $Y(\mathbf{d}_i)$  e  $Y(\mathbf{d}_j)$ , é definida conforme expressão (2.4.2). Como apresenta Diggle e Ribeiro Júnior (2007), utilizando as distribuições definidas anteriormente para as componentes de  $Y$ , tem-se que:

$$\Sigma = \varphi^2 \mathbf{F} + \tau^2 \mathbf{I},$$

$$\Sigma = \varphi^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho(h_{12}) & \cdots & \rho(h_{1n}) \\ \rho(h_{12}) & 1 & \cdots & \rho(h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h_{1n}) & \rho(h_{2n}) & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \tau^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \varphi^2 + \tau^2 & \varphi^2 \rho(h_{12}) & \cdots & \varphi^2 \rho(h_{1n}) \\ \varphi^2 \rho(h_{12}) & \varphi^2 + \tau^2 & \cdots & \varphi^2 \rho(h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^2 \rho(h_{1n}) & \varphi^2 \rho(h_{2n}) & \cdots & \varphi^2 + \tau^2 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\varphi^2}{\sigma^2} \rho(h_{12}) & \cdots & \frac{\varphi^2}{\sigma^2} \rho(h_{1n}) \\ \frac{\varphi^2}{\sigma^2} \rho(h_{12}) & 1 & \cdots & \frac{\varphi^2}{\sigma^2} \rho(h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi^2}{\sigma^2} \rho(h_{1n}) & \frac{\varphi^2}{\sigma^2} \rho(h_{2n}) & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{V},$$

em que  $\rho(h_{ij})$  é a correlação referente à variável  $S$ , enquanto  $\mathbf{V}$  é a matriz de correlação do vetor  $\mathbf{Y}$ .

Considerando o modelo especificado em (2.4.1), a esperança de  $Y$  é dada por

$E[Y(\mathbf{d})] = \mu(\mathbf{d})$ . Assim sendo, ao adotar o modelo de regressão em função das coordenadas para descrever a tendência espacial, conforme especificado na equação (2.3.7), tem-se que o vetor de médias, composto por  $\mu(\mathbf{d}_i), \forall \mathbf{d}_i \in R$ , é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \theta_0 + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_s \end{bmatrix},$$

em que  $d_{ij}$  representa a  $j$ -ésima coordenada espacial da  $i$ -ésima realização de  $Y$ , enquanto  $\theta_j$ , com  $j = 0, 1, \dots, s$ , são os parâmetros que descrevem a relação entre as coordenadas e a variável  $Y$ .

Fazendo uma analogia com as notações definidas na seção (2.2), o vetor de 1's será denotado por  $\mathbf{X}_1$ , enquanto  $\theta_0$ , por representar a média geral inerente a todas as observações, será representado por  $\mu$ .

Definindo  $\mathbf{D}$  como uma matriz de coordenadas, de ordem  $n \times s$ , em que  $s$  é o número de coordenadas que indexam cada uma das  $n$  realizações de  $Y$  e  $\boldsymbol{\theta}$  é um vetor contendo os  $s$  parâmetros dessas coordenadas, a esperança de  $\mathbf{Y}$  é, então, dada por:

$$E[Y(\mathbf{d})] = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mu \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{X}_1\mu + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}.$$

Porém, deve-se ressaltar ainda que, ao realizar um experimento, designando diferentes efeitos de tratamentos a essas variáveis espaciais, a esperança de  $\mathbf{Y}$  será:

$$E[Y(\mathbf{d})] = \mathbf{X}_1\mu + \mathbf{X}_2\mathbf{t} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta},$$

em que  $\mathbf{t}$  representa um vetor que contém os efeitos dos tratamentos  $t_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ , enquanto  $\mathbf{X}_2$  constitui a matriz de incidência desses efeitos.

Finalmente, pode-se concluir que o vetor  $\mathbf{Y}$ , constituído por  $Y(\mathbf{d}_i)$  em todas as posições espaciais  $\mathbf{d}_i \in R$  amostradas, segue uma distribuição normal dada por

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}_1\mu + \mathbf{X}_2\mathbf{t} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (2.4.3)$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V} = \varphi^2\mathbf{F} + \tau^2\mathbf{I}$ .

Vale ressaltar que esse modelo representa uma generalização dos modelos lineares clássicos, uma vez que, na ausência de tendência espacial em função das coordenadas, tem-

se que  $\mathbf{D}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ . Além disso, em caso de independência espacial,  $\varphi^2\mathbf{F} = \mathbf{0}$  e, portanto, o modelo espacial apresentado em (2.4.3) reduz-se a um modelo linear fixo clássico.

Analisando essa distribuição, fica evidente que o desprezo dos efeitos espaciais, uma vez que os mesmos estão presentes no modelo, compromete não apenas a estrutura da matriz de covariâncias, mas também as informações acerca de resultados médios esperados.

Consequentemente, os testes de hipóteses, realizados para as comparações entre as médias dos tratamentos, podem direcionar a resultados equivocados, uma vez que os efeitos espaciais são ignorados na modelagem.

## 2.5 Testes de hipóteses

Um teste de hipóteses é visto como um processo utilizado para decidir se uma hipótese é verdadeira ou não ou, mais especificamente, se os resultados obtidos com os diversos tratamentos são diferentes ou não. O teste de hipótese é o mais generalizado instrumento de indução estatística, a partir do qual é possível tirar conclusões sobre parâmetros de uma população, utilizando a informação contida em uma amostra da mesma (MONTGOMERY, 2008).

Se a informação contida na amostra for consistente com uma hipótese, então aceita-se essa hipótese como verdadeira. Porém, se houver evidências suficientes na amostra que divergem da informação especificada em uma hipótese, conclui-se que esta não é verdadeira.

Em geral, para se aplicar um teste de hipótese, são formuladas, inicialmente, duas hipóteses a respeito de um parâmetro de interesse, sendo a primeira comumente chamada de hipótese nula ( $H_0$ ) e a segunda definida como hipótese alternativa ( $H_1$ ). Essas hipóteses devem ser mutuamente exclusivas e complementares, de modo que a rejeição de uma implica em não rejeição da outra e, juntas, definem todo o espaço paramétrico.

Porém, vale ressaltar que, com exceção dos casos em que toda a população é avaliada, não é possível conhecer, com certeza absoluta, qual é a hipótese verdadeira. Contudo, mesmo assim, é necessário tomar uma decisão acerca da veracidade e falsidade das hipóteses formuladas. Em consequência disso, toda inferência realizada a partir de um teste de hipótese está sujeita a erros.

### 2.5.1 Taxas de erro e poder de testes

Conforme especifica Pimentel-Gomes (2000), a Tabela 2.3 apresenta as decisões que podem ser tomadas em um teste de hipóteses.

Tabela 2.3 – Tipos de erros associados a decisão em um teste de hipóteses.

Decisão	$H_0$ verdadeira	$H_0$ falsa
Não rejeitar $H_0$	Correta	Erro tipo II
Rejeitar $H_0$	Erro tipo I	Correta

sendo que o erro tipo I dá-se em rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira, enquanto o erro tipo II é causado por aceitar  $H_0$  quando essa é falsa.

Conforme definido em Bussab e Morettin (2004), a probabilidade de se cometer o erro tipo I é definida como

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}).$$

Em contrapartida, a probabilidade de cometer o erro tipo II é dada por

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}).$$

De forma geral,  $\alpha$  é conhecido como o nível de significância de um teste, cujo o valor é pré-estabelecido pelo pesquisador, enquanto  $\beta$  não é controlado diretamente. Porém, Banzatto e Kronka (2006) ressaltam que essas probabilidades de erros são inversamente proporcionais, de modo que, a medida que se diminui a probabilidade de ocorrência de um, a probabilidade de ocorrência do outro aumenta.

É possível, ainda, determinar o poder de um teste. Segundo Mood et al. (1974), o mesmo é definido como a probabilidade de se rejeitar a hipótese nula  $H_0$  quando, na verdade, ela é falsa. Com isso, o poder de um teste é obtido por  $1 - \beta$ , ou seja, é dado pelo complemento do erro tipo II.

Quando uma análise de experimento aponta existir diferenças entre as médias dos tratamentos, geralmente, o intuito recai em comparar essas médias entre si ou combinações das mesmas. Os testes utilizados para avaliar um conjunto de comparações de médias de tratamentos são denominados testes para comparações múltiplas.

De acordo com Machado et al. (2005), ao realizar testes de comparações múltiplas, a probabilidade de não se cometer nenhum erro do tipo I em um conjunto de  $p$  comparações, se estas forem independentes entre si, é dada por  $(1 - \alpha)^p$ .

O controle da taxa de erro tipo I, de forma a garantir que o nível de probabilidade desejado em um conjunto de comparações múltiplas seja alcançado, leva a uma redução do poder dos testes. Os métodos que se baseiam nesse tipo de controle são considerados conservativos por garantirem proteção excessiva, uma vez que, a probabilidade de se cometer o erro tipo I torna-se inferior ao valor  $\alpha$  estabelecido (SNEDECOR; COCHRAN, 1980).

Sendo assim, para avaliar o controle concedido por um teste de comparação múltipla, Carmer e Swanson (1973) destacam duas medidas que podem ser utilizadas para

calcular a taxa de erro tipo I, as quais são conhecidas como taxas de erro por comparação e por experimento.

A taxa de erro por comparação (TEC), também chamada de “*comparisonwise error rate*”, é obtida pela razão entre o número de vezes que o erro tipo I foi cometido e o número total de comparações realizadas, ou seja:

$$TEC = \frac{\text{Número de decisões erradas}}{\text{Número de decisões}}.$$

Conforme relata Steel e Torrie (1980), essa é uma importante taxa, uma vez que reflete a probabilidade de se rejeitar uma hipótese verdadeira em todas as possíveis combinações de médias dos tratamentos.

Já a taxa de erro por experimento (TEE), também denominada como “*experimentwise error rate*”, é obtida pela razão entre o número de experimentos em que as decisões tomadas acarretaram em um ou mais erros tipo I e o número total de experimentos. Assim, essa taxa é definida por

$$TEE = \frac{\text{Número de experimento com pelo menos uma decisão errada}}{\text{Número total de experimentos}}.$$

Quando se deseja comparar testes, bem como avaliar a adequabilidade dos mesmos, a taxa de erro por experimento é preferível em relação à taxa de erro por comparação. Essa opção é fundamentada pelo fato de que a grande maioria dos testes, utilizados para comparações múltiplas, mantém a TEC abaixo do nível nominal estipulado, enquanto a manutenção da TEE dentro do nível nominal requer testes mais eficientes.

Para decidir se as taxas de erro tipo I podem ser consideradas estatisticamente iguais aos níveis nominais estabelecidos, uma alternativa é utilizar um intervalo de confiança (*IC*) para proporções. Segundo Leemis e Trivedi (1996), o intervalo de confiança exato para uma proporção é dado por

$$IC_{1-\alpha}(taxa) = \left[ \frac{1}{1 + \frac{n-x+1}{xF_{2x,2(n-x+1),1-\alpha/2}}} ; \frac{1}{1 + \frac{n-x}{(x+1)F_{2(x+1),2(n-x),\alpha/2}}} \right], \quad (2.5.1)$$

em que  $F$  é o quantil da distribuição F de Snedecor, cujos índices representam os graus de liberdade e a probabilidade à direita do quantil. Considerando o intervalo para a TEC,  $n$  representa o número de decisões tomadas e  $x$  o número de vezes em que a decisão ocasionou o erro tipo I. Já para o caso da TEE,  $n$  representa o número de experimentos

avaliados e  $x$  o número de experimentos em que o erro tipo I foi cometido no mínimo uma vez.

A partir daí, como menciona Borges e Ferreira (2003) e Santos, Ferreira e Bueno Filho (2001), entre outros, os níveis de erro tipo I que não pertencerem aos intervalos obtidos, devem ser considerados diferentes dos níveis nominais de significância estabelecidos.

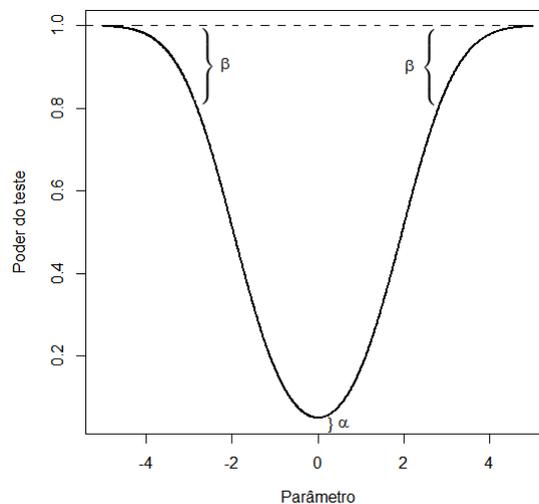
Conforme relata Mood et al. (1974), para se escolher um melhor teste, deve-se optar por aquele que, além de manter o nível de significância estabelecido, é o mais poderoso dentre todos os testes avaliados.

A função poder, como definido por Mood et al. (1974), representa uma função que define o poder do teste em todo o espaço paramétrico.

Os testes utilizados para comparações de médias de tratamentos, usualmente, são bilaterais, uma vez que o interesse é comparar se a diferença entre duas médias (ou dois grupos de médias) é igual ou não a zero.

Para esses testes, o comportamento da função poder, bem como as probabilidades de erro tipo I e tipo II, são especificados na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Comportamento da função poder para um teste bilateral.



Quando a hipótese alternativa é considerada verdadeira, só é possível concluir que o valor do parâmetro (ou combinação deles) testado difere de zero. Porém, não se conhece qual é o verdadeiro valor para o parâmetro, dificultando, com isso, a determinação do valor de  $\beta$  (BUSSAB; MORETTIN, 2004).

Assim, a comparação de testes em relação ao poder dos mesmos é feita supondo alguns valores específicos do espaço paramétrico, frequentemente definido pela diferença entre o valor “real” do parâmetro e o valor especificado em  $H_0$ .

Vale salientar que, enquanto a taxa de erro tipo I é obtida a partir de testes cujas hipóteses nulas são verdadeiras, o poder de um teste é calculado em testes que apresentam hipóteses alternativas verdadeiras.

O poder do teste pode ser estimado por meio da porcentagem da razão entre o número total de decisões corretas, ou seja, o número de vezes que o teste de comparação múltipla rejeitou  $H_0$ , e o número total de decisões. Desse modo, o poder do teste é obtido de acordo com

$$\frac{\text{Número de decisões corretas}}{\text{Número de decisões}} \times 100\%.$$

Quanto maior o valor dessa medida, mais poderoso é considerado o teste.

### 2.5.2 Teste de razão de verossimilhanças generalizado

Um procedimento geral que pode ser utilizado para avaliar e decidir sobre um par de hipótese é a partir do teste de razão de verossimilhanças generalizado. Para aplicação do mesmo, é necessário supor uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória  $Y$ , para a qual, frequentemente, considera-se a distribuição normal.

A princípio, seja uma variável aleatória  $Y$ , cuja função densidade de probabilidade é dada por  $f(y; \mu)$ , em que  $\mu$  denota um parâmetro de interesse arbitrário, pertencente ao espaço paramétrico  $\Theta$ .

Seja  $L(\mu|y_1, \dots, y_n)$  a função de verossimilhança de  $\mu$ , dadas as realizações  $y_1, \dots, y_n$  das variáveis aleatórias independentes  $Y_1, \dots, Y_n$ . Considerando que essas variáveis são identicamente e independentemente distribuídas, a função densidade de probabilidade conjunta é expressa por

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n; \mu) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i; \mu),$$

resultando na função de verossimilhanças definida como

$$L(\mu|y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(\mu; y_i).$$

A partir daí, suponha que o interesse seja avaliar as hipóteses

$$H_0 : \mu \in \Theta_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu \in \Theta_1,$$

em que  $\Theta_0 \subset \Theta$  e  $\Theta_1 \subset \Theta$ , referem-se aos espaços paramétricos sob cada hipótese.

Para a formulação do teste de razão de verossimilhanças é necessário obter o máximo da função de verossimilhanças a partir de cada hipótese avaliada. Assim, será definido

$$L_0 = \sup_{\mu \in \Theta_0} L(\mu|y_1, \dots, y_n) \quad \text{e} \quad L_1 = \sup_{\mu \in \Theta_1} L(\mu|y_1, \dots, y_n).$$

O valor de  $\mu$  para o qual a função de verossimilhança assume seu valor máximo é obtido por meio do estimador de máxima verossimilhança (EMV). Este estimador é encontrado derivando a função de verossimilhança, ou o logaritmo neperiano desta função, e igualando a zero.

O EMV para  $\mu$  obtido sob  $H_0$  é substituído em  $L(\mu|y_1, \dots, y_n)$  para definir  $L_0$ . Analogamente, ao considerar a hipótese  $H_1$ , o EMV encontrado sob essa hipótese deve ser substituído na função de verossimilhanças para o cálculo de  $L_1$ .

A estatística do teste de razão de verossimilhanças é dada por  $L_0/L_1$ . Conforme Mood et al. (1974), a hipótese nula ( $H_0$ ) deve ser rejeitada quando esta razão for menor ou igual que uma determinada constante ( $c$ ). Essa constante é identificada a partir da especificação de uma distribuição conhecida para esta estatística, a qual pode ser encontrada utilizando propriedades de funções monótonas.

Uma estatística assintótica que pode ser adotada para este teste é dada por

$$\Lambda = -2 \ln \left( \frac{L_0}{L_1} \right), \quad (2.5.2)$$

de modo que  $H_0$  deve ser rejeitada quando  $\Lambda$  for maior ou igual um valor constante específico. Se  $H_0$  é verdadeira,  $\Lambda$  tem distribuição assintótica  $\chi^2$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

O grau de liberdade ( $\nu$ ) desta distribuição pode ser especificado de duas formas: pelo número de parâmetros especificado em  $H_0$ , ou por meio da diferença entre as dimensões dos espaços paramétricos considerados em cada uma das hipóteses (MOOD et al., 1974).

Definindo  $\alpha$  como o nível de significância do teste, tem-se que  $P(\Lambda \geq c) = \alpha$ , em que esta constante ( $c$ ) é dada pelo quantil da distribuição qui-quadrado  $\chi^2$  cuja área a sua direita é  $\alpha$  e, desse modo, a hipótese  $H_0$  deve ser rejeitada quando a estatística  $\Lambda \geq \chi^2_{(\nu, \alpha)}$ .

## 2.6 Testes de comparações múltiplas

Em uma análise de experimentos, quando os resultados do teste  $F$  da análise de variância levam à rejeição da hipótese nula, tem-se, então, evidências de que pelo menos uma das médias dos tratamentos diferem significativamente entre si.

Entretanto, quando avaliam-se mais de dois tratamentos, esse teste é insuficiente para identificar onde ocorrem tais diferenças. Nestes casos, recomenda-se aplicar algum tipo de procedimento de comparações múltiplas, os quais permitem testar se as diferenças entre pares de médias específicos ou de combinações lineares das médias são significativamente diferentes de zero ou não.

Os procedimentos de comparações múltiplas são largamente utilizados devido a vários motivos, tais como: a facilidade de aplicação por envolver operações matemáticas simples, a grande disponibilidade de recursos computacionais, de fácil acesso, destinado a este fim, além da grande difusão e aceitação desses testes.

Entre os principais métodos de comparações múltiplas destacam-se os testes de Tukey, Student-Newman-Keuls (SNK),  $t$  de Student (LSD) e Duncan. Dentre esses, o teste de Tukey desponta como o procedimento de comparação múltipla mais utilizado na literatura. Este teste caracteriza-se por controlar a taxa de erro tipo I por experimento, sendo bastante conservador com relação à taxa de erro tipo I por comparação, além de manter constante a taxa desse erro, independente do número de médias testadas (ZIMMERMANN, 2004).

Porém, uma dificuldade encontrada na utilização desse procedimento é a interpretação dos seus resultados. Essa dificuldade ocorre pela característica de ambiguidade que os resultados fornecem, a qual decorre da possibilidade de dois níveis de tratamentos serem considerados iguais a um terceiro, porém, diferentes entre si. Isso faz com que o pesquisador, em alguns casos, tenha muita dificuldade na interpretação dos resultados e na recomendação do melhor tratamento.

Uma alternativa para contornar esse inconveniente é a aplicação do teste aglomerativo de Scott e Knott (1974). A grande vantagem desse teste é que, diferentemente dos demais, nenhuma média pode pertencer a mais de um agrupamento, impossibilitando a ambiguidade dos resultados. Desse modo, esse procedimento surge como opção para a realização de comparações múltiplas, destacando-se por sua maior objetividade e clareza na interpretação.

Nas seções seguintes serão destacados mais detalhes a respeito do teste Tukey, por meio da distribuição da amplitude estudentizada e da  $t$  multivariada, além do teste Scott-Knott.

### 2.6.1 Teste Tukey

O teste proposto por Tukey (1953), conhecido como teste de Tukey da diferença honestamente significativa (*honestly significant difference* – HSD), tem como objetivo realizar comparações de médias duas a duas. Com isso, esse procedimento testa as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu_i = \mu_j \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

para todas as combinações de  $i$  e  $j$ , com  $i \neq j$ . Assim, ao avaliar  $k$  médias de tratamentos, podem ser feitas  $k(k-1)/2$  comparações de médias.

Conforme salienta Zorzatto (1985), para que esse teste seja exato, é necessário que algumas suposições sejam atendidas, dentre elas: normalidade e independência das observações, médias oriundas de amostras com o mesmo tamanho, além da homogeneidade de variância. Quando essas condições são satisfeitas, o nível de significância conjunto corresponde exatamente ao valor  $\alpha$  fixado.

A estratégia do teste de Tukey consiste em definir a menor diferença significativa, também conhecida como diferença mínima significativa (*DMS*). Para isso, esse procedimento utiliza a distribuição da amplitude estudentizada.

Assim, ao avaliar  $k$  amostras, todas com tamanho  $r$ , definindo  $\bar{Y}_i$  como a média aritmética da amostra  $i$ , supõe-se que as variáveis aleatórias  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_k$  são independentes e normalmente distribuídas com uma média geral  $\mu$  e variância  $\sigma^2/r$ .

Ao definir  $Q$  como a amplitude desse conjunto de  $k$  variáveis,

$$Q = \max(\bar{Y}_i) - \min(\bar{Y}_i),$$

tem-se que a distribuição da amplitude estudentizada é obtida por

$$q_{(k, \nu)} = \frac{Q}{\hat{\sigma}},$$

em que  $\hat{\sigma}$  é estimador do desvio padrão ( $\sigma$ ), determinado com  $\nu$  graus de liberdade; de modo que  $Q$  e  $\hat{\sigma}$  devem ser independentemente distribuídas.

Dessa forma, o contraste entre duas médias de tratamentos  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{Y}_j$ , pode ser testado utilizando a *DMS*, definida como:

$$DMS = q_{(\alpha, k, \nu)} \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V} \hat{a} r (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j)}, \quad (2.6.1)$$

em que  $q_{(\alpha, k, \nu)}$  é o quantil da distribuição da amplitude estudentizada cuja área a sua direita é  $\alpha$ , sendo esse último o nível de significância estabelecido para o teste.

De acordo com Pimentel-Gomes (2009), o teste de Tukey declara que duas médias,  $\mu_i$  e  $\mu_j$  são significativamente diferentes se a estimativa do valor absoluto de suas diferenças amostrais, isto é,  $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$ , ultrapassar o valor da *DMS*. Caso contrário, não se rejeita a hipótese de igualdade entre as médias avaliadas.

No caso de dados balanceados, ou seja, todos os tratamentos com o mesmo número

$r$  de repetições e homogeneidade de variância, a equação (2.6.1) pode ser simplificada por

$$DMS = q_{(\alpha, k, \nu)} \sqrt{\frac{QMRes}{r}}, \quad (2.6.2)$$

em que  $QMRes$  representa o estimador da variância dado pelo quadrado médio do resíduo.

Entretanto, conforme proposto por Dunnett (1980) e amplamente mencionado por Littell et al. (2006), quando o tamanho das amostras são diferentes (dados não balanceados), o teste de Tukey sofre uma modificação, passando a ser denominado por vários autores como teste de Tukey-Kramer. Esse teste não é exato, mas é considerado minimamente conservativo, uma vez que o nível de significância conjunto, é muitas vezes, menor que o valor  $\alpha$  fixado.

De acordo com o teste de Tukey-Kramer, duas médias  $\mu_i$  e  $\mu_j$ , serão consideradas significativamente diferentes se o valor absoluto de suas diferenças amostrais ultrapassar

$$DMS = q_{(\alpha, k, \nu)} \sqrt{\frac{QMRes}{2} \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \right)}, \quad (2.6.3)$$

de modo que  $r_i$  e  $r_j$  representam, respectivamente, o número de repetições referente às amostras que receberam os tratamentos  $i$  e  $j$ .

Dunnett (1980), argumentando sobre o processo mais trabalhoso para a aplicação do teste por meio da equação (2.6.3), menciona a utilização de uma média harmônica do número de repetições na equação (2.6.2). Dessa forma:

$$DMS = q_{(\alpha, k, \nu)} \sqrt{\frac{QMRes}{r_h}}, \quad \text{em que} \quad r_h = \frac{k}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i}} \quad (2.6.4)$$

Além disso, outras adaptações podem ser consideradas quando se têm variâncias heterogêneas. Conforme Dunnett (1980), nesses casos, a  $DMS$  do teste passa a ser representada como:

$$DMS = A_{ij, \alpha, k} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_i^2}{r_i} + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{r_j}}, \quad (2.6.5)$$

em que  $\hat{\sigma}_i^2$  e  $\hat{\sigma}_j^2$  estimam as variâncias referentes aos tratamentos  $i$  e  $j$  e  $A_{ij, \alpha, k}$  é escolhido de forma a manter o nível de significância conjunto  $\alpha$  desejado. Para isso, alguns métodos de aproximações e/ou simulações devem ser utilizados. Mais detalhes desses procedimentos são encontrados em Hsu (1996), Dunnett (1980), Littell et al. (2006), entre outros.

Finalmente, é possível, ainda, realizar comparações a partir da construção de intervalos de confiança para a diferença de duas médias, cujos limites são dados por

$$IC(\mu_i - \mu_j) = (\bar{y}_i - \bar{y}_j) \pm DMS.$$

Por meio desses intervalos de confiança, as duas médias comparadas não serão consideradas diferentes se o intervalo criado contiver o valor zero.

### 2.6.2 Teste $t$ multivariado

A distribuição  $t$  de Student univariada é definida pela razão entre uma variável aleatória normal padronizada  $N(0,1)$ , isto é, com média zero e variância 1, por outra originada da raiz quadrada de uma variável aleatória independente qui-quadrado ( $\chi^2$ ) dividida pelos seus graus de liberdade. Nesse caso, definindo  $Z \sim N(0,1)$  e  $U \sim \chi^2_\nu$ , em que  $\nu$  é o grau de liberdade de  $U$ , a variável aleatória

$$X = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}},$$

possui distribuição  $t$  de Student, com função densidade dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\pi\nu)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[1 + \frac{x^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Essa distribuição pode ser utilizada quando se deseja avaliar hipóteses acerca de um contraste de médias. Um contraste de médias  $T$  pode ser definido como combinação linear entre as médias, de forma que

$$T = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_k\mu_k, \quad \text{em que} \quad \sum_{i=1}^k c_i = 0. \quad (2.6.6)$$

Conforme exemplifica Banzatto e Kronka (2006), para avaliar as hipóteses:

$$H_0 : T = m \quad \text{versus} \quad H_1 : T \neq m,$$

pode-se utilizar a estatística

$$t_c = \frac{\hat{T} - m}{\sqrt{V\hat{ar}(\hat{T})}}, \quad (2.6.7)$$

a qual, sob  $H_0$  verdadeira, segue distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade. Com base nesse teste, deve-se rejeitar  $H_0$  se, e somente se,  $|t_c| \geq t_{(\nu, \alpha/2)}$ , de modo que  $t_{(\nu, \alpha/2)}$  representa o quantil da distribuição  $t$  cuja área a sua direita é dada por  $\alpha/2$ , sendo  $\alpha$  determinado pelo nível de significância adotado no teste.

Contudo, em procedimentos de comparações múltiplas, o interesse, frequentemente, é avaliar  $p \geq 2$  contrastes entre as médias. Nesse contexto, conforme esclarece Bretz, Hothorn e Westfall (2010), se os contrastes avaliados não forem independentes, a medida que se aumenta o valor de  $p$ , o teste simultâneo das  $p$  hipóteses formuladas eleva a probabilidade de se cometer o erro tipo I.

Como alternativa, Hothorn, Bretz e Westfall (2008) sugerem a utilização de testes realizados a partir da distribuição  $t$  multivariada. De acordo com Ferreira (2011), a função densidade de probabilidade de um vetor aleatório  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]' \in \mathbb{R}^p$ , com distribuição  $t$  multivariada, é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{(\pi\nu)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]^{-\frac{\nu+p}{2}} \quad (2.6.8)$$

em que  $\boldsymbol{\mu}$  representa a média de  $\mathbf{X}$  e  $\nu\boldsymbol{\Sigma}/(\nu - 2)$  a matriz de covariâncias, no caso de  $\nu > 2$ .

Uma transformação frequentemente requisitada nos procedimentos de comparações múltiplas é dada por  $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ , em que  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}$  é uma matriz diagonal cujos elementos são dados por  $1/\sqrt{\text{diag}(\boldsymbol{\Sigma})}$ . Com isso, a função densidade de probabilidade do vetor aleatório  $\mathbf{G}$  é dada por:

$$f_{\mathbf{G}}(\mathbf{g}, \mathbf{R}, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{(\pi\nu)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{\nu}\mathbf{g}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}\right]^{-\frac{\nu+p}{2}}, \quad (2.6.9)$$

em que  $\mathbf{R}$  representa a matriz de correlação, de ordem  $p \times p$ , do vetor  $\mathbf{G}$ .

Na prática, como reportam Genz e Bretz (1999), o problema com o qual usualmente se depara nesses tipos de análises é computar os valores da função de distribuição  $t$  multivariada, de modo que, considerando os vetores  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_p]'$  e  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_p]'$  como limites para o intervalo de integração da função (2.6.9), tais valores são obtidos a partir de:

$$F_{\mathbf{G}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{(\pi\nu)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_p}^{b_p} \left[1 + \frac{1}{\nu}\mathbf{g}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}\right]^{-\frac{\nu+p}{2}} d\mathbf{g}. \quad (2.6.10)$$

Como solução, Edwards e Berry (1987) introduziram algoritmos fundamentados em técnicas Monte Carlo. Esses algoritmos têm como princípio a transformação do integrando  $p$ -variável, apresentado na equação (2.6.10), em um produto de integrandos univariados. Esse processo de transformação, bem como os algoritmos utilizados, são detalhados em Genz e Bretz (1999, 2002). A implementação desses algoritmos estão disponíveis no pacote *mvtnorm* (GENZ; BRETZ, 2009), pertencente ao *software R* (R CORE TEAM, 2016).

Nos procedimentos de comparações múltiplas para avaliar  $k$  médias de tratamentos, as quais são expressas pelo vetor  $\underline{\boldsymbol{\mu}} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]'$ , podem ser propostos  $p$  vetores de contrastes, definidos por  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p$ . A partir daí, o interesse recai em avaliar as seguintes hipóteses nulas:

$$H_{0_i} : \mathbf{c}'_i \underline{\boldsymbol{\mu}} = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.6.11)$$

Definindo  $\mathbf{C}$  como uma matriz de contrastes, de modo que cada linha  $i$  representa um contraste avaliado, tem-se  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_p]'$ . O teste simultâneo, utilizado para avaliar conjuntamente as hipóteses em (2.6.11), apresenta a seguinte hipótese nula:

$$H_0 : \mathbf{C} \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}. \quad (2.6.12)$$

Denotando por  $\mathbf{W}$  a matriz de covariâncias do estimador do vetor  $\mathbf{C} \underline{\boldsymbol{\mu}}$ , ou seja,  $\mathbf{W} = \text{Var}(\mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\mu}})$ , tem-se que os elementos dispostos na diagonal dessa matriz, identificados por  $w_{ii}$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ , representam as variâncias dos  $p$  contrastes avaliados. Além disso,  $\mathbf{S}^{-1/2}$  é utilizada para representar a matriz diagonal de dimensão  $p \times p$ , cujos elementos da diagonal são dados por  $(1/\sqrt{w_{ii}})$ .

Conforme Hothorn, Bretz e Westfall (2008), a partir da estimação da matriz  $\mathbf{W}$ , obtém-se que

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\mu}},$$

segue, sob  $H_0$  verdadeira, uma distribuição  $t$   $p$ -variada com  $\nu$  graus de liberdade e matriz de correlação dada por

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{S}^{-1/2}$$

Essa distribuição é utilizada para os procedimentos de comparações múltiplas obtidos por meio da função *glht*, implementada no pacote *multcomp* (HOTHORN; BRETZ; WESTFALL, 2008).

### 2.6.3 Teste Scott-Knott

O teste proposto por Scott e Knott, em 1974, é conhecido como uma técnica de agrupamento de médias de tratamentos. Esse método é utilizado por vários autores devido, principalmente, à simplicidade de interpretação, uma vez que os grupos de médias criados são distintos e não sobrepostos.

Borges e Ferreira (2003) destacam essa característica afirmando que esse teste visa maior objetividade e clareza na interpretação dos resultados, evitando qualquer tipo de ambiguidade nas comparações.

O procedimento utilizado nesse teste busca a separação de médias de tratamentos em grupos distintos, por meio da minimização da variação dentro e maximização da variação entre grupos. O procedimento de Scott-Knott baseia-se no teste de razão de verossimilhanças para avaliar a hipótese de que  $k$  tratamentos podem ser divididos em dois grupos que maximizam a soma de quadrados entre grupos.

Assim como no teste Tukey, conforme especifica Scott e Knott (1974), é necessário supor que as variáveis aleatórias  $Y_{ij}$  com  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $j = 1, 2, \dots, r$  em que  $k$  representa o número de tratamentos avaliados e  $r$  o número de repetições em cada tratamento, seguem distribuições normais independentes com variância comum  $\sigma^2$ .

Quando o número de tratamentos é grande, o número de grupos cresce exponencialmente, dificultando a aplicação do teste. Esse fato foi relatado por Ramalho et al. (2000), os quais afirmaram existir  $2^{k-1} - 1$  partições possíveis das  $k$  médias em dois grupos distintos. Porém, uma alternativa para contornar esse problema é ordenar as médias dos tratamentos. Com isso, passam a existir  $k - 1$  possíveis partições.

Assim, por exemplo, em um grupo com  $k = 4$  médias ordenadas, tem-se as seguintes partições de médias possíveis:

$$\begin{array}{lll} 1^{\text{a}} \text{ partição:} & 1 & \text{versus } 2, 3 \text{ e } 4 \\ 2^{\text{a}} \text{ partição:} & 1 \text{ e } 2 & \text{versus } 3 \text{ e } 4 \\ 3^{\text{a}} \text{ partição:} & 1, 2 \text{ e } 3 & \text{versus } 4. \end{array}$$

Considerando as partições realizadas nas médias ordenadas, as hipóteses avaliadas no teste são:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{(1)} = \mu_{(2)} = \dots = \mu_{(k)} = \mu \\ H_1 : \mu_{(1)} = \mu_{(2)} = \dots = \mu_{(k_1)} = \mu_{g_1} \text{ e } \mu_{(k_1+1)} = \mu_{(k_1+2)} = \dots = \mu_{(k)} = \mu_{g_2} \end{cases}$$

em que  $\mu_{(i)}$  representa a média ordenada na posição  $i$ ,  $\mu_{g_1}$  e  $\mu_{g_2}$  representam, respectivamente, as médias nos grupos 1 e 2, de modo que  $\mu_{g_1} \neq \mu_{g_2}$ . Por fim, admite-se ainda que  $k_1, k_2 \geq 1$ , com  $k_2 = k - k_1$ .

Para aplicar o método de Scott-Knott, deve-se proceder da seguinte maneira:

- i) ordenar as  $k$  médias e dividir os tratamentos em dois grupos, para todas as  $k - 1$  partições possíveis dos valores médios ordenados;
- ii) determinar a soma de quadrados máxima entre dois grupos. Essa soma de quadrados será definida por  $B_0$  e será estimada da seguinte maneira:

$$B_0 = \frac{T_1^2}{k_1} + \frac{T_2^2}{k_2} - \frac{(T_1 + T_2)^2}{k_1 + k_2},$$

em que  $T_1$  e  $T_2$  representam a soma das médias, respectivamente, dos grupos 1 e 2, enquanto  $k_1$  e  $k_2$  são as quantidades de médias em cada um dos grupos. Assim:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \bar{Y}_{(i)} \quad \text{e} \quad T_2 = \sum_{i=k_1+1}^k \bar{Y}_{(i)};$$

- iii) determinar o valor da estatística  $\lambda$  da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \times \frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2}, \quad (2.6.13)$$

em que:

- $B_0$  é o valor da soma de quadrados máxima entre dois grupos tomados sobre todas as  $k - 1$  partições possíveis, com  $k$  número de tratamentos envolvidos no grupo de médias considerado;
- $\hat{\sigma}_0^2$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\sigma_{\bar{Y}}^2$ , dado por:

$$\frac{1}{k + v} \left[ \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_{(i)} - \bar{Y})^2 + v s_{\bar{Y}}^2 \right]$$

em que:

- $\bar{Y}_{(i)}$  é a média ordenada do tratamento  $i$ ;
- $\bar{Y}$  é a média geral do experimento;
- $s_{\bar{Y}}^2$  é a variância da média, dada pela razão entre o quadrado médio do resíduo ( $QMRes$ ) e o número de repetições ( $r$ ) de cada tratamento;

- $v$  é o número de graus de liberdade associados a este estimador.

Conforme demonstrado no APÊNDICE A, a estatística  $\lambda$  é um critério da razão de verosimilhança que segue, sob  $H_0$  verdadeira, aproximadamente uma distribuição Qui-Quadrado ( $\chi^2$ ) com  $\nu_0 = k/(\pi - 2)$  graus de liberdade. Devido a isso, Scott e Knott (1974) propõem a comparação de  $\lambda$  com o quantil  $\alpha$  da distribuição  $\chi^2_{\nu_0}$ , de modo que a área a direita desse quantil expressa o nível de significância  $\alpha$  do teste.

- iv)** Se  $\lambda \geq \chi^2_{(\nu_0, \alpha)}$ , rejeita-se a hipótese de que os dois grupos são idênticos em favor da hipótese alternativa de que os dois grupos diferem entre si.
- v)** No caso de rejeitar essa hipótese, os dois subgrupos formados serão independentemente submetidos aos passos **(i)** à **(iii)**. O processo em cada subgrupo se encerra ao aceitar  $H_0$  no passo **(iv)** ou se cada subgrupo contiver apenas uma média.

Alguns autores propuseram novas alternativas de agrupamento de médias, baseados no procedimento do teste Scott-Knott. Na proposta sugerida por Santos et al. (2001), a modificação ocorre apenas na etapa **(iii)**, na qual a estatística  $\lambda$  é calculada para todas as  $k - 1$  partições e não apenas para a partição que resulta no maior valor de  $B_0$ . A partir daí, deve-se escolher a partição em que  $\lambda$  apresenta o menor valor significativo. O processo restante prossegue de forma análoga ao procedimento original.

Batista (2016) também propôs uma metodologia de agrupamento de médias baseada no algoritmo de Scott-Knott. Uma característica interessante nessa proposta é que, para a divisão dos grupos, o autor usa como ponto de partição a posição da máxima amplitude entre médias ordenadas. Assim, considerando as médias aritméticas ordenadas  $\bar{Y}_{(1)}, \bar{Y}_{(2)}, \dots, \bar{Y}_{(k)}$ , a partição é realizada na posição  $i$ , em que se verifica

$$\max_j \{\bar{Y}_{(j+1)} - \bar{Y}_{(j)}\} = \bar{Y}_{(i+1)} - \bar{Y}_{(i)}.$$

A partir daí, Batista (2016) prossegue o procedimento utilizando a distribuição da amplitude estudentizada para avaliar a igualdade entre os grupos.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Esta seção destina-se à descrição da metodologia que foi utilizada para a execução desse trabalho, bem como dos materiais necessários para o mesmo.

#### 3.1 Simulação de dados experimentais

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram utilizados experimentos obtidos por meio de simulação, as quais foram realizadas a partir do *software* R (R CORE TEAM, 2016). Esses experimentos obedeceram ao seguinte modelo:

$$y_{ij} = \mu + t_i + e_{ij}, \quad (3.1.1)$$

em que

$y_{ij}$  é a observação do  $i$ -ésimo tratamento na  $j$ -ésima repetição, com  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $j = 1, 2, \dots, r$ ;

$\mu$  é uma constante inerente a todas as observações;

$t_i$  é o efeito do  $i$ -ésimo tratamento;

$e_{ij}$  é um erro aleatório.

Os efeitos espaciais presentes nos experimentos foram adicionados ao modelo por meio da componente  $e_{ij}$ . Dessa forma, a componente do erro foi simulada como sendo uma variável regionalizada.

Com o objetivo de avaliar a modelagem espacial, foram consideradas diferentes configurações experimentais, as quais foram simuladas sob presença de correlação espacial entre os erros. Essas configurações tiveram o intuito de avaliar os testes na presença e ausência de tendência espacial, além de sua adequabilidade, por meio da simulação de experimentos com efeitos de tratamentos nulos e não-nulos, conforme apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Configurações experimentais abordadas nas simulações.

Configurações	Tendência espacial	Efeitos de tratamentos
1	Ausente	Iguais
2	Ausente	Diferentes
3	Presente	Iguais
4	Presente	Diferentes

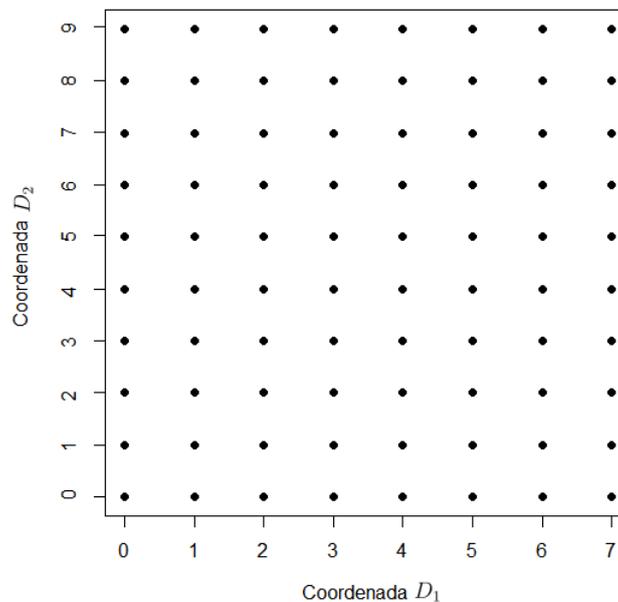
A partir das configurações 1 e 2, busca-se mensurar o efeito que a modelagem da matriz de covariâncias, por meio de técnicas geoestatísticas, exerce na aplicação de testes para comparar as médias de tratamentos em experimentos com dependência espacial e, conseqüentemente, nas conclusões acerca dos experimentos avaliados.

Já as configurações 3 e 4 destinam-se a avaliar se, na presença de tendência espacial em função das coordenadas e correlação espacial entre os erros, os testes propostos para esta situação são eficazes no discernimento entre efeitos de tratamentos diferentes. Essas configurações representam os modelos espaciais completos, especificados aqui neste trabalho, para os quais uma análise clássica possivelmente não seria adequada, retornando resultados equivocados sobre o experimento.

Foram simulados experimentos compostos por 10 tratamentos e 8 repetições, totalizando 80 observações, implementados conforme um delineamento inteiramente casualizado, sem nenhum tipo de controle local. Manteve-se o princípio de aleatorização dos experimentos, de forma que os tratamentos foram designados às parcelas experimentais mediante sorteio.

Os dados foram simulados de acordo com um gride regular, em que a distância entre os centróides das parcelas adjacentes foi definida como 1 *u.m.* (unidade de medida). A Figura 3.1 ilustra o gride utilizado na simulação dos experimentos.

Figura 3.1 – Gride com o arranjo espacial das unidades experimentais.



Foram avaliadas diferentes configurações de dependência espacial, as quais foram definidas a partir dos parâmetros do semivariograma, cujos valores são especificados na

Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Parâmetros do semivariograma avaliados na simulação.

Configuração	Efeito Pepita	Patamar	Alcance
(0; 2,5; 4)	0	2,5	4
(0; 2,5; 7)	0	2,5	7
(0; 4; 4)	0	4	4
(0; 4; 7)	0	4	7
(1,5; 2,5; 4)	1,5	2,5	4
(1,5; 2,5; 7)	1,5	2,5	7
(1,5; 4; 4)	1,5	4	4
(1,5; 4; 7)	1,5	4	7

Para todas as configurações mencionadas na Tabela 3.2, foi usado o modelo de semivariância esférico, cuja utilização é justificada pelo fato desse ser um dos modelos mais adotados na literatura para a descrição da dependência espacial.

No processo de determinação dos parâmetros do modelo (3.1.1), primeiramente definiu-se  $\mu = 10$ , o que acarretou valores próximos a 10 para a média geral de cada experimento. A partir disso, dado que o patamar do semivariograma representa a variância dos dados, os valores desse parâmetro foram estabelecidos com base no coeficiente de variação do experimento. Dessa forma, a escolha dos patamares 2,5 e 4 tiveram o intuito de manter o coeficiente de variação (CV) dos experimentos simulados em torno de 15% e 20%, respectivamente.

Já os valores do alcance foram determinados com o intuito de avaliar a dependência espacial a médio e longo alcance. Essa escolha foi, ainda, influenciada pela *cutoff* utilizada nos ajustes de semivariograma, a qual foi definida como 75% da distância máxima entre duas posições espaciais amostradas, dentro da qual cada valor de semivariância pôde ser estimado com, no mínimo, 40 pares de pontos. Com isso, avaliaram-se experimentos com alcance de 4 e 7 *u.m.*, respectivamente, 50% e 85% da distância máxima considerada no semivariograma.

Os valores do efeito pepita, 0 e 1,5, foram propostos de forma a avaliar experimentos, cuja variável erro, apresentava um grau de dependência forte e moderado, seguindo conceitos definidos por Cambardella et al. (1994).

Em todo o processo de simulação, as variáveis foram consideradas isotrópicas, isto é, a semivariância entre duas variáveis dependia, apenas, da distância que as separavam, apresentando o mesmo comportamento espacial em todas as direções. Além disso, essas variáveis foram obtidas a partir da distribuição normal.

Para as configurações em que foram consideradas a presença de tendência espacial, a mesma foi obtida a partir da função linear definida por

$$f(d_{i1}, d_{i2}) = d_{i1} - d_{i2}, \quad (3.1.2)$$

em que  $d_{i1}$  e  $d_{i2}$  representam as coordenadas espaciais referentes à  $i$ -ésima observação.

Toda a estrutura de dependência espacial foi simulada por meio da função *RFSimulate*, definida no pacote *Random Fields* (SCHLATHER et al., 2015), disponível no *software* R (R CORE TEAM, 2016). Assim, por exemplo, a variável espacial para a configuração (1,5; 4; 7) e tendência espacial definida conforme equação (3.1.2), foi gerada a partir dos seguintes comandos:

```
var.ini=4; tau.ini=1.5; sill.ini=var.ini-tau.ini; phi.ini= 7
model.sim <- RMspheric(var=sill.ini, scale=phi.ini) +
              RMnugget(var=tau.ini) + RMPolynome(1, 2, value=c(0,1,-1))

d1=seq(0, 7, by=1); d2= seq(0, 9, by=1)
erro.esp=data.frame(RFsimulate(model.sim, d1,d2))
```

Nos casos de simulações sem tendência espacial, bastava remover a função *RMPolynome(1, 2, value=c(0,1,-1))* do *script* descrito anteriormente.

Deve-se salientar que o processo de simulação de variáveis espaciais é uma etapa que requer cautela, uma vez que, nem sempre os semivariogramas estimados atendem aos valores dos parâmetros definidos na simulação. Devido a isso, uma alternativa encontrada para amenizar esse inconveniente foi adotar uma chave de segurança na simulação das variáveis espaciais. Por meio desta, as variáveis em que os ajustes preliminares do modelo teórico ao semivariograma estimasse parâmetros com uma variação maior que 25% dos valores pré-estabelecidos eram descartadas, sendo novamente simuladas até que atendessem a essa condição.

### 3.2 Adequabilidade dos testes

A adequabilidade dos testes foi verificada por meio de simulações Monte Carlo, nas quais foram gerados  $M = 2000$  experimentos para cada configuração proposta na seção (3.1). A partir daí, as configurações simuladas com efeitos de tratamentos iguais foram utilizadas para avaliar as taxas de erros tipo I por experimento, enquanto as configurações

geradas com efeitos de tratamentos diferentes destinaram-se à avaliação de poder dos testes.

As taxas de erro tipo I foram obtidas a partir de experimentos simulados sob hipóteses nulas verdadeiras. Desse modo, os efeitos de tratamentos foram fixados como  $t_i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Com isso, a probabilidade de erro tipo I foi estimada pela proporção de experimentos que rejeitaram a hipótese nula em relação ao número total  $M$  de experimentos simulados.

Para decidir se as taxas de erro tipo I eram estatisticamente iguais aos níveis nominais estabelecidos, realizou-se as comparações destas com o intervalo de confiança ( $IC$ ) para proporções, conforme especificado na equação (2.5.1). Ao simular 2000 experimentos e definir uma taxa de erro de 0,05, espera-se que 100 experimentos rejeitem a hipótese nula incorretamente. Assim sendo, o  $IC$  para a proporção da taxa de erros, utilizando  $\alpha = 0,05$ , resulta em um intervalo cujos limites são:

$$[0,03828164; 0,06391386]. \quad (3.2.1)$$

Da mesma forma, ao considerar a taxa de erro de 0,01, espera-se que o erro tipo I seja cometido em 20 experimentos. Assim, o  $IC$  considerando  $\alpha = 0,05$  de significância, é dado por:

$$[0,00518787; 0,01727044] \quad (3.2.2)$$

Os testes que apresentaram taxas de erros abaixo do limite inferior dos intervalos (3.2.1) e (3.2.2) foram considerados conservadores, enquanto aqueles cujas taxas ultrapassam o limite superior foram ditos liberais. Os testes que mantiveram as taxas dentro dos limites intervalares foram classificados como exatos.

A segunda etapa da verificação da adequabilidade constou da avaliação do poder de cada teste avaliado. Esse poder é calculado em experimentos simulados sob  $H_1$  verdadeira, sendo obtido por meio da razão entre o número total de decisões corretas, ou seja, o número de vezes que o teste rejeitou  $H_0$ , e o número total de decisões tomadas em todo o processo de simulação.

Para avaliar o poder do teste  $F$  da análise de variância espacial, os experimentos foram simulados a partir da hipótese nula ( $H_0$ ) parcial. Diante dessa hipótese, os efeitos de tratamentos foram determinados considerando-se dois grupos de médias:

$$t_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 5 \quad \text{e} \quad t_i = \delta \sqrt{\frac{\sigma^2}{r}} \quad \text{para } i = 6, 7, \dots, 10,$$

em que  $\sigma^2$  é o valor estabelecido para o patamar em cada configuração avaliada e  $r = 8$  é o número de repetições. Em cada configuração espacial, foram utilizados os valores de  $\delta$

iguais a  $\delta = 1; 1,5; 2$  e  $3$ . Dessa forma, avaliou-se o poder do teste para detectar diferenças entre as médias dos tratamentos, sendo essas estabelecidas em função do erro padrão da média.

Já para a avaliação do poder dos testes de comparações múltiplas, os efeitos de tratamentos foram simulados considerando-se a hipótese alternativa ( $H_1$ ) completa. Diante dessa hipótese, os efeitos de tratamentos foram definidos igualmente espaçados, de modo que foi atribuído a cada efeito adjacente um incremento fixo de  $0,5$  erros padrões da média em relação ao efeito anterior.

Com isso,  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , de modo que o efeito de tratamento 1 foi definido como  $t_1 = 0$  e, a partir desse, os demais efeitos foram obtidos por:

$$t_i = t_{i-1} + 0,5\sqrt{\frac{\sigma^2}{r}} \quad \text{para } i = 2, 7, \dots, 10.$$

Assim, em cada experimento foram avaliadas  $k-1$  comparações entre as médias dos tratamentos com diferença de  $0,5$  erros padrões da média, atingindo um total de  $M(k-1)$  comparações para essa diferença no processo de simulação. Analogamente, realizou-se  $k-2$  comparações por experimento envolvendo a diferença de  $1$  erro padrão da média, totalizando  $M(k-2)$  comparações considerando essa diferença. Esse procedimento foi repetido para avaliar todas as diferenças possíveis até que, por fim, comparou-se a primeira e a última média, sendo que essas diferiam em  $4,5$  erros padrões da média, acarretando uma única comparação com essa diferença em cada experimento, perfazendo um total de  $M = 2000$  comparações em cada configuração de simulação.

Finalmente, para que se pudesse concluir sobre a eficiência ou não dos testes com a inclusão da informação espacial proposta, realizou-se a comparação dos resultados obtidos para o poder desses testes com aqueles alcançados pelos testes clássicos, os quais são indicados quando a suposição de independência é satisfeita.

### 3.3 Modelagem da matriz de covariância

Para modelagem geoestatística da matriz de covariância dos dados é necessário, primeiramente, obter o ajuste do semivariograma dos mesmos. Como esses dados apresentam uma componente determinística, composta pelos efeitos de tratamentos e/ou das coordenadas espaciais, o ajuste do semivariograma foi realizado a partir dos resíduos, ou seja, após remoção dessa componente determinística.

Sendo assim, considerando o modelo apresentado na equação (2.2.1), inicialmente, estimou-se os resíduos de forma clássica, a partir de

$$\hat{\epsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta^0, \quad (3.3.1)$$

em que  $\beta^0$  foi obtido pelo método de quadrados mínimos, por meio de

$$\beta^0 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Conforme alerta Diggle e Ribeiro Júnior (2007), as estimativas encontradas em  $\beta^0$  são não viesadas, porém, ao se conhecer a matriz de covariâncias de  $\mathbf{Y}$ , pode-se utilizar um estimador mais eficiente, o qual é dado por

$$\beta_v^0 = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}, \quad (3.3.2)$$

que, além de ser um estimador não viesado, possui também variância mínima, característica desejada para os estimadores.

Sendo assim, após estimar os resíduos a partir da equação (3.3.1) deve-se proceder a construção do semivariograma para os mesmos. Após detecção dessa estrutura de variabilidade, a próxima etapa consiste em ajustar um modelo teórico ao semivariograma, sendo que, nos experimentos simulados utilizou-se o modelo esférico ajustado por meio do método de quadrados mínimos ordinários.

Entretanto, quando se avalia experimentos reais, cuja natureza de variabilidade é desconhecida, deve-se escolher o modelo adotado indicado pelos critérios de validação espacial. Uma vez que a estrutura de dependência espacial não seja detectada, o modelo de semivariância ajustado é reduzido a um modelo de efeito pepita puro, para o qual a covariância entre as variáveis é nula e matriz de covariância se reduz a uma matriz diagonal.

É importante lembrar que o ajuste do semivariograma, descrito na etapa anterior, é realizado a partir de resíduos que não consideraram a matriz de covariância em seu processo de estimação, uma vez que para estimar tal matriz seria necessário conhecer os parâmetros do semivariograma.

Sendo assim, após o ajuste do modelo teórico de semivariância e, de posse dos parâmetros estimados por esse modelo, torna-se possível a obtenção de uma estimativa para a matriz de covariâncias. A partir daí, uma estimativa mais fiel para o semivariograma pode ser obtida com base nos resíduos

$$\hat{\epsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta_v^0, \quad (3.3.3)$$

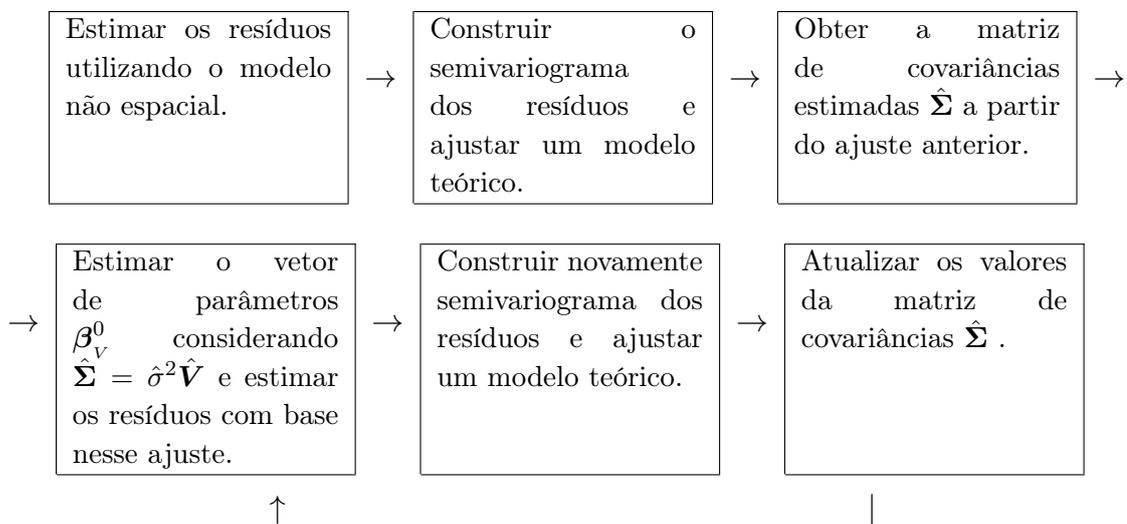
em que  $\beta_v^0$  é dado conforme a equação (3.3.2).

Assim, uma alternativa para se encontrar resultados mais eficientes será obter novos ajustes para o semivariograma considerando as estimativas dos resíduos encontrados por meio da equação (3.3.3). Segundo Pontes e Oliveira (2004), esse processo pode ser repetido até que a média dos erros padrões dos valores preditos atinja convergência.

Neste trabalho, utilizou-se um algoritmo no qual o processo de estimação foi repetido até que as estimativas dos parâmetros do semivariograma atingissem convergência. Essa convergência foi considerada atingida quando as diferenças absolutas entre as estimativas dos parâmetros do semivariograma na etapa atual e a etapa anterior não superaram uma tolerância de  $10^{-4}$ .

Basicamente, este algoritmo é descrito conforme a Figura 3.2, no qual os passos 4 à 6 serão repetidos até a convergência.

Figura 3.2 – Algoritmo para o processo de estimação dos parâmetros do semivariograma.



Os parâmetros do semivariograma resultante desse processo iterativo foram utilizados no cálculo das semivariâncias e, conseqüentemente, por meio das relações  $\hat{C}(h) = \hat{\sigma}^2 - \hat{\gamma}(h)$  e  $\hat{\rho}(h) = \hat{C}(h)/\hat{\sigma}^2$ , obtiveram-se as estimativas das covariâncias e correlações entre os erros, as quais foram utilizadas para compor as matrizes  $\hat{\Sigma}$  e  $\hat{V}$ .

É importante ressaltar que, durante o processo de modelagem da variabilidade espacial, todas as análises geoestatísticas foram realizadas com o auxílio do pacote geoR (RIBEIRO JÚNIOR; DIGGLE, 2015), implementado no *software* R (R CORE TEAM, 2016). Toda a implementação computacional utilizada para a obtenção dessa matriz de covariâncias é apresentada no ANEXO A.

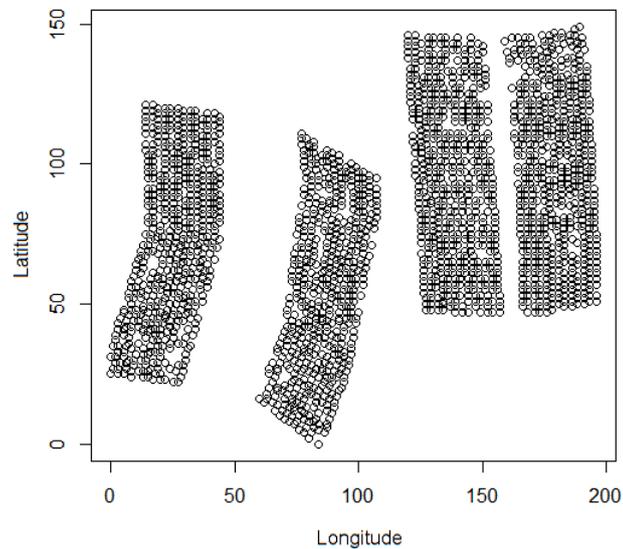
### 3.4 Dados do experimento de Candeia

Um dos objetivos finais desse trabalho foi utilizar os modelos e testes descritos e avaliados para analisar um conjunto de dados reais. Desse modo, foram considerados os dados obtidos em um experimento de candeia para ilustrar a aplicação dos métodos propostos.

Esse experimento foi instalado em 2004, no município de Baependi, região Sul do Estado de Minas Gerais, cujas coordenadas geográficas são 21°58'33" S e 44°44'36" W. Com área total de 1,5 ha, o experimento foi disposto em delineamento com blocos casualizados, composto por 4 blocos e 13 tratamentos. Cada unidade amostrada continha, inicialmente, 50 plantas úteis medidas, além de 4 plantas utilizadas como bordadura, espaçadas em 2,0 x 2,5 m.

O gride contendo a posição espacial de todas as árvores amostradas é apresentado na Figura 3.3, cujas coordenadas estão expressas em uma escala decimal transladada para a origem do plano cartesiano.

Figura 3.3 – Gride a posição espacial de todas as árvores contidas no experimento.



Os tratamentos de fertilização avaliados foram:

1. testemunha absoluta;
2. completo: calcário + NPK + micronutrientes;
3. N: calcário + PK + micronutrientes;
4. P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>: calcário + NK + micronutrientes;
5. K<sub>2</sub>O: calcário + NP + micronutrientes;
6. micros: calcário + NPK;
7. calcário: PK + micronutrientes;
8. completo + adubação orgânica;

9. testemunha absoluta + adubação orgânica;
10. adubo formulado NPK 8-28-16;
11. completo 2: calcário + gesso + NPK + micronutrientes;
12. completo 3: calcário + gesso + NP (100g de superfosfato simples + 200g de fosfato reativa) K + micronutrientes;
13. completo 4: calcário + adubo formulado 6-30-6 + NK + micronutrientes.

A coleta dos dados foi realizada no mês junho do ano de 2012, em que foram coletados, entre outras medidas, a altura de todas as árvores pertencentes ao experimento.

Devido a utilização de parcelas experimentais com áreas extensas, a sumariação do diâmetro médio de todas as árvores que compunham a parcela e consequente indexação desse valor nas coordenadas espaciais do centróide dessas parcelas, resultou em uma elevada perda da informação espacial, o que acarretou dificuldades na estimação do semivariograma.

Por esse motivo, em busca de uma melhor descrição da variabilidade espacial e, conseqüentemente, da obtenção de estimativas mais precisas para parâmetros do semivariograma, assim como dos efeitos de tratamentos, utilizou-se a informação das medidas realizadas em todas as árvores do experimento.

Contudo, como ocorre frequentemente em experimentos desse tipo, houve perdas de plantas dentro das parcelas experimentais, de modo que a consideração de todas as árvores na análise do experimento resultou em tratamentos com diferentes números de repetições. A Tabela 3.3 fornece o número de observações que recebeu cada tratamento avaliado, resultando em um total de 2179 observações.

Tabela 3.3 – Número de repetições em cada tratamento do experimento de Candeia.

Tratamento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Repetições	191	155	161	181	161	156	152	160	188	183	165	149	177

No decorrer deste trabalho, novas modelagens dos dados foram feitas, dentre as quais destaca-se a utilização do modelo com a adição do efeito de tendência espacial, sendo esse efeito utilizado em substituição ao efeito de blocos. Deve-se ressaltar que tal modelagem só foi possível uma vez que a abordagem espacial não exige métodos específicos para a casualização.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção contempla, basicamente, três tópicos: a apresentação teórica dos testes propostos com a incorporação da informação espacial, considerando modelos sem e com tendência; uma análise sobre a adequabilidade desses testes, além de comparações desses com os testes clássicos; e, por fim, apresenta-se alguns exemplos de aplicação das metodologias aqui propostas.

### 4.1 Estimadores para o modelo espacial sem tendência

Este modelo foi abordado por Nogueira (2013), cuja estrutura e análise de variância foram discutidas nas seções (2.2.1) e (2.2.2). Contudo, para a determinação dos testes para comparações múltiplas das médias dos tratamentos, é necessário obter os estimadores dos parâmetros do modelo. Deve-se ressaltar que foram considerados apenas modelos de Gauss-Markov com efeitos fixos para os tratamentos.

#### 4.1.1 Médias espaciais dos tratamentos

Um modelo que pode ser utilizado para descrever um conjunto de dados provenientes de um experimento com  $k$  tratamentos, de modo que o tratamento  $i$  apresenta  $r_i$  repetições, é dado por:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.1.1)$$

que, de forma equivalente, representa:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1r_1} \\ \vdots \\ y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kr_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1r_1} \\ \vdots \\ e_{k1} \\ \vdots \\ e_{kr_k} \end{bmatrix};$$

em que

$\mathbf{Y}$  é o vetor de observações de ordem  $n \times 1$ , de modo que  $n = \sum_{i=1}^k r_i$ ;

$\mathbf{X}_1$  é um vetor de uns com ordem  $n \times 1$ ;

$\mu$  é um parâmetro que representa a média geral;

$\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de erros aleatórios de ordem  $n \times 1$ .

Frequentemente, supõe-se que os erros são independentes e identicamente distribuídos segundo uma normal com média zero e variância  $\sigma^2$ , ou seja,  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ , em que  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$  e  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade. Com essa suposição, o estimador para  $\mu$ , a partir do método de quadrados mínimos, é dado por:

$$\hat{\mu} = (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}'_1 \mathbf{Y}.$$

Esse estimador representa a média aritmética das observações sendo, usualmente, denominada de média geral e denotada por  $\bar{Y}$ .

Porém, é possível que  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ , no qual  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}$  é uma matriz de correlação que contém algum elemento não-nulo, além dos elementos da diagonal. A partir dessa distribuição, o estimador para  $\mu$ , pelo método de quadrados mínimos generalizados, é obtido a partir de

$$\hat{\mu}_v = (\mathbf{X}'_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}'_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}.$$

Conforme denominado por Mello (2004), quando a matriz  $\mathbf{V}$  for obtida por meio da abordagem geoestatística, esse estimador representará a média espacial geral.

Entretanto, se o experimento apresenta efeitos de tratamentos não-nulos, um modelo linear mais eficiente é dado conforme apresentado na equação (2.2.1). Uma partição desse modelo, na qual  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2]$  e  $\boldsymbol{\beta} = [\mu : \mathbf{t}']'$ , pode ser utilizada para descrever o conjunto de dados, de modo que esse modelo fica expresso como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 \mu + \mathbf{X}_2 \mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.1.2)$$

o que simboliza:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1r_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2r_2} \\ \vdots \\ y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kr_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{1r_1} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{2r_2} \\ \vdots \\ e_{k1} \\ \vdots \\ e_{kr_k} \end{bmatrix};$$

em que

$\mathbf{X}_2$  é a matriz de incidência dos efeitos de tratamento de ordem  $n \times k$ ;

$\mathbf{t}$  é o vetor que contém os efeitos de tratamentos  $k \times 1$ .

Porém, com o intuito de estimar as médias de tratamentos, o modelo (4.1.2) será reparametrizado e denotado como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_2 \underline{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.1.3)$$

em que  $\underline{\boldsymbol{\mu}}' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]'$  representa o vetor de médias dos tratamentos, no qual  $\mu_i = \mu + t_i$ .

Ao considerar  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , o método de quadrados mínimos apresenta como estimador de  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$  um vetor contendo as médias aritméticas dos tratamentos, as quais frequentemente são denotadas por  $\bar{Y}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ . Este estimador é expresso por meio de:

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = (\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2' \mathbf{Y}. \quad (4.1.4)$$

Entretanto, considerando  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{V}$ , o estimador de  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ , obtido a partir do método de quadrados mínimos generalizados, é dado por:

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V = (\mathbf{X}_2' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}, \quad (4.1.5)$$

o qual será denominado como o vetor das médias espaciais dos tratamentos. Esse estimador será utilizado para a obtenção das médias dos tratamentos, as quais serão submetidas a testes de comparações múltiplas.

A seguir, encontra-se a programação, implementada no *software R* (R CORE

TEAM, 2016), para o cálculo das estimativas das médias espaciais dos tratamentos a partir desse estimador. A obtenção de uma estimativa da matriz de covariâncias dos dados ( $\hat{\Sigma}$ ), por meio de técnicas geoestatísticas, pode ser realizada conforme apresentado no ANEXO A.

```

k=nlevels(as.factor(trat))    ## numero de tratamentos
r=tapply(y,trat, "length")    ## vetor com no de repetições
n=sum(r)                      ## no de observações

row=c(0); for (i in 1:k){ row[i+1]= sum(r[1:i])}
X2=matrix(0,n,k)
for (i in 1:n){
for (j in 1:k){
if(i <= row[j+1] & i > row[j]) X2[i,j]=1}}
X2    ## matriz de incidência dos tratamentos

Y=c(y)
## sigma é a matriz de covariância dos dados
i.sig=solve(sigma)
## médias espaciais dos tratamentos
media=solve(t(X2)%*%i.sig%*X2)%*%t(X2)%*%i.sig%*%Y

```

#### 4.1.2 Variância das médias e das diferenças de médias

Dado o vetor  $\mathbf{Y}$  de variáveis aleatórias referentes a  $k$  tratamentos e  $r_i$  repetições, com  $i = 1, 2, \dots, k$ , a matriz de covariâncias  $\Sigma$  é definida como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Cov(Y_{11}, Y_{11}) & Cov(Y_{11}, Y_{12}) & \cdots & Cov(Y_{11}, Y_{kr_k}) \\ Cov(Y_{12}, Y_{11}) & Cov(Y_{12}, Y_{12}) & \cdots & Cov(Y_{12}, Y_{kr_k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(Y_{kr_k}, Y_{11}) & Cov(Y_{kr_k}, Y_{12}) & \cdots & Cov(Y_{kr_k}, Y_{kr_k}) \end{bmatrix}.$$

A matriz de covariâncias de  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ , definido na equação (4.1.4), é representada por:

$$Cov(\hat{\underline{\mu}}) = \begin{bmatrix} Cov(\bar{Y}_1, \bar{Y}_1) & Cov(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) & \cdots & Cov(\bar{Y}_1, \bar{Y}_k) \\ Cov(\bar{Y}_2, \bar{Y}_1) & Cov(\bar{Y}_2, \bar{Y}_2) & \cdots & Cov(\bar{Y}_2, \bar{Y}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\bar{Y}_k, \bar{Y}_1) & Cov(\bar{Y}_k, \bar{Y}_2) & \cdots & Cov(\bar{Y}_k, \bar{Y}_k) \end{bmatrix},$$

de forma que, dados dois tratamentos  $a$  e  $b$  quaisquer:

$$Cov(\bar{Y}_a, \bar{Y}_b) = \frac{1}{r_a r_b} Cov\left(\sum_{i=1}^{r_a} Y_{ai}, \sum_{j=1}^{r_b} Y_{bj}\right) = \frac{1}{r_a r_b} \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_b} Cov(Y_{ai}, Y_{bj}).$$

Considerando  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ , tem-se que  $Cov(\bar{Y}_a, \bar{Y}_b) = 0$ , se  $b \neq a$  e  $Cov(\bar{Y}_a, \bar{Y}_a) = \sigma^2/r_a$ , caso contrário. Com isso, a matriz de covariâncias de  $\hat{\underline{\mu}}$  é simplificada e descrita conforme segue:

$$Cov(\hat{\underline{\mu}}) = \begin{bmatrix} \sigma^2/r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2/r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2/r_k \end{bmatrix}.$$

Para avaliar a significância de um contraste de médias é preciso determinar a variância desse contraste. Como o teste Tukey, que será utilizado para realizar comparações múltiplas entre as médias de tratamentos, avalia todos os contrastes de médias comparadas duas a duas, torna-se necessário obter as variâncias das diferenças entre duas médias.

Considerando as médias de dois tratamentos,  $a$  e  $b$ , estimadas a partir de  $\hat{\underline{\mu}}$ , a variância da diferença dessas médias pode ser encontrada a partir de

$$Var(\bar{Y}_a - \bar{Y}_b) = Var(\bar{Y}_a) + Var(\bar{Y}_b) - 2Cov(\bar{Y}_a, \bar{Y}_b),$$

$$\begin{aligned} Var(\bar{Y}_a - \bar{Y}_b) &= \frac{1}{r_a^2} \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} Cov(Y_{ai}, Y_{aj}) + \frac{1}{r_b^2} \sum_{i=1}^{r_b} \sum_{j=1}^{r_b} Cov(Y_{bi}, Y_{bj}) - \\ &\quad - \frac{2}{r_a r_b} \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_b} Cov(Y_{ai}, Y_{bj}). \end{aligned}$$

Novamente, se  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ , essa variância é simplificada e dada por:

$$\text{Var}(\bar{Y}_a - \bar{Y}_b) = \sigma^2 \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right).$$

Contudo, utilizando a abordagem matricial, pode-se chegar a este estimador para a variância da diferença de duas médias de forma mais objetiva. Assim sendo:

$$\text{Var}(\hat{\underline{\mu}}) = \text{Var} \left( (\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{Y} \right) = (\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \text{Var}(\mathbf{Y}) \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1},$$

$$\text{Var}(\hat{\underline{\mu}}) = (\mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \sigma^2.$$

Antes de prosseguir o desenvolvimento dos estimadores de variância para as diferenças de duas médias, é necessário definir a matriz de contrastes  $\mathbf{C}$ . Essa matriz tem dimensão  $p \times k$ , em que  $p = \frac{k!}{2^{(k-2)!}}$  é o número de combinações de médias tomadas duas a duas existentes. Sendo assim, cada linha de  $\mathbf{C}$  representa os coeficientes de um contraste de duas médias avaliado. Por apresentar todos os contrastes avaliados no teste de Tukey, no decorrer do texto, a matriz  $\mathbf{C}$  será referida como a matriz de contrastes de Tukey.

A título de ilustração, ao avaliar  $k = 4$  médias de tratamentos, a matriz  $\mathbf{C}$  é dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz de contrastes pode, facilmente, ser obtida a partir da função *contr.tuk*, desenvolvida neste trabalho, cuja implementação no *software R* (R CORE TEAM, 2016), dá-se conforme especificado a seguir:

```

contr.tuk=function(media){
k <- length(media)
kindx <- 1:k
CM <- c(); rnames <- c()
if (!is.null(names(media)))
  varnames <- names(media) else varnames <- 1:length(media)

```

```

for (i in 1:(k - 1)) {
for (j in (i + 1):k) {
  CM <- rbind(CM, as.numeric(kindx == i) - as.numeric(kindx == j))
  rnames <- c(rnames, paste(varnames[i],varnames[j],sep="-"))
  } }
rownames(CM) <- rnames
return(CM)
}

```

A matriz de covariâncias de todos os contrastes de diferença entre duas médias é, finalmente, definida como:

$$Var(\mathbf{C}\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}) = \mathbf{C}Var(\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}})\mathbf{C}' = \mathbf{C}(\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{C}'\sigma^2,$$

cujos elementos da diagonal representam as variâncias de todas as comparações entre duas médias, as quais são avaliadas no teste de Tukey. Já os demais elementos dessa matriz referem-se às covariâncias entre os contrastes.

Ao utilizar as médias espaciais dos tratamentos, estimadas a partir de  $\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V$ , conforme especificado na equação (4.1.5) e, utilizando  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}$  como a matriz de covariância de  $\mathbf{Y}$ , a variância desse estimador será, então, obtida por:

$$Var(\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V) = Var((\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}),$$

$$Var(\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V) = (\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}Var(\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2(\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1},$$

$$Var(\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V) = (\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\sigma^2. \quad (4.1.6)$$

Diante disso, tem-se que a matriz de covariâncias dos contrastes de médias duas a duas é definida como:

$$\mathbf{W} = Var(\mathbf{C}\hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V) = \mathbf{C}(\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{C}'\sigma^2, \quad (4.1.7)$$

cujos elementos da diagonal,  $w_{ii}$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$ , representam as variâncias dos  $p$  contrastes utilizados para avaliar as diferenças, duas a duas, entre as médias espaciais dos tratamentos.

A partir da implementação no software *R* (R CORE TEAM, 2016), essas matrizes são estimadas por meio dos seguintes comandos:

```

C=contr.tuk(media);C          ## matriz dos contrastes de tukey
var.mu= solve(t(X2)%*%i.sig%*%X2)  ## matriz de covariância das médias
W=C%*%var.mu%*%t(C)          ## matriz de covariância dos contrastes

```

## 4.2 Modelo espacial com tendência

Ao considerar o processo estocástico de variáveis regionalizadas, em uma determinada região de estudo, não raro, essas variáveis podem apresentar esperanças não constantes, ou seja, uma tendência determinística em função das coordenadas, conforme mencionado na seção (2.3.1). Nos casos em que isso ocorre, torna-se necessário que seja feita a incorporação deste efeito no modelo.

Frequentemente, a região de estudo pertence a um plano bidimensional, para o qual considera-se o efeito de duas coordenadas geográficas. Entretanto, de forma geral, será considerado um espaço  $s$ -dimensional para indexar o ponto de realização da variável de interesse.

Diante disso, o modelo apresentado na equação (4.1.2) será complementado com o efeito da tendência espacial e, com isso, passa a ser definido como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}_2\mathbf{t} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.2.1)$$

em que a matriz  $\mathbf{D}$  é composta por  $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_s]$ , de modo que cada vetor  $\mathbf{D}_i$  contém a coordenada  $i$  das  $n$  posições espaciais amostradas. Desta forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{ns} \end{bmatrix}.$$

Para o modelo (4.2.1), tem-se, ainda, que o vetor  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s]'$  representa o vetor de parâmetros referentes aos efeitos das coordenadas. Os demais componentes desse modelo são definidos de forma análoga ao modelo (4.1.2).

O intuito da especificação desse modelo é realizar uma avaliação dos seus parâmetros por meio de uma associação com a metodologia de análise de covariância, na qual as coordenadas espaciais serão interpretadas como covariáveis presentes modelo.

A partir daí, podem-se definir testes para verificar a igualdade ou não dos efeitos de tratamentos, bem como a significância dos efeitos referentes às coordenadas. Além disso, torna-se possível a determinação de estimadores para as médias dos tratamentos, em que essas são corrigidas para o efeito da tendência espacial.

#### 4.2.1 Obtenção da análise de variância

Conforme afirma Searle (1987), as somas de quadrados da análise de variância podem ser obtidas através da abordagem modelos reduzidos.

De forma sucinta, esta abordagem caracteriza-se por apresentar um modelo completo, o qual considera os efeitos de todos os parâmetros avaliados e, a partir deste, promove-se a remoção dos termos de forma sequencial, verificando se a extração de cada termo resulta em uma diferença significativa no ajuste dos dados.

Desse modo, a partir o modelo apresentado na equação (4.2.1), tem-se as seguintes reduções possíveis:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}_2\mathbf{t} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}; \quad (\text{completo}) \\
 (2) \quad & \mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}_2\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}; \\
 (3) \quad & \mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}; \\
 (4) \quad & \mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2.2}$$

Contudo, é importante lembrar que na análise de covariância não existe ortogonalidade entre os fatores. Devido a isso, os testes de significância devem ser obtidos em ajustes separados, ou seja: (i) para o efeito das covariáveis corrigido pelo efeito dos tratamentos e (ii) para o efeito dos tratamentos corrigido pelo efeito das covariáveis. Esses testes são realizados a partir das somas de quadrados Tipo III.

A diferença básica entre essa soma de quadrados e a do Tipo I, a qual é usualmente utilizada na construção da análise de variância, é que esta última avalia a inclusão dos efeitos no modelo de forma sequencial, enquanto na soma de quadrados Tipo III é analisado o efeito de cada parâmetro corrigido para o efeito dos demais.

Conforme mostra-se na Tabela 4.1, para o modelo especificado, essa diferença dá-se apenas na obtenção da soma de quadrados para os efeitos da tendência espacial com relação às coordenadas.

Tabela 4.1 – Reduções de modelos para as somas de quadrados tipo I e III.

Fontes de variação	SQ Tipo I	SQ Tipo III
Coordenadas	$SQ(\boldsymbol{\theta} \mu)$	$SQ(\boldsymbol{\theta} \mu, \mathbf{t})$
Tratamentos	$SQ(\mathbf{t} \mu, \boldsymbol{\theta})$	$SQ(\mathbf{t} \mu, \boldsymbol{\theta})$
Resíduos	$Y'Y - SQ(\mu, \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})$	$Y'Y - SQ(\mu, \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta})$

Segundo Searle (1987), as somas de quadrados dos efeitos são baseados nas diferenças entre as somas de quadrados de resíduos, definidas conforme os modelos reduzidos correspondentes. Dessa forma, representando  $SQParâmetros_i$  como a soma de quadrados de parâmetros do modelo  $i$ -ésimo especificado em (4.2.2), tem-se:

$$SQ(\mu, \boldsymbol{\theta}) = SQParâmetros_3;$$

$$SQ(\mu, \mathbf{t}) = SQParâmetros_2;$$

$$SQ(\mu, \mathbf{t}, \boldsymbol{\theta}) = SQParâmetros_1;$$

$$SQ(\boldsymbol{\theta}|\mu, \mathbf{t}) = SQParâmetros_1 - SQParâmetros_2;$$

$$SQ(\mathbf{t}|\mu, \boldsymbol{\theta}) = SQParâmetros_1 - SQParâmetros_3;$$

Utilizando metodologia análoga à utilizada por Nogueira (2013), na qual considera-se  $Var(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{V}$ , e definindo as matrizes de incidência dos parâmetros dos modelos dados em (4.2.2) como  $\mathbf{M}_c = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \mathbf{D}]$ ,  $\mathbf{M}_2 = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2]$  e  $\mathbf{M}_3 = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{D}]$ , obtém-se os projetores das formas quadráticas, dados por:

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}_c(\mathbf{M}'_c\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}_c)^{-1}\mathbf{M}'_c\mathbf{V}^{-1}; \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}_2(\mathbf{M}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}_2)^{-1}\mathbf{M}'_2\mathbf{V}^{-1};$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}_3(\mathbf{M}'_3\mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}_3)^{-1}\mathbf{M}'_3\mathbf{V}^{-1}.$$

Com base nesses projetores pode-se encontrar as somas de quadrados, conforme é apresentado na Tabela 4.2. Nesta tabela, *posto* é usado para representar o posto das matrizes especificadas.

Tabela 4.2 – Análise variância para o modelo com covariável, a partir de somas de quadrados tipo III.

FV	GL	SQ	QM	$F_c$
Coordenadas	$posto(\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_2)$	$\mathbf{Y}'(\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_2)\mathbf{Y}$	$\frac{SQCoord}{glcoord}$	$\frac{QMCoord}{QMRes}$
Tratamentos	$posto(\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_3)$	$\mathbf{Y}'(\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_3)\mathbf{Y}$	$\frac{SQTrat}{gltrat}$	$\frac{QMTrat}{QMRes}$
Resíduo	$posto(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{P}_c)$	$\mathbf{Y}'(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{P}_c)\mathbf{Y}$	$\frac{SQRes}{glres}$	

A partir da análise de variância apresentada na Tabela 4.2 é possível avaliar os seguintes pares de hipóteses:

$$(i) \begin{cases} H_0 : \theta_1 = \dots = \theta_s = 0 \\ H_1 : \theta_i \neq 0, \text{ para algum } i \end{cases} \quad e \quad (ii) \begin{cases} H_0 : t_1 = \dots = t_k = 0 \\ H_1 : t_i \neq 0, \text{ para algum } i \end{cases},$$

sendo que as hipóteses em **(i)** destinam-se à avaliação da presença de tendência espacial no modelo, ou seja, se existe algum parâmetro não-nulo referente aos efeitos de coordenadas. Já as hipóteses especificadas em **(ii)** avaliam a igualdade dos efeitos de tratamentos.

Utilizando métodos semelhantes aos descritos por Nogueira (2013), é possível verificar que, sob  $H_0$  verdadeira, as razões de quadrados médios apresentadas na Tabela 4.2 tem distribuição  $F$  de Snedecor central, cujos graus de liberdade são dados pelos postos dos projetores das formas quadráticas que as compõem.

Sendo assim, deve-se rejeitar  $H_0$  para os efeitos das coordenadas quando

$$\frac{QMCoord}{QMRes} \geq F_{(glcoord, glres, \alpha)},$$

em que  $F_{(gltrat, glres, \alpha)}$  corresponde ao quantil de uma distribuição  $F$  cuja probabilidade a sua direita é dada por  $\alpha$ .

De forma análoga, a hipótese nula para os efeitos de tratamentos será rejeitada se, e somente se,

$$\frac{QMTrat}{QMRes} \geq F_{(gltrat, glres, \alpha)}.$$

A realização dessa análise pode ser feita com o auxílio do *software R* (R CORE TEAM, 2016), a partir do seguinte *script*:

```
require(MASS)
V=sigma/sigma[1,1]; i.V=solve(V)

X1=matrix(rep(1,n))
Mc=cbind(X1,X2, D); M2=cbind(X1,X2); M3=cbind(X1, D)

Pc= i.V**Mc**ginv(t(Mc)**i.V**Mc)**t(Mc)**i.V
P2= i.V**M2**ginv(t(M2)**i.V**M2)**t(M2)**i.V
P3= i.V**M3**solve(t(M3)**i.V**M3)**t(M3)**i.V
```

```

sqcoord= t(Y)%*(Pc-P2)%*Y
sqtrat= t(Y)%*(Pc-P3)%*Y
sqres= t(Y)%*(i.V -Pc)%*Y

####Graus de liberdade###
glres=rk(i.V-Pc); gltrat=rk(Pc-P3); glcoord=rk(Pc-P2)

### Construindo a análise de variância ###
QMTrat=sqtrat/gltrat
QMRes=sqres/glres
QMCoord=sqcoord/glcoord

F.calc=QMTrat/QMRes; F.calc2=QMCoord/QMRes

pval=1-pf(F.calc,gltrat,glres)
pval2=1-pf(F.calc2,glcoord,glres)

anova=data.frame(FV=c("Coord","Tratamentos","Residuo"),
  GL=c(glcoord,gltrat,glres),
  SQ=round(c(sqcoord, sqtrat, sqres), 3),
  QM=round(c(QMCoord, QMTrat, QMRes), 3),
  F_calc=c(as.character(round(c(F.calc2, F.calc),3))," "),
  Valor_p=c(as.character(round(c(pval2,pval),4))," "))
anova

```

Uma vez que os testes da análise de variância rejeitem as hipóteses nulas, surge a necessidade de testes complementares que apontem quais parâmetros foram responsáveis por tal rejeição. Para aplicação desses testes, é preciso obter os estimadores dos parâmetros presentes no modelo avaliado.

#### 4.2.2 Estimadores dos parâmetros e teste para tendência

Assim como a reparametrização do modelo (4.1.2), utilizada para facilitar a obtenção dos estimadores das médias espaciais dos tratamentos, a mesma é adotada neste contexto, sendo dada por:

$$Y = X_2 \underline{\mu} + D\theta + \varepsilon, \quad (4.2.3)$$

A partir daqui, a matriz de covariâncias  $\Sigma$  do vetor de erros será considerada, de maneira geral, como  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{V}$ , sendo que, quando  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$  tem-se um caso particular desta expressão.

Utilizando o mesmo procedimento adotado em Nogueira (2013), os estimadores para os parâmetros do modelo especificado em (4.2.3), a partir do método de quadrados mínimos generalizados, são definidos por:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mu}}_v &= (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} Y - (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} D \hat{\theta}; \\ \hat{\theta} &= (D' P D)^{-1} D' P Y, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

em que  $P = \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1}$ .

Ao comparar os estimadores obtidos em (4.1.5) e (4.2.4), é possível notar que, neste último, as médias espaciais dos tratamentos são corrigidas para os efeitos referentes às coordenadas.

Além disso, pode-se observar, ainda, que se  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , estes estimadores são equivalentes aos obtidos a partir de uma análise de experimentos com covariáveis. Dessa forma, as  $s$  coordenadas espaciais podem ser vista como covariáveis do modelo proposto.

Uma vez que a esperança de  $Y$  é dada por  $E[Y] = X_2 \underline{\mu} + D\theta$ , estes estimadores têm como propriedade a não-tendenciosidade, pois:

$$E[\hat{\theta}] = (D' P D)^{-1} D' P (X_2 \underline{\mu} + D\theta) = (D' P D)^{-1} D' P X_2 \underline{\mu} + \theta,$$

$$E[\hat{\theta}] = (D' P D)^{-1} D' [\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1}] X_2 \underline{\mu} + \theta,$$

$$E[\hat{\theta}] = (D' P D)^{-1} D' [\mathbf{V}^{-1} X_2 \underline{\mu} - \mathbf{V}^{-1} X_2 \underline{\mu}] + \theta = \theta;$$

$$E[\hat{\underline{\mu}}_v] = (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} (X_2 \underline{\mu} + D\theta) - (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} D E[\hat{\theta}],$$

$$E[\hat{\underline{\mu}}_v] = \underline{\mu} + (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} D \theta - (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} D \theta = \underline{\mu}.$$

Visando uma maior facilidade de interpretação e associação com os estimadores

para modelos com covariáveis, descritos na seção (2.1.2), os quais buscam preservar o conceito de média geral, pode-se apresentar as médias espaciais de tratamentos ajustadas, a partir da centralização de cada vetor de coordenadas com relação à média:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 - \bar{D}_1, \mathbf{D}_2 - \bar{D}_2, \dots, \mathbf{D}_s - \bar{D}_s],$$

de modo que  $\bar{D}_i$  é a média do vetor da coordenada  $i$ , com  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Porém, os testes para comparar as médias dos tratamentos avaliam as diferenças entre essas e, com isso, essa forma de apresentação indifere os resultados alcançados. Por isso, os testes de comparações múltiplas serão feitos diretamente sobre as estimativas obtidas por meio de  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_V$ .

Conforme mencionado na seção (4.1.2), para a aplicação de testes de comparações entre as médias dos tratamentos, bem como para testar a significância dos parâmetros relacionados às coordenadas, é necessário obter a matriz de covariâncias dos estimadores.

Sendo assim, definindo  $Var(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{V}$ , a variância do estimador  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é dada por:

$$Var(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\mathbf{D}'\mathbf{P}\mathbf{D})^{-1}\sigma^2. \quad (4.2.5)$$

Utilizando a informação da equação (4.2.5) e definindo  $\mathbf{A} = \mathbf{D}(\mathbf{D}'\mathbf{P}\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}'\sigma^2$ , encontra-se que a variância de  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_V$  é dada por:

$$Var(\hat{\boldsymbol{\mu}}_V) = (\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\sigma^2 + (\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2(\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}. \quad (4.2.6)$$

A partir de (4.2.6), observa-se que a  $Var(\hat{\boldsymbol{\mu}}_V)$  é dada pela soma das variâncias de cada componente do estimador  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_V$ , ou seja:

$$Var((\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}) + Var((\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Novamente, especificando  $\mathbf{C}$  como a matriz que contém a informação de todos contrastes de Tukey, a matriz de covariâncias desses contrastes é definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= Var(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\mu}}_V) = \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{C}'\sigma^2 + \mathbf{C}(\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2(\mathbf{X}'_2\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{C}'. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Uma estimativa para os parâmetros definidos nesta seção, por meio *software R* (R CORE TEAM, 2016), pode ser encontrada a partir de:

```

require(fBasics)
P=i.sig - i.sig%%X2%%solve(t(X2)%%i.sig%%X2)%%t(X2)%%i.sig

theta=solve(t(D)%%P%%D)%%t(D)%%P%%Y

media= solve(t(X2)%%i.sig%%X2)%%t(X2)%%i.sig%%Y -
        solve(t(X2)%%i.sig%%X2)%%t(X2)%%i.sig%%D%%theta

## médias ajustadas
s=rk(D);D.m=c()
for (i in 1:s){D.m[i]= mean(D[,i])}
media.aj=media + as.numeric(t(D.m)%%theta)

## variância das médias
A=D%%solve(t(D)%%P%%D)%%t(D)
var.mu=(solve(t(X2)%%i.sig%%X2) + solve(t(X2)%%i.sig%%X2)%%
        t(X2)%%i.sig%%A%%i.sig%%X2%%solve(t(X2)%%i.sig%%X2))

C=contr.tuk(media);C          ## matriz dos contrastes de tukey
W=C%%var.mu%%t(C)           ## matriz de covariância dos contrastes

```

O modelo espacial adotado apresenta, ainda, a vantagem da possibilidade em verificar a significância dos parâmetros relacionados à tendência espacial. Sendo assim, uma alternativa para avaliar as hipóteses nulas

$$H_{0i} : \theta_i = 0, \text{ para } i = 1, \dots, s,$$

é utilizar distribuições  $t$  de Student univariadas, desde que os parâmetros  $\theta_i$  possam ser considerados independentes.

Desse modo, para testar a  $i$ -ésima estimativa pertencente ao vetor  $\hat{\theta}$ , obtido conforme equação (4.2.4) e com variância dada por (4.2.5), pode-se utilizar a estatística  $t_{ci}$ , calculada por meio da seguinte equação:

$$t_{ci} = \frac{\hat{\theta}_i}{\sqrt{((\mathbf{D}'\mathbf{P}\mathbf{D})^{-1}\hat{\sigma}^2)_{ii}}}, \quad (4.2.8)$$

em que  $\hat{\sigma}^2$  representa uma estimativa para o patamar do semivariograma ajustado,

enquanto  $((\mathbf{D}'\mathbf{P}\mathbf{D})^{-1}\hat{\sigma}^2)_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento contido na diagonal da matriz de variâncias do estimador  $\hat{\theta}$ .

Em posse de (4.2.8), basta comparar o valor desta estatística com o quantil  $t_{(\nu, \alpha/2)}$  da distribuição  $t$  de Student, em que  $\nu = n - k - s$  graus de liberdade e  $\alpha/2$  é a probabilidade a direita desse quantil, de modo que  $\alpha$  refere-se ao nível de significância estabelecido para o teste. A partir dessa comparação, o parâmetro  $\theta_i$  deve ser considerado significativamente diferente de zero se, e somente se,  $|t_{ci}| \geq t_{(\nu, \alpha/2)}$ .

Por meio do *software R* (R CORE TEAM, 2016), esse teste para os efeitos das coordenadas pode ser realizado diante da seguinte implementação:

```
var.theta=solve(t(D)%*%P%*%D)
ep.theta=sqrt(diag(var.theta))
tc=theta/ep.theta

s=length(theta); prob=c(); glres=n-k-s
for (i in 1:s){ prob[i]= 2*(1 - pt(abs(tc[i]),df = glres)) }

names=c()
for (i in 1:s) {names <- c(names, paste("theta", i))}

result=data.frame(Parametro=names,Estimativa=round(theta,4),
                  Erro_padrao= round(ep.theta,4),
                  t_calc=round(tc,3), Valor_p=round(prob,4))
result
```

### 4.3 Testes de comparações múltiplas entre médias espaciais

Uma vez que o teste  $F$  da análise de variância, obtida a partir da inclusão da informação espacial, rejeite a hipótese nula de igualdade entre os efeitos de tratamentos, torna-se necessário, então, a aplicação de testes de comparações múltiplas, os quais considerem a modelagem dos efeitos espaciais, para apontar quais médias de tratamentos diferem significativamente entre si. Diante disso, esta seção destina-se à apresentação dos testes propostos neste trabalho que podem ser utilizados para realizar tais comparações.

### 4.3.1 Teste utilizando a distribuição $t$ multivariada

Em um teste que envolve um única hipótese nula  $H_0$ , a estatística de teste é, frequentemente, escolhida de forma a controlar a taxa de erro tipo I, ou seja, a probabilidade de rejeitar incorretamente  $H_0$ , definida pelo nível de significância  $\alpha$ . Porém, se  $p$  hipóteses forem testadas simultaneamente, a probabilidade de declarar como significativos efeitos não existentes aumenta a medida que eleva-se o número de hipóteses avaliadas.

Em geral, ao testar  $p$  hipóteses nulas usando estatísticas de teste independentes, a probabilidade de cometer pelo menos um erro tipo I é dada por  $1 - (1 - \alpha)^p$ .

Bretz, Hothorn e Westfall (2010) relembram que, comumente, os procedimentos de comparações múltiplas utilizados são construídos a partir de valores  $p$  marginais. No entanto, essas avaliações não consideram o ajuste de multiplicidade, ou seja, a relação existente entre as comparações avaliadas.

Devido a isso, são propostos testes que buscam ajustes para o nível de significância adotado, de modo que os valores  $p$  marginais obtidos sejam adequados. Um exemplo disso é o teste de Bonferroni, mencionado por Ferreira (2011). Outros procedimentos abordados utilizam testes cujas estatísticas apresentam distribuição normal ou  $t$  multivariada com correlações não-negativas.

Por enquanto, ressalta-se a necessidade de utilizar procedimentos adequados de comparações que visam a inferência simultânea para avaliar múltiplas hipóteses.

Um dos principais interesses deste trabalho é realizar comparações entre as médias espaciais de tratamentos, as quais compõem o vetor  $\underline{\mu}_V$ . Para isto, define-se um vetor  $\mathbf{c}' = [c_1, c_2, \dots, c_k]$  de constantes conhecidas, de tal forma que  $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ . O vetor  $\mathbf{c}$  que satisfaz esta condição é definido como um vetor de contraste, de modo que  $\mathbf{c}'\underline{\mu}_V$  representa uma combinação linear de interesse entre as médias.

A partir daí, o teste utilizado para avaliar este contraste tem como hipótese nula

$$H_0 : \mathbf{c}'\underline{\mu}_V = 0.$$

Porém, para  $k$  médias de tratamentos, o intuito é realizar  $p$  comparações múltiplas, as quais avaliam todas as diferenças entre as médias, tomadas duas a duas. Para isso, deve-se utilizar  $p$  vetores de contrastes de médias tomadas duas a duas  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p$  e, conseqüentemente, devem ser formuladas  $p$  hipóteses nulas, definidas por:

$$H_{0_i} : \mathbf{c}'_i \underline{\mu}_V = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p.$$

Conforme relata Bretz, Hothorn e Westfall (2010), é possível testar cada hipótese  $H_{0_i}$  a partir da estatística:

$$t_{ci} = \frac{\mathbf{c}'_i \hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V}{\sqrt{\text{Var}(\mathbf{c}'_i \hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V)}}.$$

Definindo  $\mathbf{c}'_i$  com  $i = 1, 2, \dots, p$  como os contrastes de médias comparadas duas a duas, conforme avalia o teste de Tukey, pode-se obter a matriz  $\mathbf{C}$ , de modo que cada linha  $i$  representa um contraste avaliado, ou seja,  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_p]'$ .

Com isso, a partir da matriz  $\mathbf{W}$ , a qual é definida conforme equação (4.1.7) para o modelo sem tendência e dada pela equação (4.2.7) se for considerado o modelo com tendência, tem-se que  $w_{ii}$  representa a variância do contraste  $i$ . Desse modo, a estatística de teste pode ser reescrita como:

$$t_{ci} = \frac{\mathbf{c}'_i \hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V}{\sqrt{\hat{w}_{ii}}}, \quad (4.3.1)$$

em que  $\hat{w}_{ii}$  pode ser obtido a partir da estimativa  $\hat{\sigma}^2$  do patamar do semivariograma ajustado.

Sob hipótese nula verdadeira, cada estatística de teste  $t_{ci}$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$  segue uma distribuição  $t$  de Student univariada com  $\nu$  graus de liberdade, definido pelo grau de liberdade do resíduo do modelo adotado, o qual, para o modelo abordado neste trabalho, é dado por  $n - k - s$ .

Entretanto, as  $p$  comparações realizadas não são independentes. Sendo assim, conforme reporta Ferreira (2011), a distribuição conjunta das estatísticas de teste  $t_{c1}, t_{c2}, \dots, t_{cp}$  é uma  $t$  multivariada com  $\nu$  graus de liberdade e matriz de correlação dada por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{S}^{-1/2},$$

em que  $\mathbf{S}^{-1/2}$  representa uma matriz diagonal de dimensão  $p \times p$ , cujos elementos da diagonal são dados por  $(1/\sqrt{w_{ii}})$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ , em que  $w_{ii}$  é a variância do contraste  $i$ .

No *software R* (R CORE TEAM, 2016), ao considerar a distribuição  $t$  multivariada, o valor  $p$ , obtido em cada comparação avaliada, pode ser encontrado por meio da função *pmvt*, pertencente ao pacote *mvtnorm* (GENZ; BRETZ, 2009). A programação abaixo retorna os testes de hipóteses, utilizados para avaliar as  $p$  comparações entre duas médias, abordadas no teste de Tukey, a partir da distribuição  $t$  multivariada.

```

require(mvtnorm)
S.i=diag(1/sqrt(diag(W)))
R=S.i%*%W%*%S.i;R          ## matriz de correlação dos contrastes

est= C%*%media            ## estimativa dos contrastes
ep=sqrt(diag(W))          ## erro padrão dos contrastes
tc=est/ep                 ## estatística t

p=nrow(C)                 ## numero de contrastes
r<- with(dados,tapply(y,trat, "length")) ## no de repetições
glres= sum(r) - k        ## ou glres= sum(r) - k - s
val.p=as.vector(0)
for (i in 1:p){
  val.p[i]= 1 - pmvt(-rep(abs(tc[i]), p), rep(abs(tc[i]), p),
                    corr = R, df = glres)}

teste=data.frame(Estimativa=round(est,4), Erro_Padrao= round(ep,4),
                 t_calc=round(tc,3), Valor_p=round(val.p,4))
teste

```

Conforme relatado na seção (4.3.1), a função *glht*, implementada no pacote *multcomp* (HOTHORN; BRETZ; WESTFALL, 2008), utiliza esta distribuição *t* multivariada para a realização dos testes de hipóteses gerais. Porém, deve-se salientar que os contrastes avaliados por meio dessa função são, frequentemente, obtidas a partir das médias aritméticas dos tratamentos, podendo resultar em estimativas viesadas na presença de dependência espacial.

A apresentação dos resultados, na forma usual do teste de Tukey, em que médias seguidas de mesma letra não diferem entre si, pode ser obtida com o auxílio do pacote *multcompView* (GRAVES; PIEPHO; SELZER, 2015), utilizando a informação dos valores *p* obtidos no teste descrito anteriormente. Desta forma:

```

require(multcompView)
sig.level=0.05          ## nível de significância do teste
names(val.p) = rownames(C)

```

```

tukey <- multcompLetters(val.p, rev=TRUE)

if (sum(val.p<=sig.level)==0) letras=tukey$Letters else
    letras=tukey$monospacedLetters

print.tuk=data.frame(Tratamentos=order(media,decreasing=TRUE),
    Medias = sort(media, decreasing=TRUE),
    Resultado = letras[order(media, decreasing=TRUE)])

print.tuk

```

Resultados similares podem ser obtidos a partir da construção de intervalos de confiança para as comparações de interesse.

Conforme Ferreira (2011), ao utilizar a distribuição  $t$  de Student univariada para construir intervalos de confiança para cada contraste, a probabilidade de que todos os intervalos de confiança contenham, simultaneamente, todos os parâmetros avaliados não é mantida no valor nominal. Para contornar esse problema, surgem os intervalos de confiança simultâneos.

Sendo assim, definindo  $qt_{(\nu, \alpha)}$  como um valor crítico da distribuição  $t$  multivariada, com  $\nu$  graus de liberdade e um nível  $\alpha$  de significância, a hipótese nula referente a  $i$ -ésima comparação de ser rejeitada se  $|t_{ci}| \geq qt_{(\nu, \alpha)}$ . Alternativamente, rejeita-se  $H_{0i}$  quando o intervalo

$$\left[ \mathbf{c}'_i \hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V - qt_{(\nu, \alpha)} \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{c}'_i (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{c}_i}, \mathbf{c}'_i \hat{\underline{\boldsymbol{\mu}}}_V + qt_{(\nu, \alpha)} \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{c}'_i (\mathbf{X}'_2 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{c}_i} \right]$$

não contiver o valor zero.

Utilizando o *software R* (R CORE TEAM, 2016), esses intervalos e as representações gráficas dos mesmos, podem ser obtidos a partir da seguinte rotina:

```

qt= qmvt(1-sig.level, df = glres, corr = R,
    tail = "both")$quantile;qt

LI=est-qt*ep
LS=est+qt*ep

```

```

IC=cbind(est, LI,LS)
colnames(IC)=c("Estimativa","LI","LS");IC

## Gráfico dos intervalos
plot(est,1:p, pch = 19, xlim=c(min(LI), max(LS)),
      axes = FALSE, xlab="", ylab="", main="Contrastes de Tukey")
arrows( LS, 1:p,LI ,1:p, angle = 90, code = 3, length = 0.1)
axis(1,las=1)
axis(2, 1:p, rownames(IC), las=2)
abline(v=0, col="red", lty=2, lwd=2)

```

#### 4.3.2 Teste baseado na aproximação da amplitude estudentizada

Conforme apresentado na seção (2.6.1), o teste originalmente proposto por Tukey, em 1954, baseia na distribuição da amplitude estudentizada. Esta distribuição requer que todos as médias envolvidas sejam independentes, tenham o mesmo número de repetição e variância comum. Essa distribuição é utilizada para a obtenção de um valor denominado diferença mínima significativa (DMS), definido conforme equação (2.6.1).

A partir daí, o contraste entre duas médias aritméticas de tratamentos  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{Y}_j$  é considerado significativo quando o seu valor absoluto supera o valor calculado para a *DMS*.

Os testes fundamentados na distribuição da amplitude estudentizada caracterizam-se por sua robustez e conservadorismo, sendo pouco sensíveis a violações de pressuposições básicas para sua aplicação, além de, frequentemente, manter a taxa de erro tipo I por experimento abaixo do valor nominal pré-estabelecido.

Assim sendo, acredita-se que as comparações baseadas nesta distribuição, realizadas a partir das médias espaciais, obtidas pela equação (4.1.5), e variâncias definidas conforme equação (4.1.7), produzam uma aproximação com resultados satisfatórios.

Com isso, considerando o teste baseado nesta distribuição, o  $i$ -ésimo contraste de Tukey, estimado a partir de  $\mathbf{c}'_i \hat{\boldsymbol{\mu}}_v$ , deve ser considerado significativo se, e somente se:

$$|\mathbf{c}'_i \hat{\boldsymbol{\mu}}_v| \geq DMS_i,$$

em que

$$DMS_i = q_{(\alpha,k,\nu)} \sqrt{0,5w_{ii}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, p; \quad (4.3.2)$$

sendo  $q_{(\alpha,k,\nu)}$  o quantil da distribuição da amplitude estudentizada considerando um nível de  $\alpha\%$  de probabilidade e  $\nu$  o grau de liberdade do resíduo do modelo adotado.

Os resultados para esse teste podem ser obtidos, com o auxílio do *software R* (R CORE TEAM, 2016), conforme a seguinte implementação:

```
sig.level=0.05      ## nível de significância do teste
q=qtukey(1-sig.level, k, glres);q
dms<-q*sqrt(0.5*diag(W))
est= C%%media

result<-c()
p=choose(k,2)  ### número de contrastes
for (i in 1:p){
  if ((abs(est[i])-dms[i]) >= 0 ) result[i]="Sig" else
                                result[i]="Não Sig"}
teste=data.frame(Estimativa=round(est,3), DMS=round(dms,3),
                 Resultado= result)
teste
```

Com um procedimento análogo aquele descrito ao considerar a distribuição  $t$  multivariada, os seguintes comandos, construídos para o *software R* (R CORE TEAM, 2016), podem ser utilizados para a apresentação dos resultados do teste de Tukey, por meio da distribuição da amplitude estudentizada:

```
require(multcompView)
dif=c(abs(est)-dms >= 0)
names(dif) = rownames(C)
tukey <- multcompLetters(dif, rev=TRUE)
if (sum(dif)==0) letras=tukey$Letters else
                    letras=tukey$monospacedLetters

print.tuk=data.frame(Tratamentos=order(media,decreasing=TRUE),
                    Medias = unname(sort(media, decreasing=TRUE)),
                    Resultado = unname(letras[order(media, decreasing=TRUE)]))
print.tuk
```

### 4.3.3 Teste de agrupamento de médias Scott-Knott

Conforme especificado na seção (2.6.3) o teste proposto por Scott e Knott (1974) é uma técnica de agrupamento de médias, a qual baseia-se na razão de verossimilhanças para sua composição. Assim sendo, em um grupo de  $k$  médias, o teste avalia as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu \\ H_1 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k_1} = \mu_{g_1} \text{ e } \mu_{k_1+1} = \mu_{k_1+2} = \cdots = \mu_k = \mu_{g_2} \end{cases}$$

em que  $k_1, k_2 \geq 1$ , com  $k_2 = k - k_1$ , são dados pelo número de médias contidas nos grupos 1 e 2. Enquanto isso,  $\mu_{g_1}$  e  $\mu_{g_2}$  representam, respectivamente, a média do grupo 1 e do grupo 2 de tratamentos.

Supondo que as variáveis observadas têm distribuição normal, é possível definir, sob  $H_0$  verdadeira, um modelo conforme a equação (4.1.1), definido por:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.3.3)$$

no qual  $\mathbf{Y}$  será o vetor de  $n = \sum_{i=1}^k r_i$  variáveis respostas, referentes às  $k$  médias avaliadas, ordenadas de acordo com as estimativas das médias espaciais dos tratamentos. Além disso,  $\mathbf{X}_1$  é um vetor de 1's e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é um vetor de erros aleatórios com distribuição normal de média  $\mathbf{0}$  e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{V}$ .

Com isso, sob  $H_0$  verdadeira,  $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{V})$  e a função de verossimilhança é dada por:

$$L_0(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2; \mathbf{Y}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1\boldsymbol{\mu}) \right\}; \quad (4.3.4)$$

em que  $|\mathbf{V}|$  representa o determinante da matriz  $\mathbf{V}$ .

A partir da função dada em (4.3.4), obtêm-se estimadores de máxima verossimilhança para  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\sigma^2$ , expressos por:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} &= (\mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \quad \text{e} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1 \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1 \hat{\boldsymbol{\mu}}). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Esses estimadores são substituídos na equação (4.3.4) para obtenção do valor máximo dessa função sob  $H_0$ . Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} L_0(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2; \mathbf{Y}) &= \left[ 2\pi \frac{1}{n} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1 \hat{\mu})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1 \hat{\mu}) \right]^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\} = \\ &= \left[ 2\pi \frac{1}{n} (\mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}) \right]^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Ao considerar a hipótese  $H_1$  verdadeira, é possível dividir um grupo de  $k$  médias em dois subgrupos, cujas médias são denotadas por  $\mu_{g_1}$  e  $\mu_{g_2}$ . Com isso, o seguinte modelo pode ser usado para descrever os dados:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.3.6)$$

em que:

$$\mathbf{K} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k_1} r_i \quad ; \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} \Rightarrow \sum_{i=k_1+1}^k r_i$$

e, além disso,  $\mathbf{g} = [\mu_{g_1}, \mu_{g_2}]'$  é o vetor que contém as médias dos dois grupos formados, sendo as demais componentes do modelo definidas de forma análoga ao modelo descrito em (4.3.3).

A partir deste modelo,  $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{K}\mathbf{g}, \sigma^2 \mathbf{V})$  e a função de verossimilhança é dada por:

$$L_1(\mathbf{g}, \sigma^2; \mathbf{Y}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{K}\mathbf{g})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{K}\mathbf{g}) \right\};$$

cuja maximização resulta nos seguintes estimadores:

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \quad \text{e}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{Y} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{g}})' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{g}}). \quad (4.3.7)$$

Com base nestes estimadores, o máximo da função de verossimilhança, sob  $H_1$ , é expressa por:

$$L_1(\hat{\mathbf{g}}, \hat{\sigma}^2; \mathbf{Y}) = \left[ 2\pi \frac{1}{n} (\mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}) \right]^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}.$$

De posse desses resultados, a razão entre as funções de verossimilhanças, para  $H_0$  e  $H_1$ , é definida como:

$$\frac{L_0}{L_1} = \left[ \frac{\mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}} \right]^{+\frac{n}{2}} = [1 - B]^{+\frac{n}{2}};$$

em que

$$B = \frac{\mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}}.$$

Comparando esta razão de verossimilhança com aquela apresentada no APÊNDICE A, observa-se que, para o caso em que  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , tem-se:

$$B_1 = \frac{\mathbf{Y}' \mathbf{K} (\mathbf{K}' \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{Y}}{\mathbf{Y}' \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1' \mathbf{Y}} = \frac{B_0}{n\hat{\sigma}_0^2}.$$

Com isso, a estatística do teste Scott-Knott pode ser expressa por:

$$\lambda = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} n B_1, \quad \text{em que } n = \sum_{i=1}^k r_i. \quad (4.3.8)$$

Conforme apresentado no APÊNDICE A, Scott e Knott (1974), utilizando uma metodologia proposta por Hartigan (1972), conseguiu estabelecer uma equivalência entre a estatística de teste apresentada em (4.3.8) e a distribuição  $\chi_{\nu_0}^2$ , com  $\nu_0 = k/(\pi - 2)$ , de modo que, sob  $H_0$  verdadeira,  $\lambda$  tem distribuição  $\chi_{\nu_0}^2$ , com  $\nu_0 = k/(\pi - 2)$ .

A partir desses resultados, essa distribuição será utilizada como aproximação para testar as hipóteses descritas em (4.3.3) para os casos em que  $\mathbf{V} \neq \mathbf{I}$ . Sendo assim, ao

comparar  $k$  médias, particionadas em dois grupos distintos, a hipótese nula de igualdade entre as médias dos dois grupos deve ser rejeitada se, e somente se,

$$\lambda = \frac{\pi}{2(\pi - 2)} nB \geq \chi_{(\nu_0, \alpha)}^2, \quad \text{em que } n = \sum_{i=1}^k r_i, \quad (4.3.9)$$

sendo  $\alpha$  o nível de significância adotado no teste, o qual representa a probabilidade à direita do quantil  $\chi_{(\nu_0, \alpha)}^2$ .

Desse modo, a partir da modificação proposta, a aplicação do teste Scott-Knott percorrerá as seguintes etapas:

- i) ordenar as médias espaciais dos tratamentos e, a partir daí, dividir os tratamentos em dois grupos, para as  $k - 1$  partições possíveis;
- ii) ordenar o vetor  $\mathbf{Y}$ , segundo a ordem dos tratamentos, sendo que  $\mathbf{Y}$  deve ser composto pelas observações provenientes dos tratamentos presentes em cada partição;
- iii) determinar a partição da matriz  $\Sigma$ , a qual refere-se às covariâncias entre as observações contidas em  $\mathbf{Y}$ , conforme especificado no item anterior;
- iv) calcular o valor de  $B$ , conforme apresentado a seguir, para todas as partições possíveis:

$$B = \frac{\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{K}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y}}{\mathbf{Y}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y}};$$

- v) escolher a partição que apresentou o maior valor para  $B$  na etapa anterior;
- vi) calcular a estatística de teste, conforme equação (4.3.9), comparando-a com o quantil  $\chi_{(\nu_0, \alpha)}^2$  da distribuição Qui-Quadrado, em que  $\nu_0 = k/(\pi - 2)$ . Se esta estatística for maior ou igual que o quantil determinado, rejeita-se a hipótese de que os dois grupos apresentam médias iguais;
- vii) no caso de rejeitar essa hipótese, os dois subgrupos formados serão independentemente submetidos aos passos (ii) à (vi). O processo em cada subgrupo se encerra ao aceitar  $H_0$  no passo (vi) ou quando cada subgrupo contiver apenas uma média.

A aplicação desse teste pode ser realizada por meio do *software R* (R CORE TEAM, 2016), a partir da função proposta *sk.esp*, cuja versão preliminar de sua implementação encontra-se disponível no ANEXO B. Esta função é definida a partir das seguintes componentes:

```
sk.esp(y ,trat, coords, trend=FALSE, phi, sill, nugget=0, model,
                                             sig.level=0.05)
```

em  $y$  representa um vetor de observações,  $trat$  é um vetor que especifica o tratamento que cada observação do vetor  $y$  recebeu.

Além disso, para a definição da matriz de covariâncias, é necessário informar as coordenadas dos pontos amostrados por meio da componente  $coords$ ; os parâmetros do ajuste do semivariograma: alcance ( $phi$ ), patamar ( $sill$ ) e efeito pepita ( $nugget$ ), no qual este último apresenta o valor zero como *default*; e, por fim, o modelo teórico ( $model$ ) do semivariograma ajustado.

Já a componente  $trend$ , definida como *TRUE* ou *FALSE* cuja última opção é o *default*, informa se deve ser utilizado o modelo espacial com ou sem tendência espacial. Ressalta-se que, até o momento, quando a tendência é incluída no modelo, a função implementada realiza apenas o ajuste da tendência linear de primeiro grau em função das coordenadas.

Finalmente,  $sig.level$  representa o nível de significância estabelecido para a aplicação do teste, o qual apresenta como *default* o valor de  $\alpha = 0,05$ .

#### 4.4 Avaliação da adequabilidade dos testes propostos

A adequabilidade dos testes, sugeridos neste trabalho, é verificada por meio da avaliação das taxas empíricas de erro tipo I, a partir da comparação dessas com os níveis de significância pré-estabelecidos. Além disso, a capacidade dos testes em detectar diferenças entre as médias é avaliada por meio da estimação do poder. Por fim, com o intuito de mostrar eficiência dos testes espaciais em relação aos testes clássicos, as estimativas de poder de ambas abordagens são comparadas em cada configuração.

##### 4.4.1 Taxas de erro e poder do teste $F$ da análise de variância espacial

Foram avaliadas oito configurações de dependência espacial, definidas pela combinação dos parâmetros do semivariograma especificados. Para cada combinação desses parâmetros, considerou-se dois casos: ausência e presença de tendência espacial. Com isso, para cada estrutura de simulação considerada, fixando os efeitos de tratamentos

como nulos, obteve-se os resultados do teste  $F$ , o qual foi definido por meio da incorporação da informação espacial na análise de variância.

Como foram simulados  $M = 2000$  experimentos para cada configuração, a taxa de erro tipo I foi estimada a partir da razão entre número de experimentos que rejeitaram a hipótese nula incorretamente e o número de experimentos simulados. Os resultados referentes a cada configuração, considerando os níveis de significância  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,01$ , são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Taxas de erro tipo I por experimento do teste  $F$  espacial para os efeitos de tratamentos, sob  $H_0$  completa, na presença de correlação espacial.

Configuração	Sem tendência		Com tendência	
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
(0; 2,5; 4)	0,0410	0,0068	0,0397	0,0046 <sup>+</sup>
(0; 2,5; 7)	0,0484	0,0076	0,0342 <sup>+</sup>	0,0055
(0; 4; 4)	0,0406	0,0052	0,0432	0,0080
(0; 4; 7)	0,0494	0,0108	0,0410	0,0057
(1,5; 2,5; 4)	0,0715 <sup>*</sup>	0,0145	0,0557	0,0161
(1,5; 2,5; 7)	0,0650 <sup>*</sup>	0,0140	0,0637	0,0131
(1,5; 4; 4)	0,0695 <sup>*</sup>	0,0175 <sup>*</sup>	0,0654 <sup>*</sup>	0,0198 <sup>*</sup>
(1,5; 4; 7)	0,0650 <sup>*</sup>	0,0165	0,0640 <sup>*</sup>	0,0157

Legenda: O símbolo (+) indica que taxa estimada foi abaixo do limite inferior do intervalo considerado, enquanto (\*) indica que a taxa ultrapassou o limite superior do intervalo.

Comparando os resultados da Tabela 4.3 com os intervalos de significância definidos em (3.2.1) e (3.2.2), pode-se notar que, nos experimentos simulados sem tendência, para as configurações avaliadas com efeito pepita 0, as taxas de erro tipo I empíricas não diferiram significativamente, ao nível de 5%, dos níveis nominais, tanto para  $\alpha = 0,05$  quanto para  $\alpha = 0,01$ .

Entretanto, ao considerar os experimentos sem tendência e com efeito pepita de 1,5, as taxas de erro tipo I ultrapassaram o limite superior do intervalo construído para  $\alpha = 0,05$ . Porém, quando se utilizou  $\alpha = 0,01$ , na simulação sem tendência, apenas a configuração (1,5; 4; 4) não manteve a taxa de erro tipo I estimada dentro do intervalo determinado.

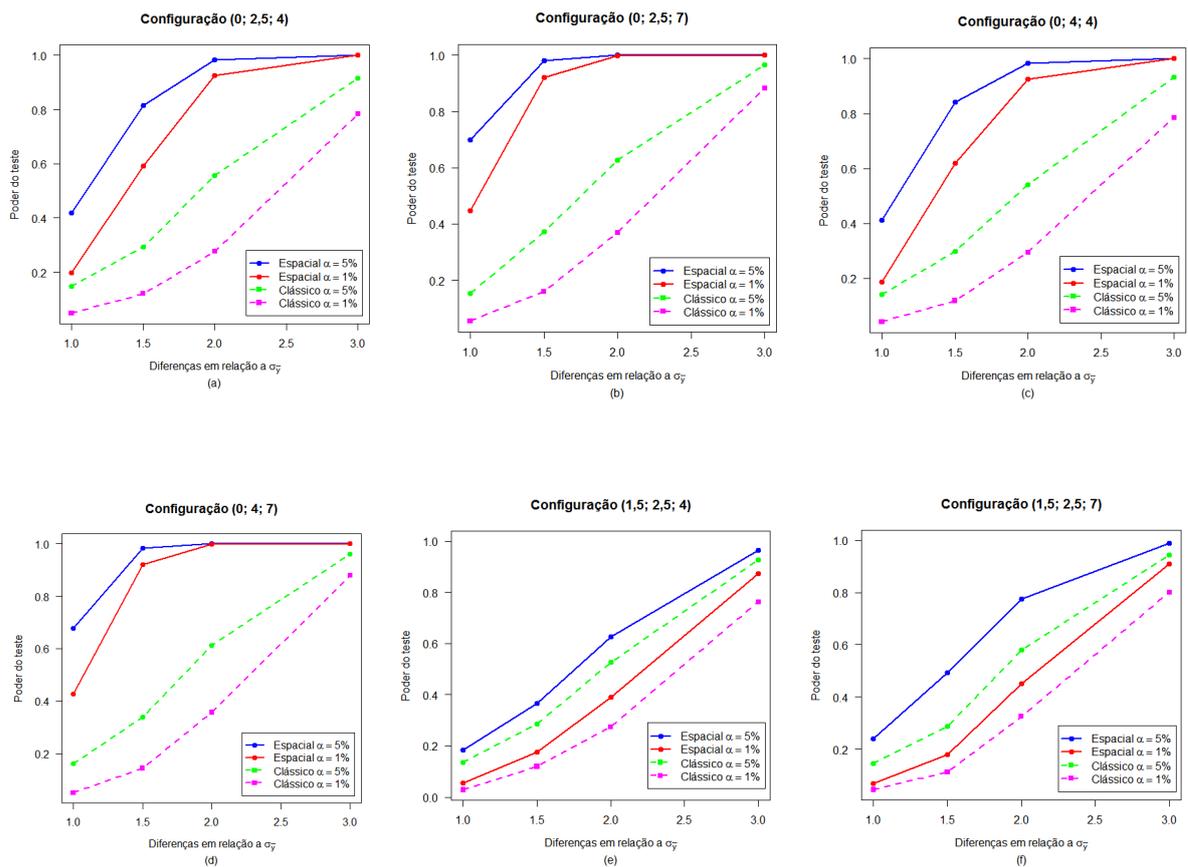
Em relação aos cenários simulados com a presença de tendência espacial, considerando  $\alpha = 0,05$ , a taxa de erro tipo I para a configuração (0; 2,5; 7) ficou abaixo do limite inferior do intervalo, enquanto as configurações (1,5; 4; 4) e (1,5; 4; 7) apresentaram valores ligeiramente maiores que o limite superior desse mesmo intervalo. Nesse mesmo cenário, porém adotando  $\alpha = 0,01$ , percebe-se que a configuração (0; 2,5; 4) apresentou uma taxa de erro tipo I abaixo do limite inferior do intervalo, ao contrário do que ocorreu com a configuração (1,5; 4; 4), que resultou em uma taxa acima do seu limite superior.

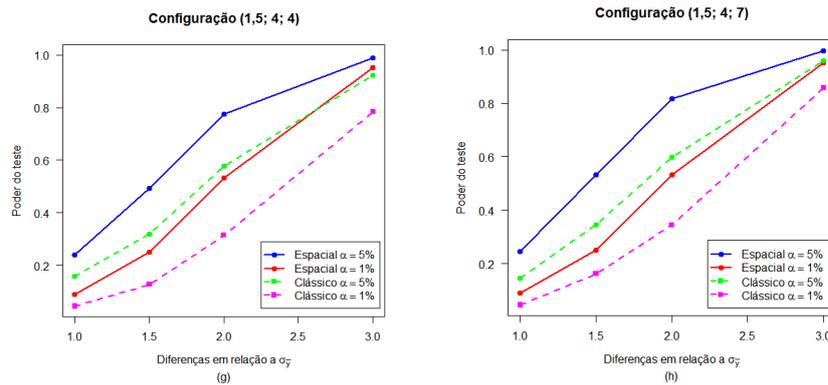
Para as demais configurações avaliadas, as taxas de erro estimadas não foram consideradas diferentes dos níveis nominais estabelecidos.

A segunda etapa de avaliação da adequabilidade do teste dedicou-se à obtenção de valores referentes ao poder dos testes espaciais, sendo que esse informa a porcentagem dos experimentos em que o teste rejeitou corretamente a hipótese nula. Os resultados encontrados para cada diferença entre os tratamentos, determinada na simulação, são apresentados no ANEXO C.

Com o intuito de comparar o poder do teste  $F$ , aplicado sob abordagem clássica (independente) e espacial, encontram-se na Figura 4.1 as curvas de poder estimadas em ambas abordagens, para todas as configurações analisadas na ausência do efeito de tendência espacial.

Figura 4.1 – Poder do teste  $F$  espacial e clássico, em porcentagem, para dados simulados sem tendência, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,01$ .





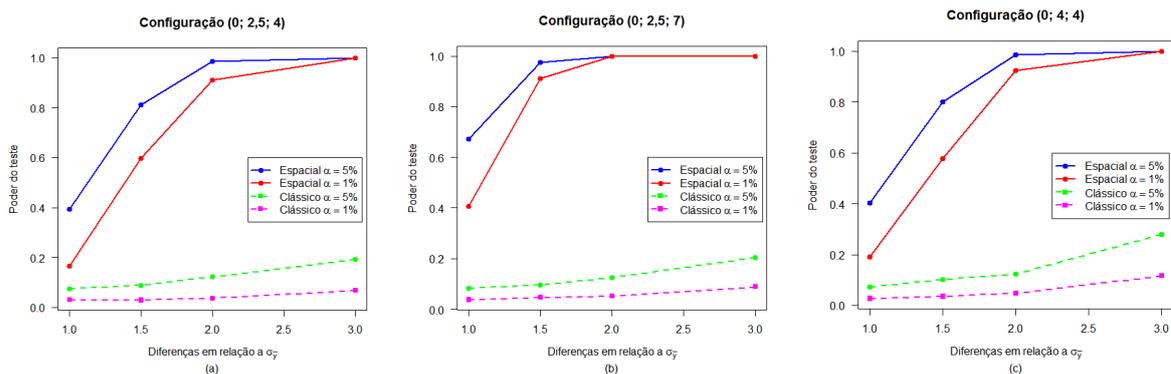
A partir dessa figura, pode-se notar que a principal divergência entre as curvas de poder é resultante do valor de efeito pepita adotado no processo de simulação, de modo que o teste  $F$  espacial apresentou-se mais poderoso para as configurações em que o efeito pepita foi 0 do que para os valores de 1,5.

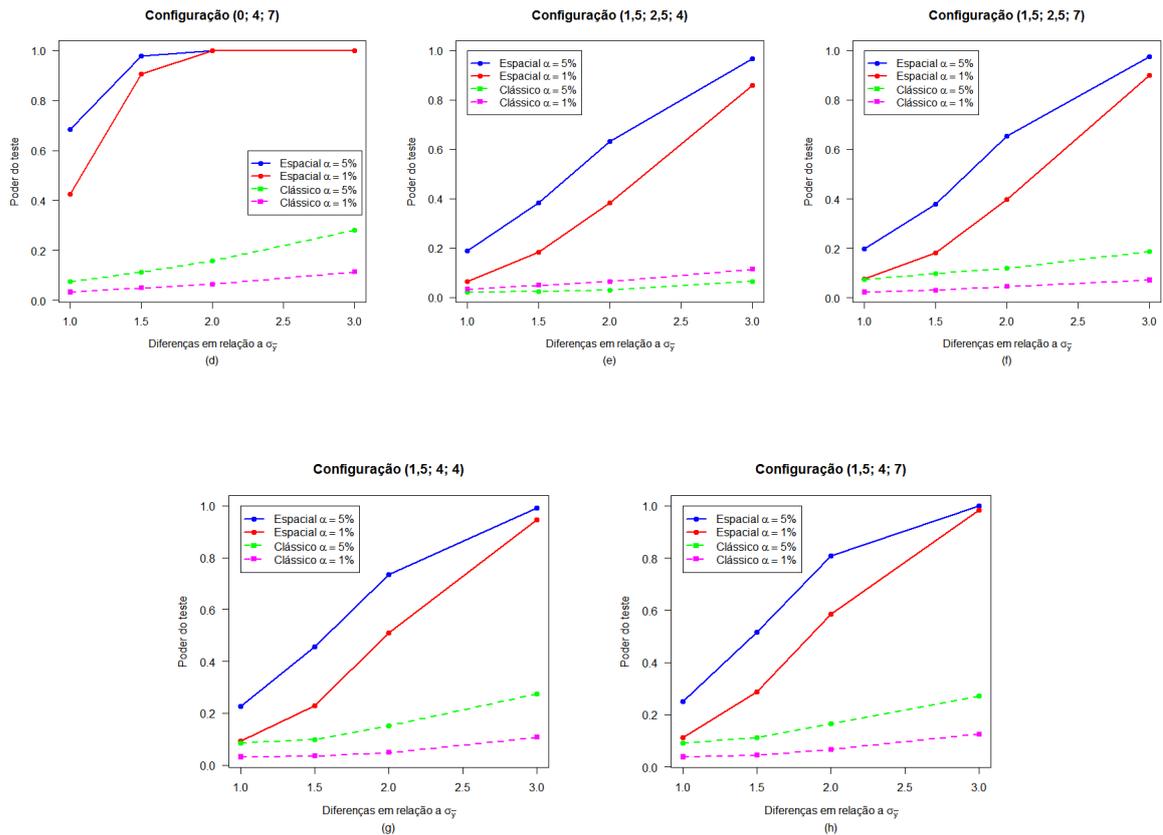
Considerando o efeito pepita 0, pode-se notar uma maior eficiência do teste  $F$  espacial nas configurações com maior valor de alcance do semivariograma, apresentando maior capacidade, principalmente, em detectar pequenas diferenças entre as médias dos tratamentos. Já para as configurações de efeito pepita 1,5, as curvas apresentaram comportamento semelhante independente do alcance estabelecido.

Com relação ao patamar, pode-se verificar que as curvas apresentaram o mesmo comportamento em ambos patamares, para todas as configurações e níveis de significância avaliados.

As curvas de poder para os cenários simulados com a presença de tendência espacial são apresentadas na Figura 4.2. A partir dessa figura, em todas as configurações, observa-se que o teste  $F$  espacial apresentou o mesmo comportamento encontrado nos experimentos simulados sem tendência espacial e, podendo concluir, com isso, que o efeito de tendência não interferiu no poder desse teste.

Figura 4.2 – Poder do teste  $F$  espacial e clássico, em porcentagem, para dados simulados com tendência, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,01$ .





Esse mesmo fato não é observado para o teste  $F$  com abordagem clássica, uma vez que, sob presença de tendência espacial, essa modelagem apresentou uma capacidade muito baixa para detectar diferenças entre as médias de tratamentos.

Finalmente, destaca-se que poder do teste para a abordagem espacial foi superior, em todos os cenários analisados, ao poder do teste obtido por meio da abordagem clássica. Com isso, pode-se concluir que a incorporação da informação espacial, nesse teste, resultou em uma maior eficiência para apontar diferenças entre os tratamentos, quando esses provinham de experimentos com dependência espacial.

#### 4.4.2 Taxas de erro e poder dos testes de comparações múltiplas

Esta seção destina-se à avaliação dos testes de comparações múltiplas, propostos para a análise de experimentos com dependência espacial, na ausência e presença de tendência espacial, sendo essa referente aos efeitos das coordenadas.

Nesta primeira etapa, são apresentados os resultados para os experimentos simulados na ausência de tendência espacial. Para esse cenário, foram obtidas as taxas de erro tipo I, por experimento, estimadas em cada configuração espacial avaliada. Dessa forma, encontram-se nas Tabelas 4.4 e 4.5 as taxas de erro tipo I empíricas obtidas, respectivamente, ao adotar os níveis  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,01$  de significância. As considerações

acerca dessas taxa são feitas por meio dessas com os intervalos de proporções para os níveis nominais, apresentados em (3.2.1) e (3.2.2).

Tabela 4.4 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, sem tendência espacial, sob  $H_0$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração espacial	$t$ multivariado	$q$ estudentizado	Scott-Knott
(0; 2,5; 4)	0,0265 <sup>+</sup>	0,0255 <sup>+</sup>	0,0495
(0; 2,5; 7)	0,0475	0,0470	0,0575
(0; 4; 4)	0,0320 <sup>+</sup>	0,0320 <sup>+</sup>	0,0375 <sup>+</sup>
(0; 4; 7)	0,0390	0,0380	0,0610
(1,5; 2,5; 4)	0,1300 <sup>*</sup>	0,1295 <sup>*</sup>	0,0830 <sup>*</sup>
(1,5; 2,5; 7)	0,1165 <sup>*</sup>	0,1160 <sup>*</sup>	0,0775 <sup>*</sup>
(1,5; 4; 4)	0,1005 <sup>*</sup>	0,1010 <sup>*</sup>	0,0880 <sup>*</sup>
(1,5; 4; 7)	0,1200 <sup>*</sup>	0,1190 <sup>*</sup>	0,0720 <sup>*</sup>

Legenda: O símbolo (+) indica que taxa estimada foi abaixo do limite inferior do intervalo considerado, enquanto (\*) indica que a taxa ultrapassou o limite superior do intervalo.

Tabela 4.5 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, sem tendência espacial, sob  $H_0$  completa, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração espacial	$t$ multivariado	$q$ estudentizado	Scott-Knott
(0; 2,5; 4)	0,0050 <sup>+</sup>	0,0050 <sup>+</sup>	0,0075
(0; 2,5; 7)	0,0085	0,0085	0,0115
(0; 4; 4)	0,0035 <sup>+</sup>	0,0035 <sup>+</sup>	0,0080
(0; 4; 7)	0,0055	0,0050 <sup>+</sup>	0,0145
(1,5; 2,5; 4)	0,0300 <sup>*</sup>	0,0290 <sup>*</sup>	0,0190 <sup>*</sup>
(1,5; 2,5; 7)	0,0330 <sup>*</sup>	0,0335 <sup>*</sup>	0,0120
(1,5; 4; 4)	0,0255 <sup>*</sup>	0,0250 <sup>*</sup>	0,0195 <sup>*</sup>
(1,5; 4; 7)	0,0400 <sup>*</sup>	0,0395 <sup>*</sup>	0,0145

Legenda: O símbolo (+) indica que taxa estimada foi abaixo do limite inferior do intervalo considerado, enquanto (\*) indica que a taxa ultrapassou o limite superior do intervalo.

A partir desses resultados é possível observar uma forte similaridade entre os testes fundamentados na distribuição  $t$  multivariada e  $q$  estudentizada, os quais destinam-se às comparações dos contrastes de médias tomadas duas a duas, os quais, neste trabalho, foram definidos como contrastes de Tukey.

Considerando o efeito pepita 0, em ambos níveis de significância, os testes para os contrastes de Tukey apresentaram taxas abaixo do limites inferiores dos intervalos para as configurações com alcance 4, enquanto para o alcance 7, as taxas mantiveram-se dentro dos intervalos construídos para os níveis nominais. Já para as configurações com efeito

pepita com valor de 1,5, todas as taxas de erro estimadas para esses testes superaram o limite superior dos intervalos considerados.

Com relação aos resultados atingidos pelo teste Scott-Knott, nota-se que, para  $\alpha = 0,01$ , apenas as configurações com efeito pepita 1,5 e alcance 4 apresentaram taxas que diferiam significativamente do nível nominal. Tem-se ainda que, ao considerar  $\alpha = 0,05$ , as taxas de erro estimadas para esse teste excederam o limite superior do intervalo quando o efeito pepita foi fixado como 1,5. Além disso, com exceção da configuração (0; 4; 4) que apresentou uma taxa de erro abaixo do nível de significância adotado, as demais configurações em que o efeito foi 0 apresentaram taxas de erro iguais aos níveis nominais.

De modo geral, verifica-se que o teste Scott-Knott manteve as taxas de erro mais próximas dos níveis nominais estabelecidos do que os testes para os contrastes de Tukey.

Na etapa seguinte de avaliação da adequabilidade, obtiveram-se os valores referentes ao poder dos testes espaciais para as comparações múltiplas. Os resultados encontrados estão disponíveis no ANEXO C. Deve-se ressaltar que, em todos os cenários simulados, os testes para os contrastes de Tukey, considerando a distribuição  $t$  multivariada e  $q$  estudentizada, apresentaram apenas diferenças em escala decimal nas estimativas percentuais do poder. Dessa forma, considera-se que os resultados para as duas distribuições adotadas foram equivalentes e, por isso, apresentam-se os resultados para apenas um desses casos.

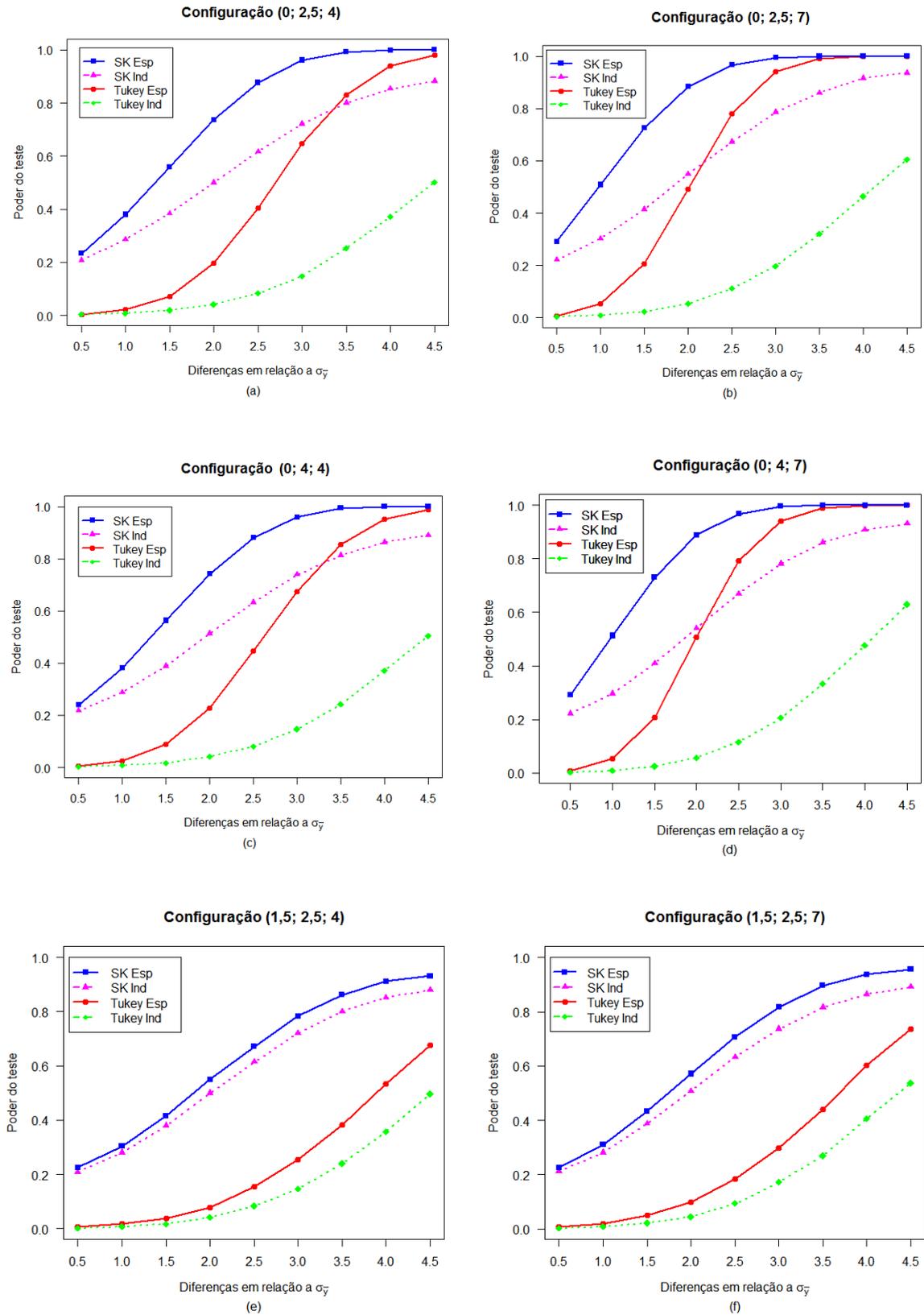
Considerando as configurações simuladas sem o efeito de tendência espacial, pode-se comparar o poder dos testes espaciais propostos e de seus representantes na abordagem clássica, esses últimos aplicados sob ótica de independência, por meio dos gráficos apresentados na Figura 4.3. Salienta-se que esses gráficos abordam apenas os resultados obtidos para o nível de significância  $\alpha = 0,05$ . Porém, como pode ser verificado a partir das porcentagens de poder, apresentadas no ANEXO C, conclusões similares são encontradas quando se considera  $\alpha = 0,01$ .

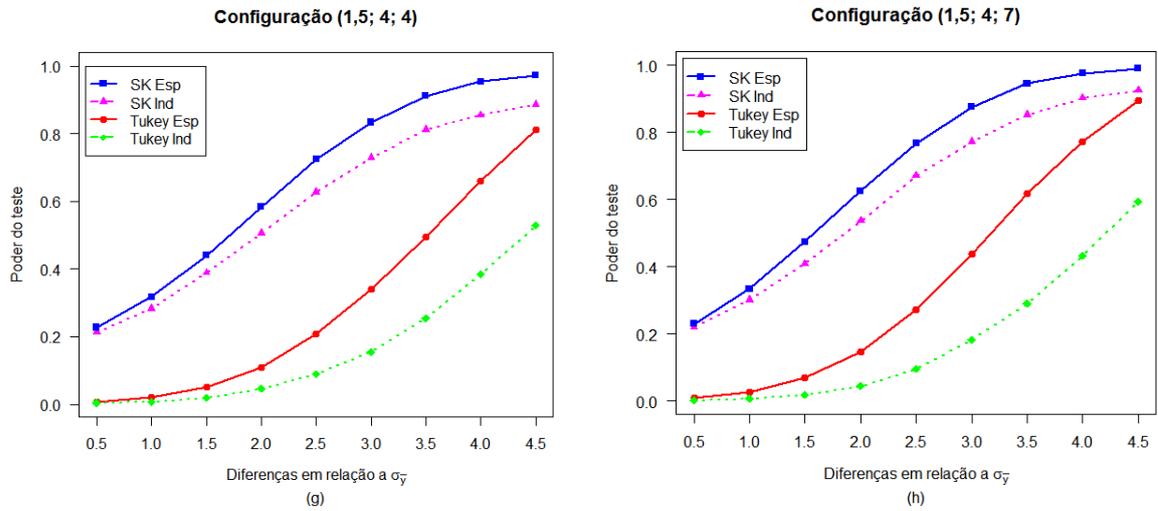
Assim como observado na avaliação do teste  $F$  espacial, nota-se uma maior divergência com relação ao efeito pepita adotado no processo de simulação, sendo os testes espaciais mais poderoso para as configurações com efeito pepita 0.

Novamente, verifica-se que os valores do patamar não alteraram o comportamento das curvas de poder em nenhum teste avaliado. Já em relação ao alcance, nota-se uma maior capacidade dos testes espaciais em detectar diferenças entre as médias quando simulados experimentos com um longo alcance.

É possível notar, ainda, que os testes aplicados com a inclusão da informação espacial foram mais poderosos que os testes que ignoram essa informação, sendo as diferenças mais acentuadas encontradas nas configurações com efeito pepita 0. Além disso, percebe-se que os resultados obtidos pelos testes clássicos (independentes) foram invariantes quanto à configuração espacial adotada.

Figura 4.3 – Poder dos testes Scott-Knott e Tukey espaciais e independentes, de acordo com cada configuração de correlação espacial simulada, sem tendência, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .





Por fim, ao realizar uma comparação entre os testes espaciais, observa-se que o teste Scott-Knott foi mais poderoso que os teste para os contratos de Tukey, principalmente na capacidade em detectar diferenças menores entre as médias dos tratamentos.

O segundo cenário avaliado refere-se aos experimentos simulados na presença de tendência espacial. A partir daí, novamente realizou-se a verificação da adequabilidade por meio das taxas de erro tipo I por experimento, obtidas por meio das simulações que consideraram os efeitos de tratamentos nulos, além da avaliação do poder dos testes, sendo essa destinada aos experimentos simulados com efeitos de tratamentos não-nulos.

As taxas de erro tipo I empíricas obtidas, considerando  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,01$ , pode ser visualizadas nas tabelas seguintes:

Tabela 4.6 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, com tendência espacial, sob  $H_0$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração espacial	$t$ multivariado	$q$ estudentizado	Scott-Knott
(0; 2,5; 4)	0,0195 <sup>+</sup>	0,0195 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(0; 2,5; 7)	0,0205 <sup>+</sup>	0,0205 <sup>+</sup>	0,0005 <sup>+</sup>
(0; 4; 4)	0,0268 <sup>+</sup>	0,0268 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>+</sup>
(0; 4; 7)	0,0254 <sup>+</sup>	0,0249 <sup>+</sup>	0,0015 <sup>+</sup>
(1,5; 2,5; 4)	0,1060 <sup>*</sup>	0,1060 <sup>*</sup>	0,0010 <sup>+</sup>
(1,5; 2,5; 7)	0,1175 <sup>*</sup>	0,1170 <sup>*</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(1,5; 4; 4)	0,0990 <sup>*</sup>	0,0990 <sup>*</sup>	0,0029 <sup>+</sup>
(1,5; 4; 7)	0,1260 <sup>*</sup>	0,1255 <sup>*</sup>	0,0095 <sup>+</sup>

Legenda: O símbolo (+) indica que taxa estimada foi abaixo do limite inferior do intervalo considerado, enquanto (\*) indica que a taxa ultrapassou o limite superior do intervalo.

Tabela 4.7 – Taxas de erro tipo I para os testes de comparações múltiplas propostos, com tendência espacial, sob  $H_0$  completa, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração espacial	$t$ multivariado	$q$ estudentizado	Scott-Knott
(0; 2,5; 4)	0,0020 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(0; 2,5; 7)	0,0033 <sup>+</sup>	0,0033 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(0; 4; 4)	0,0020 <sup>+</sup>	0,0020 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(0; 4; 7)	0,0024 <sup>+</sup>	0,0019 <sup>+</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(1,5; 2,5; 4)	0,0270 <sup>*</sup>	0,0270 <sup>*</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(1,5; 2,5; 7)	0,0365 <sup>*</sup>	0,0370 <sup>*</sup>	0,0000 <sup>+</sup>
(1,5; 4; 4)	0,0297 <sup>*</sup>	0,0293 <sup>*</sup>	0,0005 <sup>+</sup>
(1,5; 4; 7)	0,0410 <sup>*</sup>	0,0410 <sup>*</sup>	0,0035 <sup>+</sup>

Legenda: O símbolo (+) indica que taxa estimada foi abaixo do limite inferior do intervalo considerado, enquanto (\*) indica que a taxa ultrapassou o limite superior do intervalo.

De acordo com os resultados das Tabelas 4.6 e 4.7 tem-se que, na presença de tendência espacial, quando o efeito pepita foi zero, as taxas de erro tipo I dos testes para os contrastes de Tukey foram inferiores aos níveis nominais determinados. Em contrapartida, para as configurações com efeito 1,5, essas taxas mostraram-se superiores a esses níveis nominais.

Já o teste Scott-Knott apresentou taxas de erros tipo I muito inferiores aos níveis nominais estabelecidos, em todas as configurações avaliadas, quando se considerou a presença da tendência espacial no processo de simulação.

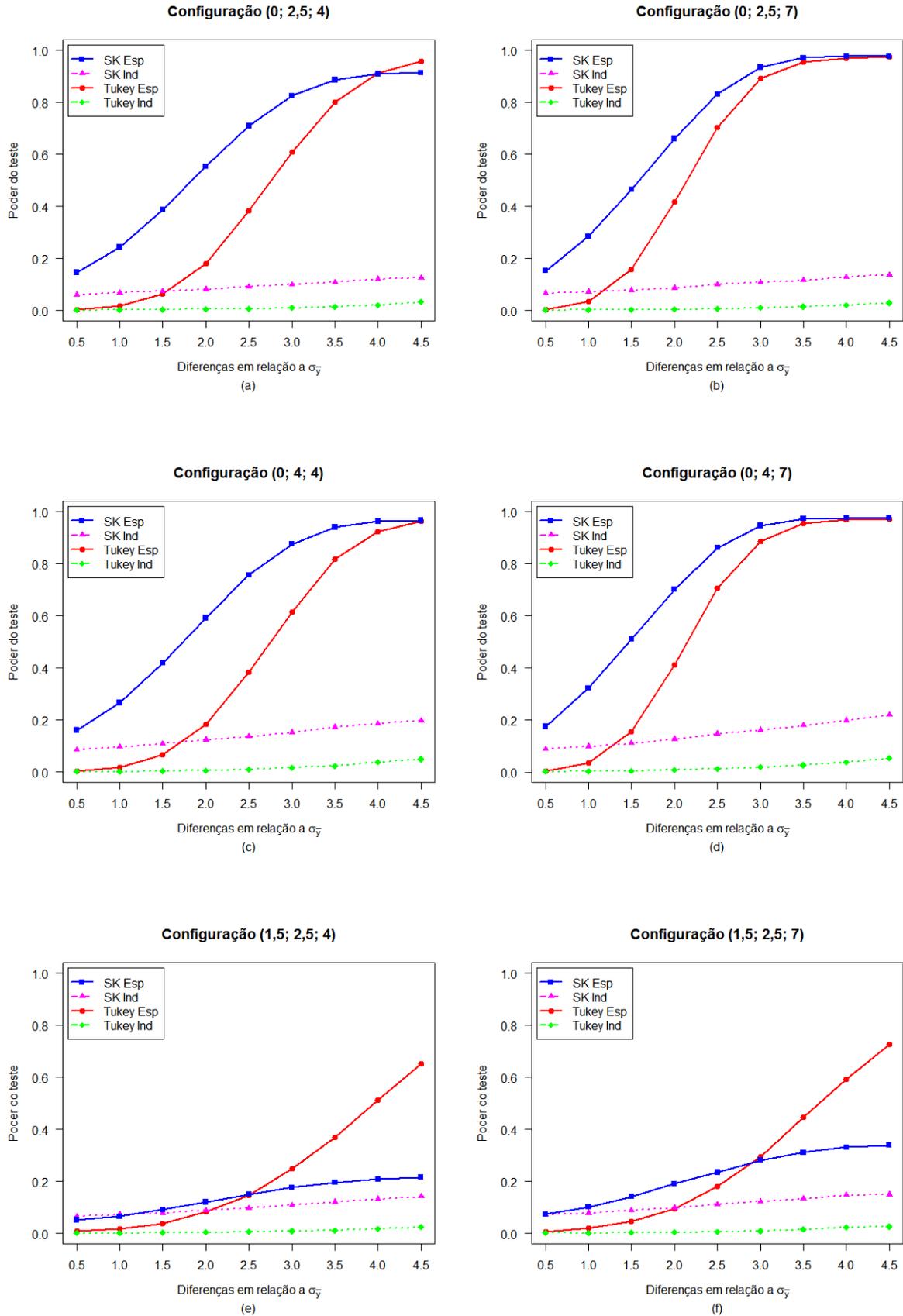
Para a discussão sobre a adequabilidade dos testes espaciais, quanto à capacidade desses em detectar diferenças entre as médias em experimentos simulados na presença de tendência espacial, apresenta-se na Figura 4.4 as curvas de poder estimadas em cada configuração avaliada, considerando o nível de significância  $\alpha = 0,05$ . Os valores de poder dos testes, para os cenários com tendência espacial, também encontram-se no ANEXO C.

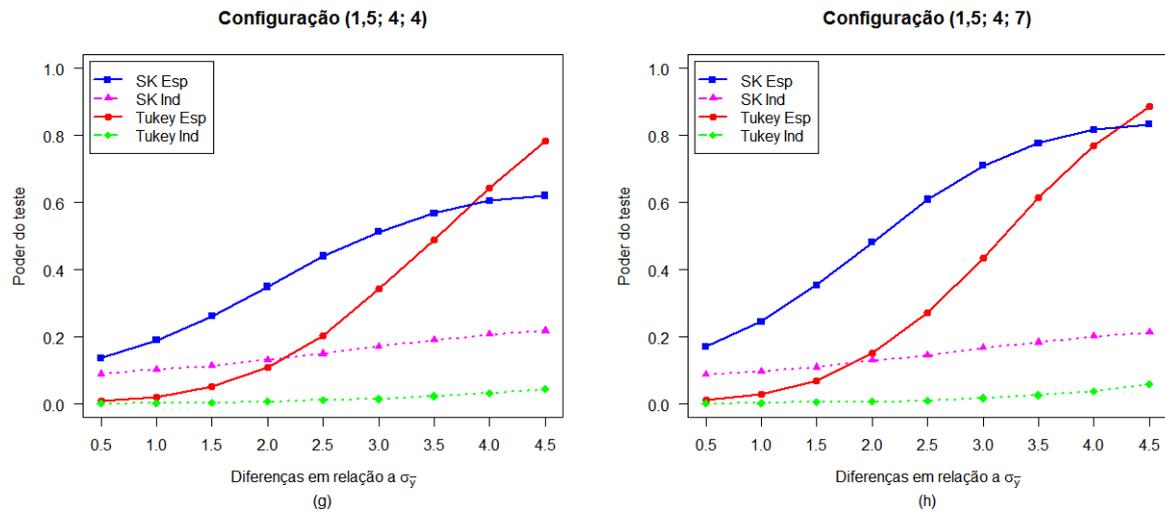
Ao comparar os cenários simulados sem e com o efeitos de tendência espacial, em suas respectivas configurações, verifica-se que todos os testes, espaciais e independentes, apresentam um maior poder na ausência de tendência espacial.

Entretanto, para as configurações com efeito pepita zero, as curvas de poder para os testes espaciais mantiveram o mesmo comportamento em ambos cenários. Essa característica não foi verificada com relação aos testes clássicos, os quais mostraram um poder muito baixo em apontar diferenças entre as médias, na presença de tendência espacial.

Ainda para as configurações com efeito pepita zero, observa-se um poder semelhante dos testes em ambos valores de patamar avaliados. Já em relação ao parâmetro de alcance, nota-se um pequeno aumento no poder para as configurações simuladas com maior alcance.

Figura 4.4 – Poder dos testes Scott-Knott e Tukey espaciais e originais, de acordo com cada configuração de correlação espacial simulada, com tendência, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .





Para as configurações em que o efeito pepita foi 1,5, os testes espaciais apresentaram um baixo desempenho, principalmente o teste Scott-Knott. Contudo, ainda assim, os testes espaciais mostraram-se superiores aos testes clássicos correspondentes. Outro fato interessante é que, para esse efeito pepita, observa-se uma influência do valor adotado para o patamar no poder dos testes, de modo que, para as configurações simuladas com o maior valor do patamar, os testes apresentaram um maior poder de discernimento entre as médias dos tratamentos.

Além disso, na presença de tendência e efeito pepita não-nulo, o teste Scott-Knott mostrou-se superior ao teste Tukey, uma vez que esse último não controlou a taxa de erro tipo I por experimento, sendo o teste Scott-Knott muito conservativo nesse cenário.

## 4.5 Análise de experimentos

Esta seção dedica-se à ilustração de aplicações das metodologias propostas neste trabalho. Para isso, inicialmente, são apresentadas análises para conjuntos de dados obtidos por meio de simulação, considerando a presença e ausência de tendência espacial. Posteriormente, é avaliado um conjunto de dados reais, provenientes de um experimento implementado para avaliar o efeito da adubação na altura da Candeia.

### 4.5.1 Experimento simulado sem o efeito de tendência espacial

O experimento avaliado foi simulado considerando-se um delineamento inteiramente casualizado, composto por 10 tratamentos e 8 repetições, cujas coordenadas foram definidas conforme apresentado na seção (3.1).

Os efeitos de tratamentos foram estabelecidos a partir de uma hipótese nula ( $H_0$ ) parcial, na qual os efeitos foram divididos em dois grupos, cuja diferença foi determinada em torno de 2 erros padrões da média. Diante disso, os seguintes parâmetros foram utilizados para o processo de simulação:

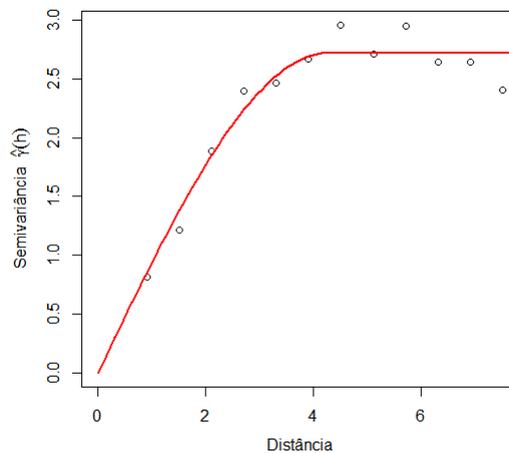
Tabela 4.8 – Parâmetros utilizados na simulação de um experimento sem tendência.

$\mu$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$\tau^2$	$\sigma^2$	$\phi$	$\theta_1$	$\theta_2$
10	0	0	0	0	0	0	0	1,12	1,12	1,12	0	2,5	4	0	0

Na Tabela 4.8 são apresentados, ainda, os parâmetros usados para o semivariograma e, no intuito de exemplificar a abordagem espacial na ausência de tendência espacial, os parâmetros referentes a esse efeito foi fixado como zero. O conjunto de dados obtidos por meio dessa simulação é disponibilizado no ANEXO D.

A primeira etapa da análise constou da detecção da estrutura da variabilidade espacial dos dados. Para isso, obteve-se os resíduos resultantes do ajuste dos efeitos determinísticos do modelo. A esses resíduos foi estimado o semivariograma, assim como o modelo teórico para o mesmo, os quais são apresentados na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Semivariograma dos resíduos e o modelo teórico ajustado, para o conjunto de dados simulados sem tendência.



Para essa descrição da variabilidade espacial considerou-se o modelo esférico, ajustado por meio do método de quadrados mínimos ordinários. A partir desse ajuste, o efeito pepita foi estimado como 0, enquanto para o patamar encontrou-se o valor de 2,799 e, por fim, foi obtido o valor de 4,2719 para o alcance.

A partir daí, determinou-se a matriz de covariância e, por meio dessa, construiu-se a análise de variância para os dados, conforme metodologia apresentada na seção (4.2.1), a qual é apresentada na tabela a seguir:

Tabela 4.9 – Análise de variância espacial para o conjunto de dados simulados sem tendência.

FV	GL	SQ	QM	$F$	Valor $p$
Coordenadas	2	7,848	3,924	1,608	0,2079
Tratamentos	9	92,145	10,238	4,194	0,0002
Resíduos	68	165,985	2,441		

Com base nos resultados apresentados na Tabela 4.9, pode-se concluir que os efeitos referentes às coordenadas espaciais não diferem significativamente de zero. Porém, ao avaliar os efeitos de tratamentos, tem-se que a hipótese nula de igualdade desses efeitos deve ser rejeitada, apontando para o fato que existe diferença entre as médias dos tratamentos. Essas conclusões foram condizentes com os efeitos estabelecidos no processo de simulação.

Mesmo os efeitos das coordenadas sendo considerados não significativos, apresenta-se na Tabela 4.10 os testes individuais para cada parâmetro específico, obtidos de acordo com a abordagem apresentada na seção (4.2.2), os quais confirmam os resultados encontrados na análise de variância.

Tabela 4.10 – Teste para os parâmetros referentes à tendência espacial, para os dados simulados na ausência desse efeito.

Parâmetros	Estimativa	Erro padrão	$t_{calc}$	Valor $p$
$\theta_1$	-0,0018	0,1740	-0,010	0,9919
$\theta_2$	0,0095	0,1428	0,067	0,9469

A etapa seguinte dedicou-se à avaliação dos efeitos de tratamentos, os quais a análise de variância apontou existir diferença entre os mesmos. Para isso, aplicou-se os testes baseados na distribuição  $t$  multivariada e  $q$  estudentizada para avaliar os contrastes de Tukey, os quais comparam todas as médias duas a duas. Assim como mencionado na seção (4.4.2), os resultados alcançados em ambas abordagens foram coincidentes.

Além disso, avaliou-se os efeitos dos tratamentos por meio do teste de agrupamento de Scott-Knott. Os resultados desses testes, os quais adotaram um nível  $\alpha = 0,05$  de significância, encontram-se na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Teste Scott-Knott e  $t$  multivariado para as médias espaciais dos tratamentos, para o experimento simulado sem tendência.

Tratamentos	Médias	Scott-Knott	$t$ multivariado
8	11,483	a	a
10	10,899	a	ab
9	10,873	a	ab
5	10,040	b	ab
4	9,980	b	b
7	9,894	b	b
3	9,872	b	b
1	9,670	b	b
2	9,561	b	b
6	9,506	b	b

Os testes foram aplicados às médias espaciais dos tratamentos, obtidas por meio da incorporação da informação espacial em sua estimação. A partir dos resultados apresentados na Tabela 4.11, pode-se notar que o teste de Scott-Knott foi capaz de reagrupar as médias exatamente como definido no processo de simulação.

A partir do teste para os contrastes de Tukey, para o qual tem-se que médias seguidas de mesmas letra não diferem significativamente entre si, também foi possível detectar diferenças entre os tratamentos. Esse teste caracteriza-se por seu maior rigor, o que justifica o fato de que os tratamentos 5, 9 e 10 não foi considerado significativamente diferente dos demais. Porém, de modo geral, os resultados obtidos por este teste podem ser considerados semelhantes às condições impostas na simulação.

Além disso, pode-se associar os resultados obtidos desses testes com aqueles apresentados na Figura 4.3 (a), os quais apontaram o teste Scott-Knott mais poderoso ao avaliar diferenças de 2 erros padrões da média, considerando-se a configuração espacial simulada nesse experimento.

#### 4.5.2 Experimento simulado com o efeito de tendência espacial

O conjunto de dados avaliado nessa seção foi simulado sob as mesmas condições dos dados simulados na seção (4.5.1), diferindo somente pelo fato de que, neste caso, houve a inclusão dos efeitos de tendência espacial. Dessa forma, o conjunto de dados foi obtido a partir dos seguintes parâmetros:

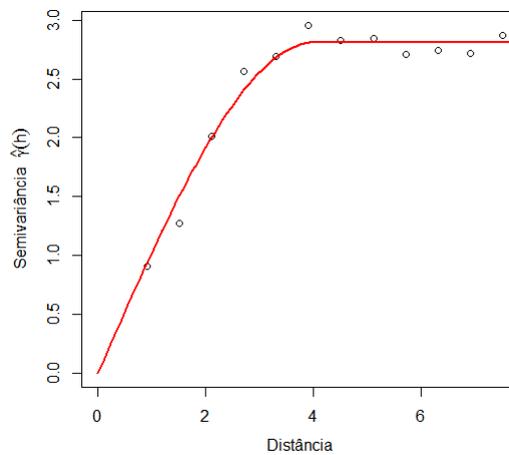
Tabela 4.12 – Parâmetros utilizados na simulação de um experimento com tendência.

$\mu$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$	$t_{10}$	$\tau^2$	$\sigma^2$	$\phi$	$\theta_1$	$\theta_2$
10	0	0	0	0	0	0	0	1,12	1,12	1,12	0	2,5	4	1	-1

A partir da Tabela 4.12, observa-se que os efeitos referentes às coordenadas ( $\theta_i$ ) são diferentes de zero. Esse conjunto de dados também pode ser visualizado no ANEXO D.

Novamente, a detecção da estrutura da variabilidade espacial foi realizada por meio do estimação do semivariograma dos resíduos, seguida pelo ajuste do modelo esférico ao mesmo, os quais podem ser vistos na Figura 4.6. Esse ajuste apresentou um efeito pepita 0, o patamar com o valor de 2,813 e um alcance cujo valor foi 4,0372.

Figura 4.6 – Semivariograma e modelo esférico ajustado para os dados simulados com tendência.



A análise de variância com a incorporação dessa informação espacial é dada conforme a Tabela 4.13. Por meio dessa tabela, pode-se concluir que os efeitos referentes às coordenadas espaciais são significativamente diferentes de zero. Além disso, é possível concluir, ainda, que existe diferença significativa entre as médias dos tratamentos avaliados.

Tabela 4.13 – Análise de variância espacial para o conjunto de dados simulados com tendência.

FV	GL	SQ	QM	$F$	Valor $p$
Coordenadas	2	208,855	104,428	39,369	0,0000
Tratamentos	9	84,853	9,428	3,554	0,0012
Resíduos	68	180,371	2,653		

Os testes para os efeitos das coordenadas são apresentados na Tabela 4.14, a partir dos quais notam-se estimativas muito próximas dos valores simulados para os parâmetros. De acordo com os testes aplicados, a hipótese de que o parâmetro avaliado é igual a zero

foi rejeitada para ambos parâmetros de tendência espacial. Novamente, verifica-se que os resultados alcançados convergem ao cenário simulado.

Tabela 4.14 – Teste para os parâmetros referentes à tendência espacial, para os dados simulados na presença desse efeito.

Parâmetros	Estimativa	Erro padrão	$t_{calc}$	Valor $p$
$\theta_1$	0,9483	0,1710	5,545	0,0000
$\theta_2$	-0,9394	0,1428	-6,576	0,0000

Finalmente, aplicou-se o teste  $t$  multivariado para os contrastes de Tukey, além do teste de agrupamento de Scott-Knott, cujos resultados encontram-se Tabela 4.15. Nos dois casos apresentados, utilizou-se um nível de significância de  $\alpha = 0,05$ .

Assim como no experimento avaliado na seção (4.5.1), a avaliação dos contrastes de Tukey, utilizando as distribuições  $t$  multivariada ou  $q$  estudentizada, direcionaram às mesmas conclusões acerca dos tratamentos. Assim sendo, conforme mostra a Tabela 4.15, esses testes não conseguiram apontar diferenças entre as médias espaciais dos tratamentos.

Porém, ao aplicar o teste de Scott-Knott, foi possível captar diferenças entre as médias dos tratamentos, considerando o nível  $\alpha = 0,05$  de significância para o teste. Conforme mostra a Tabela 4.15, pode-se concluir que as médias dos tratamentos 8, 9 e 10 não diferem entre si mas são superiores às demais, assim como definido no processo de simulação.

Tabela 4.15 – Teste Scott-Knott e  $t$  multivariado para as médias espaciais dos tratamentos, para o experimento simulado com tendência.

Tratamentos	Médias	Scott-Knott	$t$ multivariado
9	11,570	a	a
8	11,398	a	a
10	11,361	a	a
6	10,454	b	a
4	10,405	b	a
5	10,373	b	a
2	10,331	b	a
7	10,157	b	a
1	10,089	b	a
3	10,038	b	a

Esses resultados também condizem com a avaliação de poder dos testes, apresentado na Figura 4.4(a) para essa configuração espacial, a qual mostrou que o teste Scott-Knott é mais poderoso para detectar diferenças menores entre as médias dos tratamentos.

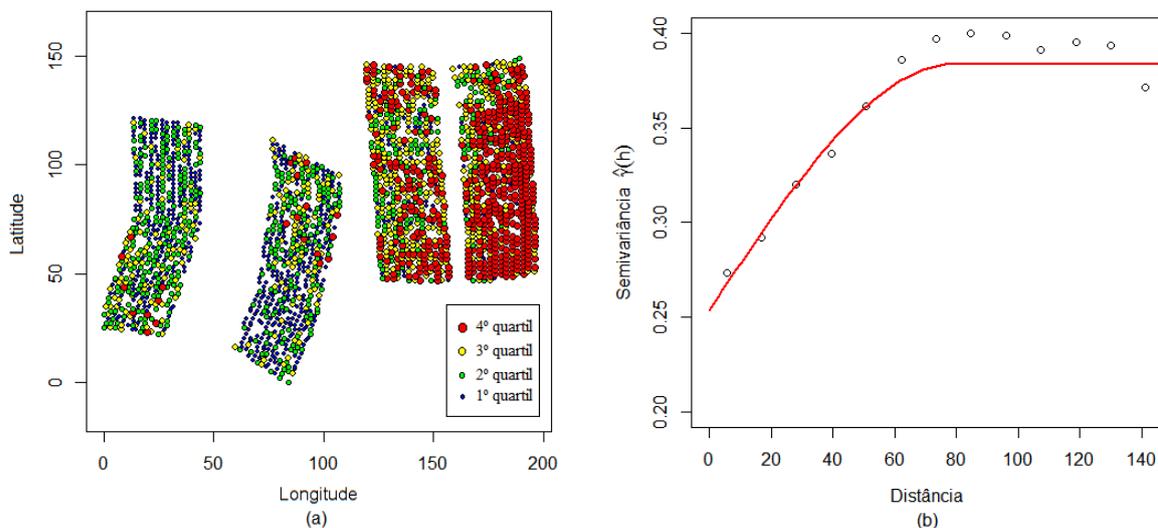
### 4.5.3 Experimento real com dados da Candeia

A candeia (*Eremanthus erythropappus* (DC.) McLeish) é uma árvore nativa do Brasil, a qual pertence à família Asteraceae. Sua principal importância no mercado deriva da extração de óleo essencial, detentor do alfabisabolol, um princípio ativo que apresenta importantes propriedades, tais como: antiflogísticas, antibacterianas, antimicóticas, dermatológicas e espasmódicas (SCOLFORO et al., 2012).

Porém, conforme afirma Cunha et al.(2005), o cultivo comercial e a implantação da candeia é dificultada pelas múltiplas e complexas relações com o meio ambiente nas regiões onde estão inseridas. Assim sendo, a consideração da presença de uma componente espacial, em modelos utilizados na análise de dados experimentais de candeia, é de fundamental importância para um maior conhecimento acerca de seu comportamento silvicultural.

Para a realização dessa análise, considerou-se a informação obtida em todas as árvores do experimento, sendo a variável avaliada neste trabalho resultante da mensuração da altura das mesmas. O gride das posições espaciais amostradas, com a representação das observações de acordo com o quartil ao qual pertencem são mostrados na Figura 4.7(a). A partir da inspeção desse gráfico, é possível observar, de maneira subjetiva, uma tendência nos dados em função da latitude, uma vez que a medida que se aumenta os valores dessa coordenada, encontram-se os maiores valores observados para a altura das árvores. Com isso, optou-se pela utilização do modelo que incluía a informação da tendência espacial.

Figura 4.7 – Gride com os quartis dos dados de Candeia (a), e semivariograma com o modelo teórico estimado sobre os resíduos (b).



Para detectar a estrutura de variabilidade espacial, procedeu-se o ajuste inicial

dos efeitos determinísticos, referentes aos tratamentos e a tendência espacial, com base nos procedimentos clássicos de estimação. A partir daí, com a obtenção dos resíduos foi possível estimar o semivariograma, para o qual foi utilizado o estimador de Matheron. Por meio do método de quadrados mínimos, realizou-se o ajuste dos modelos teóricos esférico, gaussiano e exponencial, de modo que o critério de seleção da validação cruzada apontou o modelo esférico como o mais adequado dentre os modelos comparados.

Em posse das estimativas dos parâmetros do semivariograma, obteve-se uma estimativa para a matriz de covariâncias dos erros ( $\hat{\Sigma}$ ). Como especificado na seção (3.3), essa matriz foi utilizada para uma estimação mais eficiente dos parâmetros ( $\hat{\beta}_V^0$ ) do modelo. Utilizando o algoritmo iterativo para estimação de  $\hat{\Sigma}$  e  $\hat{\beta}_V^0$  até convergência dos valores estimados, ajustou-se um modelo conforme apresentado na Figura 4.7(b).

De acordo com esse ajuste, a variabilidade espacial pode ser descrita por um modelo esférico com um efeito pepita de 0,2541, o patamar dado por 0,3928 e um alcance definido como 84,761 metros, o que significa dizer que existe uma dependência entre as posições amostradas cujas distâncias euclidianas que as separam são inferiores a esse alcance.

Com base na matriz de covariâncias, construída a partir desse ajuste, procedeu-se a análise de variância, conforme proposto na seção (4.2.1). Os resultados dessa análise são apresentados na Tabela 4.16.

Tabela 4.16 – Análise de variância espacial, considerando o efeito de tendência, para os dados de Candeia.

FV	GL	SQ	QM	$F$	Valor $p$
Coordenadas	2	7,896	3,948	9,953	0,0000
Tratamentos	12	22,850	1,904	4,801	0,0000
Resíduos	2164	858,343	0,397		

De acordo com as informações da Tabela 4.16, rejeita-se  $H_0$  para os efeitos de coordenadas, o que significa dizer que pelo menos um parâmetro referente à tendência espacial difere significativamente de zero. Além disso, também foi rejeitada a hipótese nula para os tratamentos, de modo que suas médias não devem ser consideradas todas iguais. Essas conclusões resultam na necessidade de se utilizar testes adicionais para determinar quais parâmetros foram responsáveis por essas rejeições.

A primeira análise posterior as essas rejeições foi realizada para avaliar a significância dos parâmetros relacionados às coordenadas. Por meio do desenvolvimento descrito na seção (4.2.2), obteve-se os seguintes resultados:

Tabela 4.17 – Teste para os parâmetros referentes à tendência espacial, para os dados de Candeia.

Parâmetros	Estimativa	Erro padrão	$t_{calc}$	Valor $p$
$\theta_1$	0,0084	0,0019	4,364	0,0000
$\theta_2$	-0,0005	0,0027	-0,173	0,8624

A Tabela 4.17 aponta que somente o parâmetro  $\theta_1$  foi significativamente diferente de zero, de modo que, com isso, entende-se que apenas a coordenada referente à latitude influenciou na altura das árvores. Observa-se, ainda, que o valor positivo da estimativa do efeito dessa coordenada alinha-se com a percepção visual, mostrada na Figura 4.7(a), de que quanto maior valor da longitude, maiores foram os valores medidos para a altura da Candeia.

A etapa seguinte das análises foi destinada à avaliação dos efeitos de tratamentos, na qual foram utilizados os testes de comparações múltiplas para os contrastes de Tukey, além do teste de agrupamento de Scott-Knott. Em ambos casos, foi abordada a metodologia de inclusão da informação de correlação espacial proposta neste trabalho.

Por sua objetividade e clareza em sua interpretação, apresenta-se, a princípio, os resultados alcançados por meio do teste de Scott-Knott. A título de comparação, é apresentado, também, as conclusões obtidas por meio do teste de Scott-Knott original, o qual tem formulação fundamentada no princípio de independência dos erros. Esses resultados encontram-se na Tabela 4.18.

O teste Scott-Knott considerando independência dos erros foi aplicado por meio do pacote *ScottKnott* (JELIHOVSKI; FARIA; BEZERRA, 2014), disponível no *software* R (R CORE TEAM, 2016). É importante salientar que esse teste é realizado a partir das médias aritméticas estimadas para cada tratamento. Em contrapartida, o teste Scott-Knott espacial é aplicado às médias espaciais, estimadas a partir da incorporação da informação de dependência espacial. Além disso, nesse caso em que detectou-se tendência espacial nos dados, os valores dessas médias foram corrigidos para os efeitos das coordenadas.

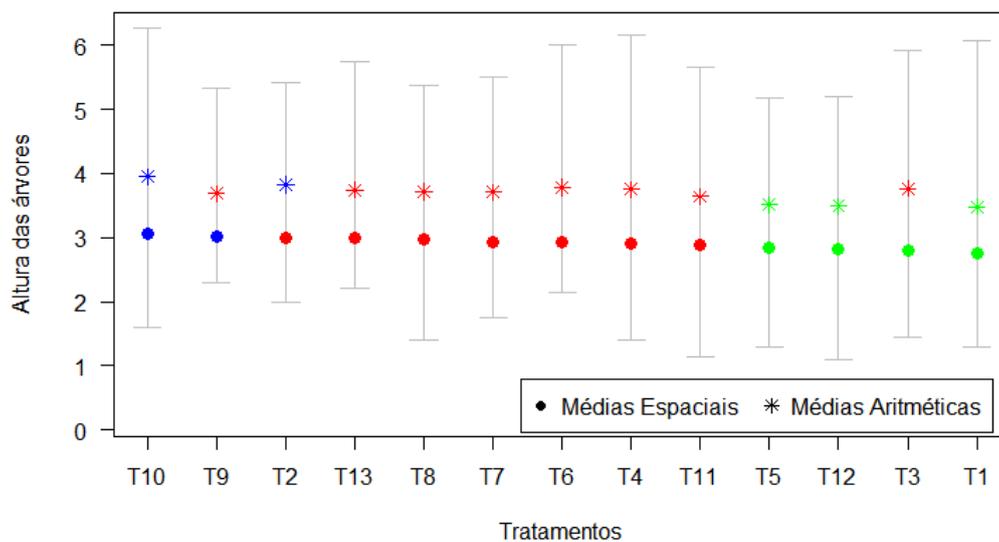
Ao comparar os resultados apresentados na Tabela 4.18, ressalta-se a alteração na ordem dos tratamentos e, conseqüentemente, mudança na indicação dos tratamentos que resultaram nas maiores alturas para a Candeia. Nesse sentido, enquanto o teste Scott-Knott independente agrupou os tratamentos 2 e 10 como os maiores valores, a abordagem espacial indicou os tratamentos 9 e 10. A partir da Figura 4.8, outras médias classificadas em grupos distintos, ao comparar as duas abordagens, podem ser mais facilmente identificadas.

Tabela 4.18 – Teste Scott-Knott, independente e espacial, para avaliar os tratamentos do experimento de Candeia, ao nível  $\alpha = 0,05$ .

Scott-Knott Independente			Scott-Knott Espacial		
Tratamentos	Médias	Grupos	Tratamentos	Médias	Grupos
10	3,946	a	10	3,060	a
2	3,826	a	9	3,007	a
6	3,783	b	2	2,999	b
3	3,765	b	13	2,995	b
4	3,750	b	8	2,979	b
13	3,747	b	7	2,940	b
8	3,716	b	6	2,933	b
7	3,712	b	4	2,909	b
9	3,685	b	11	2,889	b
11	3,640	b	5	2,840	c
5	3,514	c	12	2,826	c
12	3,490	c	3	2,807	c
1	3,484	c	1	2,748	c

Na Figura 4.8, as médias designadas em um mesmo grupo são identificadas pela mesma cor. Além disso, essa figura mostra, ainda, um intervalo para cada tratamento, sendo esses limitados pelos valores mínimos e máximos observados em cada tratamento.

Figura 4.8 – Tratamentos agrupados, por meio das cores, a partir dos testes Scott-Knott original (médias aritméticas) e espacial (médias espaciais).



Por fim, apresenta-se na Tabela 4.19 os resultados para avaliação dos contrastes abordados no teste Tukey. Novamente, são apresentados os resultados obtidos por meio

da distribuição  $t$  multivariada, porém um resultado idêntico foi encontrado quando se utilizou a distribuição  $q$  estudentizada.

Tabela 4.19 – Teste  $t$  multivariado, independente e espacial, na avaliação dos contrastes de Tukey para os tratamentos do experimento de Candeia, ao nível  $\alpha = 0,05$ .

<b><math>t</math> multivariado independente</b>			<b><math>t</math> multivariado espacial</b>		
Tratamentos	Médias	Resultado	Tratamentos	Médias	Resultado
10	3,946	a	10	3,060	a
2	3,826	ab	9	3,007	ab
6	3,783	abc	2	2,999	ab
3	3,765	abc	13	2,995	ab
4	3,750	abcd	8	2,979	ab
13	3,747	abcd	7	2,940	ab
8	3,716	abcd	6	2,933	abc
7	3,712	abcd	4	2,909	abc
9	3,685	abcd	11	2,889	abc
11	3,640	bcd	5	2,840	bc
5	3,514	cd	12	2,826	bc
12	3,490	cd	3	2,807	bc
1	3,484	d	1	2,748	c

Ao comparar os resultados obtidos nas abordagens independente e espacial, pode-se observar que houveram divergências em suas conclusões. Esse fato é observado, por exemplo, no contraste entre as médias dos tratamentos 3 e 10, sendo essas consideradas iguais na abordagem independente e diferentes quando se utilizou a abordagem espacial.

## 5 CONCLUSÃO

Ao avaliar os resultados obtidos pelo teste  $F$  da análise de variância, destaca-se que o poder do teste para a abordagem espacial foi superior, em todos os cenários analisados, ao poder do teste obtido por meio da abordagem clássica. Porém, nos experimentos simulados com efeito pepita de 1,5, esse teste apresentou taxas de erro tipo I maiores que os níveis nominais especificados.

Os testes para avaliação de todos os contrastes de médias duas a duas, identificados como contrastes Tukey, apresentaram resultados equivalentes quando se considerou a distribuição  $t$  multivariada e uma aproximação da distribuição  $q$  estudentizada.

O teste Tukey original é conhecido por sua característica de ser conservativo, mantendo, frequentemente, as taxas de erro tipo I por experimento abaixo dos níveis nominais estabelecidos. Contudo, essa mesma característica não é refletida na abordagem espacial, uma vez que as taxas desse erro para determinadas configurações espaciais foram superiores aos níveis nominais adotados.

Dessa forma, acredita-se que os testes espaciais sejam uma metodologia de análise generalizada, de modo que, para o caso específico de independência espacial, deve-se optar pelos testes clássicos destinados à essa condição.

A modelagem da tendência espacial por meio da metodologia de covariáveis apresentou resultados adequados, sendo que os testes para avaliar esses efeitos conseguiram detectar a significância dos mesmos, além do fato de que os testes de comparações múltiplas para as médias dos tratamentos, corrigidas para o efeito dessa componente, conseguiram detectar diferenças entre as médias. Destaca-se ainda que, na presença de tendência espacial, os testes de comparações múltiplas avaliados apresentaram um maior controle da taxa de erro tipo I, porém, mostraram-se menos poderosos comparados com os resultados obtidos nos experimentos simulados na ausência de tendência.

Com relação aos parâmetros do semivariograma, de modo geral, observa-se que o valor do efeito pepita exerceu uma forte influência na adequabilidade dos testes, enquanto o alcance exerceu uma moderada influência nesses resultados e o patamar não afetou as conclusões alcançadas.

O teste Scott-Knott espacial apresentou maior controle das taxas de erro tipo I por experimento que os testes espaciais para avaliar os contrastes de Tukey. O teste de Scott-Knott também foi mais poderoso que o teste para os contrastes de Tukey, principalmente na capacidade em detectar diferenças menores entre as médias dos tratamentos.

Ao comparar os resultados dos testes obtidos pela abordagem espacial, por meio da modelagem geoestatística, e a partir da abordagem clássica, a qual supõe independência, verificou-se que, em todos os cenários analisados, os testes espaciais apresentaram maior

poder que os testes clássicos. Com isso, concluiu-se que a incorporação da informação espacial resultou em teste mais eficientes para apontar diferenças entre os tratamentos, quando esses são provenientes de experimentos com dependência espacial.

## REFERÊNCIAS

- BANZATTO, D. A.; KRONKA, S. N. **Experimentação agrícola**. 4. ed. Jaboticabal: FUNEP, 2006. 237 p.
- BATISTA, B. D. de O. **Testes de comparações múltiplas baseados na distribuição da midrange estudentizada externamente**. 2016. 194 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2016.
- BORGES, L. C.; FERREIRA, D. F. Poder e taxas de erro tipo I dos testes Scott-Knott, Tukey e Student-Newman-Keuls sob distribuições normal e não normais dos resíduos. **Revista de Matemática e Estatística**, v.21, n.1, p. 67-83, 2003.
- BRETZ, F.; HOTHORN, T.; WESTFALL, P. **Multiple Comparisons Using R**, CRC Press, Boca Raton, 2010. 182 p.
- BURROUG, P.; **Principles of geographical information systems for land resources assessment**. Oxford: Clarendon, 1987. 193 p.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. 5<sup>th</sup> ed. São Paulo: Saraiva. 2004. 526 p.
- CAMBARDELLA, C. A. et al. Field scale variability of soil properties in central Iowa soils. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v.58, n.5, p. 1501-1511, 1994.
- CAMPOS, J. F. **Eficiência da análise estatística espacial na classificação de famílias do feijoeiro: estudo via simulação**. 2011. 62 p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada a Biometria) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2011.
- CARMER, S. G.; SWANSON, M. R. An evaluation of ten pairwise multiple comparison procedures by Monte Carlo methods. **J. Journal American Statistical Association**, Washington, v.68, p. 66-74, 1973.
- CLARK, I; HARPER, W. V. **Practical Geostatistics**. Columbus: Ecosse North America LLC, 2000. 382 p.
- CRESSIE, N. **Statistics for spatial data**, revised edition. 2<sup>nd</sup> ed. New York: J. Wiley, 2015. 928 p.
- COCHRAN, W. G. Some consequences when the assumptions for the analysis of the variance are not satisfied. **Biometrics**, Raleigh, v.3, n.1, p. 3-22, 1947.
- CUNHA, A. O.; ANDRADE, L. A.; BRUNO, R. L. A.; SILVA, J. A. L.; SOUZA, V.C. Efeitos de substratos e das dimensões dos recipientes na qualidade das mudas de *Tabebuia impetiginosa* (Mart. Ex D.C.) Standl. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 29, n. 4, p. 507-516, 2005.

DESSOTTI, C. **Modelos lineares mistos para explicar a variabilidade espacial na análise conjunta de experimentos agronômicos**. 2014. 101 p. Tese (Doutorado em Estatística e Exp. Agronômica) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2014.

DIGGLE, P. J.; RIBEIRO JÚNIOR, P. J. **Model-based geostatistics**. New York: Springer, 2007. 230 p.

DUARTE, J. B. **Sobre o emprego e a análise estatística do delineamento em blocos aumentados no melhoramento genético vegetal**. 2000. 293 p. Tese (Doutorado em Agronomia) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2000.

DUARTE, J. B.; VENCOSKY, R. Spatial statistical analysis and selection of genotypes in plant breeding. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v.40, n.2, p. 107-114, 2005.

DUNNETT, C. W. Pairwise Multiple Comparisons in the Unequal Variance Case. **Journal of the American Statistical Association**, v.75, p. 796-800, 1980.

EDWARDS, D.; BERRY, J. The efficiency of simulation-based multiple comparisons. **Biometrics**, v.43, p. 913-928, 1987.

FERREIRA, D.F. **Estatística Multivariada**. 2<sup>nd</sup> ed. Lavras: Ed. UFLA, 2011. 676 p.

FREITAS, E.G. **Análise de dados longitudinais em experimentos com cana-de-açúcar**. 2007. 75 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2007.

GENZ, A.; BRETZ, F. Numerical computation of multivariate t-probabilities with application to power calculation of multiple contrasts. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v.63, p. 361–378, 1999.

\_\_\_\_\_. Methods for the computation of multivariate t-probabilities. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 11, p. 950–971, 2002.

\_\_\_\_\_. **Computation of Multivariate Normal and t Probabilities**. Lecture Notes in Statistics, v. 195, Springer-Verlag, Heidelberg, 2009.

GOTWAY, C. A; CRESSIE, N. **A Spatial Analysis of Variance Applied to Soil-Water Infiltration**, Water Resources Research, v.26, p. 2695–2703, 1990.

GRIFFITH, D. A. **Advanced spatial statistics**. Boston: Kluwer Academic, 1988.

GRAVES, S.; PIEPHO, H. P.; SELZER, L. **multcompView**: visualizations of paired comparisons. R package version 0.1-7, 2015. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=multcompView>>.

HARTIGAN, J. A. Direct clustering os a data matrix. **Journal of the American Statistical Association**, v.67, p. 123-129, 1972.

HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O. **Designs and analysis of experiments: introduction to experimental design**. New York: J. Wiley, 1994. v.1, 495 p.

HOCHBERG, Y.; TAMHANE, A. C. **Multiple comparison procedures**. New York: John Wiley, 1987. 450 p.

HOTHORN, T.; BRETZ, F.; WESTFALL, P. Simultaneous Inference in General Parametric Models. **Biometrical Journal**, v.50, n.3, p. 346-363, 2008.

HSU, J. C. **Multiple Comparisons: Theory and Methods**, London: Chapman & Hall, 1996. 277 p.

ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. **An introduction to applied geostatistics**. New York: Oxford University, 1989. 561 p.

JELIHOVSCHI, E. G.; FARIA, J. C; BEZERRA, A. I. ScottKnott: A Package for Performing the Scott-Knott Clustering Algorithm in R. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 15, n. 1, p. 3-17, 2014.

JOURNEL, A. G. **Fundamentals of geostatistics in five lessons**. Washington: American Geophysical Union, 1989. 40 p.

JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, C. J. **Mining geostatistics**. London: Academic Press, 1978. 600 p.

KEMPTHORNE, O. Why Randomize? **Journal of Statistical Planing and Inference**, Amsterdam, v. 1, p. 1-25, 1977.

LEEMIS, L. M.; TRIVEDI, K. S. A comparison of approximate interval estimators for the bernoulli parameter. **The American Statistician**, v.50, n.1, p. 63-68, 1996.

LITTELL, R. C.; MILLIKEN, G. A., STROUP, W. W.; WOLFINGER, R.D.; SCHABENBERGER, O. **SAS for Mixed Models**, 2<sup>nd</sup> ed., Cary, NC: SAS Institute Inc. 2006. 814 p.

MACHADO, A. A., DEMÉTRIO, C.G.B., FERREIRA, D. F., SIVA, J. G. C. **Estatística experimental: uma abordagem fundamentada no planejamento e no uso de recursos computacionais**, In: 50<sup>a</sup> RBRAS – 11<sup>o</sup> SEAGRO, Londrina, 2005.

MARTINEZ, R. Control de la correlación espacial en experimentos de campo em el sector agrícola. **Agronomia Colombiana**, Bogotá, v. 11, p. 83-89, 1994.

MCBRATNEY, A. B.; WEBSTER, R. Choosing functions for semivariograms of soil properties and fitting them to sampling estimates. **Journal of Soil Science**, New Brunswick, v.37, n.6, p. 617-639, 1986.

- MELLO, J. M. **Geoestatística aplicada ao inventário florestal**. 2004. 110 p. Tese (Doutorado em Recursos Florestais) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2004.
- MELLO, J. M.; BATISTA, J. L. F.; RIBEIRO JÚNIOR, P. J.; OLIVEIRA, M. S. Ajuste e seleção de modelos espaciais de semivariograma visando à estimativa volumétrica de *Eucalyptus grandis*. **Scientia Forestalis**, n. 69, p. 25-37, 2005.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 7<sup>th</sup> ed. Hoboken: J. Wiley, 2008. 656 p.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. Introduction to the theory of statistics. 3. ed. New York: Wiley & Sons, 1974. 564 p.
- NOGUEIRA, C. H. **Análise de variância com dependência espacial sob uma abordagem geoestatística**. 2013. 123 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.
- OLIVEIRA, M. S. de. **Planos amostrais para variáveis espaciais utilizando geoestatística**. 1991. 100 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.
- OLIVEIRA, M.C.N. de. **Métodos de estimação de parâmetros em modelos geoestatísticos com diferentes estruturas de covariâncias: uma aplicação ao teor de cálcio no solo**. 2003. 140 p. Tese (Doutorado em Agronomia) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 2003.
- PIMENTEL-GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 15<sup>th</sup> ed. Piracicaba: FEALQ, 2009, 451 p.
- PONTES, J. M.; OLIVEIRA, M. S. Uma proposta alternativa para a análise de experimentos de campo utilizando a geoestatística. **Ciênc. agrotec.** v.28, n.1, p. 135-141, 2004.
- RAMALHO, M. A. P.; FERREIRA D. F.; OLIVEIRA, A. C.. **Experimentação em genética e melhoramento de plantas**. Lavras: UFLA. 2000. 326 p.
- R CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2016. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>.
- REIS, A. J. dos S.; MIRANDA FILHO, J. B. de. Autocorrelação espacial na avaliação de compostos de milho para resistência à lagarta do cartucho (*Spodoptera frugiperda*). **Pesquisa Agropecuária Tropical**, Goiânia, v.33, n.2, p. 65-72, 2003.
- RENCHER, A. C.; SCHAALJE, G. B. **Linear models in statistics**. 2<sup>nd</sup> ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2008. 672 p.

RIBEIRO JÚNIOR, P. J. **Métodos geoestatísticos no estudo da variabilidade espacial de parâmetros do solo**. 1995. 99 p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba, 1995.

RIBEIRO JÚNIOR, P. J.; DIGGLE, P. J. **geoR: Analysis of Geostatistical Data**. R package version 1.7-5.1. 2015. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=geoR>>.

ROSSONI, D. F. **Análise de variância para experimentos com dependência espacial**. 2011. 108 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

SANTOS, C.; FERREIRA, D.F.; BUENO FILHO, J.S.S. Novas alternativas de testes de agrupamento avaliadas por meio de simulação monte carlo. **Revista Ciência e Agrotecnologia**, v.25, n.6, p. 1382-1392, 2001.

SCHLATHER, M.; MALINOWSKI, A.; MENCK, P.J.; OESTING, M.; STROKORB, K. Analysis, Simulation and Prediction of Multivariate Random Fields with Package RandomFields. **Journal of Statistical Software**, v.63, n.8, p. 1-25, 2015.

SCOLFORO, J. R. S.; OLIVEIRA, A. D.; DAVIDE, A. C. **Manejo Sustentável da Candeia: o caminhar de uma nova experiência florestal em Minas Gerais**. 1. ed. Lavras: Editora UFLA, 2012. v.1. 329 p.

SCOTT, A. J.; KNOTT, M. A Cluster analysis method for grouping means in the analysis of variance. **Biometrics**, v.30, p.507-512, 1974.

SEARLE, S. R. **Linear models for unbalanced data**. New York: J. Wiley, 1987. 536 p.

SEIDEL, E. Jr.; OLIVEIRA, M. S. Novo índice geoestatístico para a mensuração da dependência espacial. **Rev. Bras. Ciênc. Solo**, vol.38, n.3, p. 699-705, 2014.

SNEDECOR, G. W., COCHRAN, W. G. **Statistical Methods**. 7<sup>th</sup> ed. Ames: Iowa State University Press. 1989. 507 p.

STEEL, R.G.D.; TORRIE, J. H. **Principles and procedures of statistics**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: McGraw-Hill Book, 1980. 633 p.

SOARES, A. **Geoestatística para ciências da terra e do ambiente**. 2<sup>nd</sup> ed. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2006. 213 p.

TEIXEIRA, M. B. R.; SCALON, J. D. Comparação entre estimadores de semivariância. **Revista Brasileira de Biometria**, v.31, n.2, p. 248-269, 2013.

TUKEY, J. W. The problem of multiple comparisons. **Unpublished Dittoed Notes, Princeton University**, 1953.

ZIMMERMANN, F. J. P. **Estatística aplicada à pesquisa agrícola**. Santo Antônio de Goiás: Embrapa Arroz e Feijão. 2004. 402 p.

YAMAMOTO, J. K.; LANDIM, P. M. B. **Geoestatística: conceitos e aplicações**. São Paulo: Senac, 2013. 215 p.

ZORZATTO, J. R. **Comparações múltiplas em pares de médias**. 1985. 77 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1985.

## APÊNDICE A - Demonstração do teste Scott-Knott

Considerando um grupo de  $k$  médias ordenadas, as hipóteses avaliadas no teste Scott-Knott são:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu \\ H_1 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k_1} = \mu_{g_1} \text{ e } \mu_{k_1+1} = \mu_{k_1+2} = \cdots = \mu_k = \mu_{g_2} \end{cases}$$

em que  $k_1, k_2 \geq 1$ , com  $k_2 = k - k_1$ .

Supondo que as variáveis observadas seguem distribuições normais independentes com variância comum  $\sigma^2$ , tem-se:

**Sob  $H_0$  :**

$$Y_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ com } i = 1, 2, \dots, k \text{ e } j = 1, 2, \dots, r.$$

**Sob  $H_1$  :**

$$\left. \begin{array}{l} Y_{1j} \sim N(\mu_{g_1}, \sigma^2) \\ Y_{2j} \sim N(\mu_{g_1}, \sigma^2) \\ \vdots \\ Y_{k_1j} \sim N(\mu_{g_1}, \sigma^2) \end{array} \right\} k_1 r \text{ variáveis} \quad \text{e} \quad \left. \begin{array}{l} Y_{(k_1+1)j} \sim N(\mu_{g_2}, \sigma^2) \\ Y_{(k_1+2)j} \sim N(\mu_{g_2}, \sigma^2) \\ \vdots \\ Y_{kj} \sim N(\mu_{g_2}, \sigma^2) \end{array} \right\} k_2 r \text{ variáveis}$$

Considerando  $k = k_1 + k_2$  o número de médias e  $n = kr$  o número de observações, a função de verossimilhança para  $H_0$  é dada por:

$$L_0(\mu, \sigma^2; Y_{ij}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^r (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y_{ij} - \mu)^2 \right\};$$

$$L_0(\mu, \sigma^2; Y_{ij}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \mu)^2 \right\};$$

$$Q = \ln L_0(\mu, \sigma^2; Y_{ij}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \mu)^2.$$

Derivando  $Q$  em relação aos parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  e igualando a zero, tem-se os

estimadores de máxima verossimilhança (EMV), dados por:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r Y_{ij} = \bar{Y} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2.$$

Entretanto  $\hat{\sigma}^2$  é um estimador viesado para  $\sigma^2$ . Em contrapartida, um estimador não viesado para  $\sigma^2$  é dado pelo quadrado médio do resíduo (*QMRes*), a partir do qual tem-se

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = QMRes(n - k).$$

Mas:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_i + \bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 + r \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right]. \end{aligned}$$

Chamando  $v = n - k$  e, assim,  $n = v + k$ , chega-se que  $\hat{\sigma}^2$  é igual a:

$$\frac{1}{v + k} \left[ v QMRes + r \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] = \frac{r}{v + k} \left[ v \frac{QMRes}{r} + \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right].$$

Se  $Y_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $\bar{Y}_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ , em que  $\sigma_0^2 = \sigma^2/r$ . Definindo  $s_{\bar{Y}}^2 = QMRes/r$  como um estimador não viesado para a variância da média, obtém-se, pelo princípio da invariância, o EMV para  $\sigma_0^2$ , dado por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{(v + k)} \left[ v s_{\bar{Y}}^2 + \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right].$$

Finalmente, substituindo os EMV na função de máxima verossimilhança, resulta em:

$$L_0 = \left[ \frac{2\pi}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 \right]^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}.$$

Já a função de máxima verossimilhança, sob  $H_1$ , é dada por:

$$\begin{aligned} L_1(\mu_{g_1}, \mu_{g_2}, \sigma^2; Y_{ij}) &= \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{j=1}^r (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y_{ij} - \mu_{g_1})^2 \right\} \times \\ &\quad \times \prod_{i=k_1+1}^k \prod_{j=1}^r (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y_{ij} - \mu_{g_2})^2 \right\} = \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \mu_{g_1})^2 + \sum_{i=k_1+1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \mu_{g_2})^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo neperiano ( $\ln$ ), derivando em relação aos parâmetros e igualando a zero, obtêm-se os EMV, dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_1})^2 + \sum_{i=k_1+1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_2})^2 \right], \\ \hat{\mu}_{g_1} &= \frac{1}{k_1 r} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^r Y_{ij} = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \left( \frac{\sum_{j=1}^r Y_{ij}}{r} \right) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \bar{Y}_i = \frac{T_1}{k_1}, \\ \hat{\mu}_{g_2} &= \frac{1}{k_2 r} \sum_{i=k_1+1}^k \sum_{j=1}^r Y_{ij} = \frac{1}{k_2} \sum_{i=k_1+1}^k \left( \frac{\sum_{j=1}^r Y_{ij}}{r} \right) = \frac{1}{k_2} \sum_{i=k_1+1}^k \bar{Y}_i = \frac{T_2}{k_2}. \end{aligned}$$

Novamente, substituindo os EMV para encontrar o máximo da função de verossimilhança, sob  $H_1$ , obtêm-se:

$$L_1 = \left[ \frac{2\pi}{n} \left( \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_1})^2 + \sum_{i=k_1+1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_2})^2 \right) \right]^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}.$$

Porém, sabe-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 &= \left[ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_1})^2 + \sum_{i=k_1+1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_2})^2 \right] + \\ &\quad + [k_1 r (\hat{\mu}_{g_1} - \bar{Y})^2 + k_2 r (\hat{\mu}_{g_2} - \bar{Y})^2]. \end{aligned}$$

Para resolver  $[k_1r(\hat{\mu}_{g_1} - \bar{Y})^2 + k_2r(\hat{\mu}_{g_2} - \bar{Y})^2]$  é necessário, antes, reescrever a média geral em termos de  $T_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \bar{Y}_i$  e  $T_2 = \sum_{i=k_1+1}^k \bar{Y}_i$ . Com isso:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{1}{kr} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r Y_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\sum_{j=1}^r Y_{ij}}{r} \right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i = \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^{k_1} \bar{Y}_i + \sum_{i=k_1+1}^k \bar{Y}_i \right) \\ &= \frac{k_1\hat{\mu}_{g_1} + k_2\hat{\mu}_{g_2}}{k} = \frac{T_1 + T_2}{k_1 + k_2}. \end{aligned}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} [k_1r(\hat{\mu}_{g_1} - \bar{Y})^2 + k_2r(\hat{\mu}_{g_2} - \bar{Y})^2] &= r[k_1(\hat{\mu}_{g_1}^2 - 2\bar{Y}\hat{\mu}_{g_1} + \bar{Y}^2) + k_2(\hat{\mu}_{g_2}^2 - 2\bar{Y}\hat{\mu}_{g_2} + \bar{Y}^2)] = \\ &= r[k_1\hat{\mu}_{g_1}^2 + k_2\hat{\mu}_{g_2}^2 - 2\bar{Y}(k_1\hat{\mu}_{g_1} + k_2\hat{\mu}_{g_2}) + \bar{Y}^2(k_1 + k_2)] = \\ &= r \left[ \frac{T_1^2}{k_1} + \frac{T_2^2}{k_2} - (k_1 + k_2)\bar{Y}^2 \right] = r \left[ \frac{T_1^2}{k_1} + \frac{T_2^2}{k_2} - \frac{(T_1 + T_2)^2}{k_1 + k_2} \right] = rB_0. \end{aligned}$$

Com isso:

$$\left[ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_1})^2 + \sum_{i=k_1+1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{\mu}_{g_2})^2 \right] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 - rB_0$$

e

$$L_1 = \left[ \frac{2\pi}{n} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 - rB_0 \right) \right]^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \right\}.$$

A razão de verossimilhanças  $L_0/L_1$  é dada, então, por:

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2 - rB_0} \right]^{-\frac{n}{2}} = \left[ 1 - \frac{rB_0}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \bar{Y})^2} \right]^{\frac{n}{2}} = \left[ 1 - \frac{B_0}{n\hat{\sigma}_0^2} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Pelo teste de razão de verossimilhanças, deve-se rejeitar  $H_0$  se:

$$\left[1 - \frac{B_0}{n\hat{\sigma}_0^2}\right]^{\frac{n}{2}} \leq c_1 \text{ (constante)} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_0}{\hat{\sigma}_0^2} \geq c_2 \text{ (constante)}.$$

Porém, Scott e Knott (1974) cita que, a partir dos métodos de Hartigan (1972), quando  $k \rightarrow \infty$ :

$$k^{\frac{1}{2}} \left( \frac{B_0}{k\hat{\sigma}_0^2} - \frac{2}{\pi} \right) \xrightarrow{d} N \left( 0, \frac{8(\pi - 2)}{\pi^2} \right).$$

Usando esta convergência e, chamando  $H = B_0/\hat{\sigma}_0^2$ , a esperança e variância de  $\lambda$  são dadas por:

$$E \left[ \frac{H}{k^{\frac{1}{2}}} - k^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\pi} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E \left[ \frac{H}{k^{\frac{1}{2}}} \right] = k^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad E[H] = k \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow$$

$$E \left[ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} H \right] = E[\lambda] = \frac{k}{\pi - 2};$$

$$Var \left( \frac{H}{k^{\frac{1}{2}}} - k^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\pi} \right) = Var \left( \frac{H}{k^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{8(\pi - 2)}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad Var(H) = k \frac{8(\pi - 2)}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad Var \left( \frac{\pi}{2(\pi - 2)} H \right) = Var(\lambda) = 2 \frac{k}{\pi - 2}.$$

Como  $B_0 \geq 0$  e  $\hat{\sigma}_0^2 \geq 0$ , segue que  $\lambda \in [0, \infty)$ . Com isso, Scott e Knott (1974), mostrou, por meio de simulação, que  $\lambda$  equivale a uma distribuição  $\chi^2$  com  $\nu_0 = k/(\pi - 2)$ .

Assim, definindo  $\alpha$  como o nível de significância do teste e  $\lambda_c$  como o valor calculado de  $\lambda$ , conclui-se que  $H_0$  deve ser rejeitada se  $\lambda_c \geq \chi_{(\nu_0, 1-\alpha)}^2$ .



```

i.sig=solve(sigma)
beta=solve(t(X2)%*%i.sig%*%X2)%*%t(X2)%*%i.sig%*%Y
erro=data.frame(Y-X2%*%beta)

####Iterações####
repeat
{
geodados=as.geodata(data.frame(coords,erro), coords.col=1:2,data.col=3)
vario.res=variog(geodados,max.dist=dist, pairs.min=40)

ols=variofit(vario.res,cov.model=model,ini.cov.pars=c(sill.ols,phi.ols),
              nugget=nugget.ols,weights="equal")
phi1=summary(ols)[[10]][[3]]
sill1=summary(ols)[[10]][[2]]
nugget1=summary(ols)[[10]][[1]]

sigma=varcov.spatial(coords=coords,cov.model=model,nugget=nugget1,
                     cov.par=c(sill1,phi1))$varcov
i.sig=solve(sigma)
beta=solve(t(X2)%*%i.sig%*%X2)%*%t(X2)%*%i.sig%*%Y
erro=data.frame(Y-X2%*%beta)

e1=abs(phi.ols-phi1)
e2=abs(sill.ols-sill1)
e3=abs(nugget.ols-nugget1)

phi.ols=phi1;    sill.ols=sill1;    nugget.ols=nugget1

if((e1<0.0001)&&(e2<0.0001)&&(e3<0.0001))break}

plot(vario.res)
lines(ols, col="red", lwd=2)

sigma=varcov.spatial(coords=coords,cov.model=model,nugget=nugget1,
                     cov.par=c(sill1,phi1))$varcov
V=sigma/sigma[1,1]; i.V=solve(V)

```

**ANEXO B - Implementação da função do teste Scott-Knott espacial no  
software R**

```

sk.esp=function(y ,trat, coords,trend=FALSE, phi, sill, nugget=0,
               model, sig.level=0.05){

r<- tapply(y,trat, "length")
k=nlevels(as.factor(trat))    ###numero de tratamentos
n=sum(r) ## nº de observações

row=c(0); for (i in 1:k){ row[i+1]= sum(r[1:i])}
X2=matrix(0,n,k)
for (i in 1:n){
for (j in 1:k){
if(i <= row[j+1] & i > row[j]) X2[i,j]=1}}

sigma=varcov.spatial(coords,cov.model=model, nugget=nugget,
                    cov.pars=c(sill,phi))$varcov
V=sigma/sigma[1,1]; i.V=solve(V)

if (trend == "TRUE") {
  D= as.matrix(coords)
  P=i.V- i.V%%X2%%solve(t(X2)%%i.V%%X2)%%t(X2)%%i.V
  theta=solve(t(D)%%P%%D)%%t(D)%%P%%y
  beta= solve(t(X2)%%i.V%%X2)%%t(X2)%%i.V%%y -
  solve(t(X2)%%i.V%%X2)%%t(X2)%%i.V%%D%%theta
  } else { beta= solve(t(X2)%%i.V%%X2)%%t(X2)%%i.V%%y }

trt=c()
for (i in 1:k){trt=as.factor(c(trt, rep(i,r[i])))}
dados.na=data.frame(obs=1:length(y), y=y, trat=trt,
                   D1=coords[,1], D2= coords[,2])

obs=c()
for (i in 1:k){
obs=c(obs, subset(dados.na, (trat==order(beta)[i]))$obs) }

dados.ord=dados.na[obs,]

```

```

beta.ord <- sort(beta)
#dif <- beta.ord[2:k] - beta.ord[1:(k - 1)]
#posmax <- grep(max(dif),dif)

sigma=varcov.spatial(dados.ord[,4:5],cov.model=model, nugget=nugget,
                    cov.pars=c(sill,phi))$varcov
V=sigma/sigma[1,1]; i.V=solve(V)

B=c()
for (i in 1:(k-1)){
n1=sum(r[1:i])
n2=sum(r[(i+1):k])
n=n1+n2

K1=matrix(c(rep(1,n1),rep(0,n2)),ncol=1)
K2=matrix(c(rep(0,n1),rep(1,n2)),ncol=1)
K=cbind(K1,K2)
X1=matrix(c(rep(1,n)),ncol=1)
Y=c(dados.ord$y)

sqd=t(Y)%*%i.V%*%Y- t(Y)%*%i.V%*%X1%*%solve(t(X1)%*%i.V%*%X1)%*%
                                     t(X1)%*%i.V%*%Y
sqn=t(Y)%*%i.V%*%K%*%solve(t(K)%*%i.V%*%K)%*%t(K)%*%i.V%*%Y -
    t(Y)%*%i.V%*%X1%*%solve(t(X1)%*%i.V%*%X1)%*%t(X1)%*%i.V%*%Y

B=c(B, sqn/sqd)}
posmax=grep(max(B),B)

lamb= as.numeric((pi/(2*(pi-2)))*n*B[posmax])
pval=pchisq(lamb, k/(pi-2), lower.tail = FALSE)

groups <- rep(0, times = k)
ng <- 1

if (pval > sig.level) {
  groups[1:k] <- 1
} else {

```

```

    groups[1:posmax] <- 1
    groups[(posmax+1):k] <- 2
    ng <- ng + 1
  }

  if ((any(groups!=1))) {
    continua1 = TRUE
  } else {
    continua1 = FALSE
  }

  if (continua1 == TRUE) {
    posI <- 1
    fim <- FALSE

    repeat {
      ini <- groups[posI]
      posF <- max(which(groups == ini))

      if (((posF - posI) > 0) & (ini > 0)) {

#dif <- beta.ord[(posI + 1):posF] - beta.ord[posI:(posF - 1)]
#posmax <- grep(max(dif),dif)

      B=c()
      for (i in 1:(posF-posI)){
        n1=sum(r[posI:(posI+i-1)])
        n2=sum(r[(i+posI):posF])
        n=n1+n2

        K1=matrix(c(rep(1,n1),rep(0,n2)),ncol=1)
        K2=matrix(c(rep(0,n1),rep(1,n2)),ncol=1)
        K=cbind(K1,K2)
        X1=matrix(c(rep(1,n)),ncol=1)

        if (posI==1) { g=0 } else { g=sum(r[1:(posI-1)]) }
        dados.ord1=dados.ord[(g+1):(g+n),]
        Y=c(dados.ord1$y)

```

```

sigma=varcov.spatial(dados.ord1[,4:5],cov.model=model, nugget=nugget,
                    cov.pars=c(sill,phi))$varcov
V=sigma/sigma[1,1]; i.V=solve(V)

sqd=t(Y)%*%i.V%*%Y- t(Y)%*%i.V%*%X1%*%solve(t(X1)%*%i.V%*%X1)%*%
                    t(X1)%*%i.V%*%Y
sqn=t(Y)%*%i.V%*%K%*%solve(t(K)%*%i.V%*%K)%*%t(K)%*%i.V%*%Y -
    t(Y)%*%i.V%*%X1%*%solve(t(X1)%*%i.V%*%X1)%*%t(X1)%*%i.V%*%Y

B= c(B, sqn/sqd) }
posmax=grep(max(B),B)

lamb= as.numeric((pi/(2*(pi-2)))*n*B[posmax])
pval=pchisq(lamb, (posF-posI+1)/(pi-2), lower.tail = FALSE)

aux <- groups[posI]
  if (pval > sig.level) {
    groups[posI:posF] <- - aux
    posI <- posF + 1
    if (posI > k) {
      posI <- 1
    }
  }
  else {
    groups[(posI+posmax):posF] <- ng + 1
    ng <- ng + 1
    posI <- 1
  }
}
else posI <- posF + 1

  if (posI >= k) fim <- TRUE

if (fim == TRUE) break
}

```

```

groups <- abs(groups)
}

Teste = data.frame(trat=levels(factor(trat))[order(beta)],
                   medias=beta.ord, grupos=groups)
#####

k <- nrow(Teste)
ordertest <- Teste[order(Teste[, 2], decreasing = TRUE),]

M <- rep("", k)
M[1] <- "a"
j <- 2

for (i in 2:k) {
  if (ordertest[i, 3] == ordertest[i-1, 3]) {
    M[i] <- M[i-1] }
  else { M[i] <- letters[j]
        j <- j + 1 }
}

saida=data.frame( Trat= ordertest[, 1], Medias =
                 unname(round(ordertest[, 2],3)), Grupos = M)

return(saida)
}
#####

```

### ANEXO C - Poder dos testes espaciais propostos

Tabela 5.1 – Poder do teste  $F$  espacial, em porcentagem, para experimentos simulados, sem e com tendência, e com dependência espacial, sob  $H_0$  parcial, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração	Diferença real entre as médias							
	Sem tendência				Com tendência			
	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	41,85	81,50	98,40	100,0	16,50	59,80	91,15	100,0
(0; 2,5; 7)	69,85	98,00	100,0	100,0	40,65	91,05	99,85	100,0
(0; 4; 4)	41,10	84,15	98,35	100,0	19,05	57,75	92,35	100,0
(0; 4; 7)	67,70	98,35	100,0	100,0	68,55	97,70	99,95	100,0
(1,5; 2,5; 4)	18,40	36,65	62,75	96,45	18,80	38,35	63,05	96,55
(1,5; 2,5; 7)	20,30	40,35	70,00	97,65	19,75	37,80	65,50	97,55
(1,5; 4; 4)	24,05	49,30	77,45	99,00	9,30	23,00	50,95	94,50
(1,5; 4; 7)	24,55	53,25	81,75	99,65	25,00	51,55	80,9	99,90

Tabela 5.2 – Poder do teste  $F$  espacial, em porcentagem, para experimentos simulados, sem e com tendência, e com dependência espacial, sob  $H_0$  parcial, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração	Diferença real entre as médias							
	Sem tendência				Com tendência			
	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	19,80	59,20	92,60	100,0	39,45	81,25	98,55	100,0
(0; 2,5; 7)	44,60	92,15	99,75	100,0	67,15	97,45	100,0	100,0
(0; 4; 4)	18,75	61,85	92,55	100,0	40,15	80,05	98,60	100,0
(0; 4; 7)	42,65	92,10	99,85	100,0	42,65	90,50	99,80	100,0
(1,5; 2,5; 4)	5,40	17,65	39,15	87,35	6,35	18,35	38,35	86,00
(1,5; 2,5; 7)	6,85	18,00	45,00	91,05	7,75	18,10	39,70	90,05
(1,5; 4; 4)	9,05	25,00	53,30	95,25	22,65	45,60	73,35	99,05
(1,5; 4; 7)	9,30	29,10	60,95	98,45	11,10	28,85	58,60	98,45

Tabela 5.3 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	23,28	37,99	55,96	73,64	87,67	96,12	0,992	99,85	100,0
(0; 2,5; 7)	29,17	50,84	72,51	88,28	96,7	99,46	99,87	99,98	100,0
(0; 4; 4)	23,99	38,12	56,32	74,17	88,00	95,88	99,37	99,92	100,0
(0; 4; 7)	29,07	51,28	73,05	88,85	96,72	99,56	99,98	100,0	100,0
(1,5; 2,5; 4)	22,54	30,42	41,59	55,04	67,16	78,39	86,18	91,18	93,2
(1,5; 2,5; 7)	22,60	31,06	43,34	57,12	70,71	81,70	89,57	93,68	95,6
(1,5; 4; 4)	22,74	31,76	44,08	58,4	72,38	83,36	91,15	95,38	97,25
(1,5; 4; 7)	23,02	33,49	47,41	62,57	76,73	87,6	94,55	97,62	98,95

Tabela 5.4 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	17,66	30,09	47,06	65,88	82,42	93,59	98,23	99,68	99,9
(0; 2,5; 7)	21,82	40,03	60,82	79,53	92,34	98,32	99,75	99,98	100,0
(0; 4; 4)	18,42	30,72	47,75	66,53	82,86	93,49	98,55	99,80	99,95
(0; 4; 7)	21,68	39,93	60,71	79,44	92,35	98,61	99,88	100,0	100,0
(1,5; 2,5; 4)	17,20	24,23	33,83	45,58	56,51	66,62	73,67	77,90	79,75
(1,5; 2,5; 7)	17,88	25,29	36,17	49,11	61,65	71,96	79,42	83,72	85,65
(1,5; 4; 4)	18,86	26,88	38,39	51,92	65,51	76,32	84,27	88,58	90,40
(1,5; 4; 7)	18,98	28,50	41,71	56,79	71,38	83,25	90,93	94,80	96,20

Tabela 5.5 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	14,57	24,30	38,69	55,36	70,92	82,59	88,63	90,92	91,35
(0; 2,5; 7)	15,27	28,50	46,46	66,07	83,15	93,50	97,10	97,68	97,70
(0; 4; 4)	16,08	26,63	41,86	59,19	75,66	87,56	94,07	96,32	96,65
(0; 4; 7)	17,58	32,35	51,00	70,22	86,17	94,65	97,25	97,58	97,55
(1,5; 2,5; 4)	5,16	6,57	9,09	12,05	14,95	17,65	19,60	20,80	21,50
(1,5; 2,5; 7)	7,44	10,16	14,16	19,16	23,46	28,16	31,13	33,10	33,85
(1,5; 4; 4)	13,64	18,94	26,07	34,91	44,01	51,30	56,83	60,48	62,05
(1,5; 4; 7)	17,06	24,49	35,36	48,17	60,91	70,98	77,68	81,70	83,30

Tabela 5.6 – Poder do teste de Scott-Knott Espacial, em porcentagem, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	10,98	18,58	29,81	42,98	55,30	64,39	68,95	70,60	70,85
(0; 2,5; 7)	13,46	25,24	42,24	62,02	80,29	92,14	96,63	97,48	97,50
(0; 4; 4)	13,98	23,43	37,56	53,78	69,20	80,56	86,78	88,82	89,05
(0; 4; 7)	14,37	27,00	44,48	64,54	82,68	93,34	97,07	97,55	97,55
(1,5; 2,5; 4)	1,5	1,87	2,68	3,69	4,63	5,44	5,88	6,18	6,50
(1,5; 2,5; 7)	2,62	3,79	5,39	7,42	9,25	11,04	12,02	12,75	12,85
(1,5; 4; 4)	7,28	10,36	14,43	19,72	24,76	29,16	32,18	34,15	34,75
(1,5; 4; 7)	12,05	17,59	25,91	35,86	45,76	53,29	57,97	60,90	61,85

Tabela 5.7 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição  $t$  multivariada, em porcentagem, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	0,32	2,08	7,07	19,67	40,49	64,62	82,92	93,82	98,10
(0; 2,5; 7)	0,71	5,36	20,76	49,30	77,91	94,12	98,95	99,85	99,95
(0; 4; 4)	0,54	2,39	8,85	22,66	44,69	67,55	85,35	95,05	98,75
(0; 4; 7)	0,82	5,38	20,82	50,63	79,16	94,14	99,05	99,88	100,0
(1,5; 2,5; 4)	0,56	1,68	3,82	7,79	15,48	25,37	38,33	53,47	67,70
(1,5; 2,5; 7)	0,89	1,92	4,91	9,87	18,33	29,79	44,08	60,30	73,70
(1,5; 4; 4)	0,76	1,99	5,16	11,02	20,78	34,09	49,53	66,05	81,25
(1,5; 4; 7)	0,89	2,76	6,84	14,60	27,32	43,75	61,70	77,32	89,60

Tabela 5.8 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição  $t$  multivariada, para experimentos simulados sem tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	0,06	0,44	2,08	8,22	21,21	42,51	65,92	83,18	93,95
(0; 2,5; 7)	0,12	1,52	8,86	28,88	58,72	84,08	96,07	99,35	99,90
(0; 4; 4)	0,10	0,67	3,00	10,40	25,54	47,71	69,98	86,62	96,05
(0; 4; 7)	0,15	1,60	9,11	29,58	60,42	84,99	96,42	99,48	99,95
(1,5; 2,5; 4)	0,10	0,50	1,21	3,11	6,76	12,91	21,85	33,30	49,00
(1,5; 2,5; 7)	0,27	0,63	1,87	4,12	8,86	16,40	26,75	40,78	55,95
(1,5; 4; 4)	0,21	0,56	1,82	4,48	10,06	18,66	30,93	46,80	63,45
(1,5; 4; 7)	0,21	0,91	2,69	6,45	14,05	27,21	42,37	60,38	76,85

Tabela 5.9 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição  $t$  multivariada, em porcentagem, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,05$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	0,34	1,69	6,36	18,05	38,17	60,84	80,18	91,30	95,65
(0; 2,5; 7)	0,39	3,55	15,79	41,84	70,40	89,32	95,60	97,02	97,35
(0; 4; 4)	0,29	1,73	6,79	18,29	38,46	61,60	81,92	92,32	96,35
(0; 4; 7)	0,51	3,64	15,67	41,28	70,53	88,70	95,47	97,00	97,20
(1,5; 2,5; 4)	0,76	1,86	3,61	8,27	14,69	24,78	36,85	51,10	65,20
(1,5; 2,5; 7)	0,76	1,94	4,68	9,43	17,94	29,56	44,52	59,08	72,75
(1,5; 4; 4)	0,86	2,14	5,22	10,96	20,29	34,36	49,02	64,45	78,35
(1,5; 4; 7)	1,07	2,79	7,01	15,18	27,18	43,54	61,38	76,85	88,75

Tabela 5.10 – Poder do teste Tukey Espacial, obtido por meio da distribuição  $t$  multivariada, para experimentos simulados com tendência e com dependência espacial, sob  $H_1$  completa, considerando  $\alpha = 0,01$ .

Configuração espacial	Diferença real entre as médias								
	$0,5\sigma_{\bar{y}}$	$1,0\sigma_{\bar{y}}$	$1,5\sigma_{\bar{y}}$	$2,0\sigma_{\bar{y}}$	$2,5\sigma_{\bar{y}}$	$3,0\sigma_{\bar{y}}$	$3,5\sigma_{\bar{y}}$	$4,0\sigma_{\bar{y}}$	$4,5\sigma_{\bar{y}}$
(0; 2,5; 4)	0,04	0,38	2,04	7,31	20,04	39,88	62,73	79,42	90,50
(0; 2,5; 7)	0,08	1,01	6,28	22,35	50,27	76,99	91,53	96,22	97,35
(0; 4; 4)	0,06	0,43	2,06	7,35	20,55	39,88	63,42	82,00	91,90
(0; 4; 7)	0,08	0,98	6,07	21,89	49,63	76,38	91,37	96,20	97,05
(1,5; 2,5; 4)	0,18	0,49	1,28	3,12	6,29	12,50	21,28	32,75	46,60
(1,5; 2,5; 7)	0,25	0,58	1,63	3,94	8,03	15,91	27,23	39,12	56,05
(1,5; 4; 4)	0,26	0,53	2,09	4,69	9,77	18,45	30,75	45,38	63,30
(1,5; 4; 7)	0,35	0,91	2,79	6,73	14,75	26,35	42,57	60,75	77,20

**ANEXO D - Conjuntos de dados simulados analisados como exemplos.**

Tabela 5.11 – Dados simulados sem tendência espacial e com efeitos de tratamentos não nulos.

obs	y	trat	D1	D2	obs	y	trat	D1	D2
1	10,65010267	1	5	5	41	7,593134366	6	5	0
2	13,2183359	1	4	3	42	10,15452176	6	3	5
3	9,52604972	1	3	7	43	12,21617131	6	1	4
4	10,54301407	1	4	5	44	9,012843132	6	5	1
5	8,561302452	1	0	7	45	10,24479081	6	4	7
6	8,47978899	1	4	0	46	10,4268844	6	4	9
7	9,025043939	1	6	0	47	9,719131169	6	7	0
8	11,76242648	1	2	9	48	8,478543054	6	7	6
9	10,90812242	2	2	7	49	9,227352533	7	6	1
10	8,763931422	2	6	6	50	9,924085401	7	7	4
11	9,173730636	2	0	9	51	11,39972399	7	0	5
12	10,93818288	2	1	3	52	7,989724766	7	3	0
13	11,05962788	2	6	3	53	9,836382995	7	0	1
14	9,674571928	2	6	8	54	11,50972717	7	3	4
15	11,06387185	2	2	4	55	11,1595156	7	1	9
16	10,13877075	2	3	6	56	10,4747627	7	2	6
17	10,01459333	3	6	7	57	12,22896303	8	3	2
18	8,041938573	3	7	8	58	9,454510876	8	7	5
19	12,15472455	3	7	3	59	7,744584477	8	1	0
20	10,85600087	3	0	4	60	13,80062136	8	7	2
21	9,748293162	3	0	3	61	13,62301957	8	4	2
22	10,82482518	3	1	6	62	10,68057616	8	3	1
23	10,93414052	3	5	7	63	9,518699702	8	7	9
24	10,23771582	3	0	6	64	13,31545459	8	2	5
25	11,44175093	4	4	6	65	8,440044594	9	2	0
26	7,508708198	4	6	9	66	13,99257874	9	3	9
27	11,31170466	4	4	8	67	9,079831769	9	2	1
28	8,660169035	4	0	2	68	8,423646812	9	1	1
29	11,16796781	4	7	1	69	9,769848595	9	0	0
30	12,51283429	4	3	3	70	12,80152979	9	4	4
31	10,68510061	4	1	7	71	9,813037475	9	5	9
32	8,908468021	4	7	7	72	13,04436137	9	1	5
33	10,35912883	5	2	2	73	10,24451725	10	5	6
34	11,55566852	5	5	8	74	10,76689726	10	6	5
35	9,407414585	5	1	2	75	12,61200491	10	3	8
36	10,19359888	5	5	2	76	11,83398113	10	2	8
37	12,71341118	5	5	3	77	11,68439345	10	1	8
38	8,705797389	5	0	8	78	9,728777191	10	4	1
39	12,23960022	5	2	3	79	13,54435828	10	6	4
40	10,91706325	5	6	2	80	14,38247457	10	5	4

Tabela 5.12 – Dados simulados com tendência espacial e com efeitos de tratamentos não nulos.

obs	y	trat	D1	D2	obs	y	trat	D1	D2
1	14,09844782	1	7	2	41	13,03910584	6	2	2
2	10,53944716	1	7	4	42	9,526139913	6	0	2
3	4,51898136	1	2	5	43	11,10292437	6	6	3
4	4,644940331	1	4	7	44	12,34008812	6	5	3
5	18,55815808	1	6	0	45	10,61347943	6	2	3
6	9,171719002	1	5	5	46	6,962285247	6	2	4
7	11,01552513	1	6	5	47	14,86988455	6	5	1
8	3,733072788	1	0	8	48	11,77568037	6	4	3
9	12,4071247	2	4	2	49	2,886549588	7	0	9
10	4,924658673	2	1	8	50	11,30210389	7	7	8
11	5,116814831	2	2	9	51	7,329638842	7	6	8
12	4,854939772	2	3	6	52	16,21706564	7	4	0
13	3,583003386	2	1	7	53	2,454559337	7	2	7
14	11,72282974	2	3	3	54	5,485265368	7	4	9
15	2,336780108	2	3	7	55	13,17739597	7	3	2
16	14,80473903	2	3	1	56	12,5336563	7	7	3
17	9,58525229	3	0	0	57	8,382655025	8	5	7
18	10,95976863	3	5	4	58	9,807754388	8	5	6
19	4,658235433	3	4	8	59	4,526460219	8	2	6
20	9,667781611	3	6	6	60	12,12389001	8	7	7
21	12,73079549	3	6	2	61	12,17796183	8	0	1
22	7,031906101	3	5	9	62	12,44308609	8	2	1
23	10,20328045	3	1	1	63	4,721720825	8	0	5
24	6,707060124	3	5	8	64	18,47959961	8	7	0
25	16,14456007	4	6	1	65	17,47311032	9	7	1
26	4,432227881	4	2	8	66	9,235040611	9	4	5
27	4,895351832	4	0	4	67	11,53046546	9	4	4
28	10,34491923	4	7	6	68	8,266260997	9	0	3
29	8,671301972	4	3	4	69	13,46541179	9	5	2
30	11,32334781	4	6	4	70	15,24772124	9	3	0
31	7,297262881	4	1	4	71	7,725611199	9	1	9
32	10,51047605	4	1	2	72	9,904323431	9	1	3
33	6,683374194	5	3	5	73	13,53563915	10	7	5
34	8,880537938	5	6	9	74	16,20695468	10	4	1
35	4,194320763	5	0	7	75	9,382751848	10	7	9
36	4,525155246	5	1	6	76	4,539206796	10	0	6
37	16,05694087	5	5	0	77	7,017242148	10	3	9
38	2,83502286	5	3	8	78	13,52938856	10	2	0
39	11,26569202	5	1	0	79	8,887783199	10	6	7
40	6,065168032	5	4	6	80	5,395053954	10	1	5